



شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۷۴۸۰
شاپا الکترونیکی: ۲۲۵۰-۷۴۰۰

نشریه حفاظت منابع آب و خاک

آدرس تارنما:

<https://wsrj.srbiau.ac.ir>

پست الکترونیک:

iawwsrj@srbiau.ac.ir

iawwsrj@gmail.com

سال یازدهم

شماره سه

بهار ۱۴۰۱

تاریخ دریافت:

۱۴۰۰/۰۴/۲۰

تاریخ پذیرش:

۱۴۰۱/۰۸/۰۹

صفحات: ۷۵-۵۹



تحلیل فراوانی دومتغیره مشخصه‌های بارندگی با استفاده از توابع مفصل ارشمیدسی (مطالعه موردی: حوضه خانمیرزا در استان چهارمحال و بختیاری)

سمیرا مرادزاده رحمت آبادی^۱، محسن ایراندوست^{۲*} و رسول میرعباسی نجف آبادی^۳

(۱) دانشجوی دکتری گروه مهندسی آب، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران.

(۲) استادیار گروه مهندسی آب، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران.

(۳) دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران.

* ایمیل نویسنده مسئول: irandostmo@gmail.com

چکیده:

زمینه و هدف: هدف از این مطالعه تحلیل فراوانی دو متغیره مشخصه‌های بارندگی با استفاده از توابع مفصل می‌باشد. برای این منظور، از داده‌های روزانه بارندگی ایستگاه آلونی واقع در دشت خانمیرزا طی دوره آماری ۱۳۹۱-۱۳۶۵ استفاده گردید. پس از بررسی رویدادهای بارندگی ثبت شده در ایستگاه آلونی در دوره مورد مطالعه (۷۶۳ رویداد)، مدت زمان بارندگی، عمق بارندگی و سپس شدت بارندگی رویدادها محاسبه گردید. بررسی‌ها نشان می‌دهد که در منطقه مورد مطالعه، معمولاً رویدادهای بارش با شدت ۵ میلی‌متر بر ساعت و بیشتر منجر به وقوع سیلاب می‌شوند، لذا در این مطالعه رویدادهایی که منجر به ایجاد سیلاب شده‌اند برای ادامه محاسبات انتخاب گردیدند. سپس توزیع‌های رایج در هیدرولوژی بر هریک از مشخصه‌های بارندگی (مدت، شدت، عمق بارندگی) برازش داده شد و توزیع‌هایی که بهترین برازش را بر هر یک از مشخصه‌های بارندگی داشتند، انتخاب گردیدند. در ادامه جهت ایجاد توزیع چند متغیره مشخصه‌های بارندگی، از ده تابع مفصل استفاده گردید.

روش پژوهش: در این مطالعه در ابتدا مشخصه‌های بارندگی نظیر شدت، مدت و عمق برای داده‌های بارندگی که منجر به سیل می‌شوند استخراج گردید. سپس توابع توزیع حاشیه‌ای رایج در هیدرولوژی بر مشخصه‌ها برازش داده شد. در ادامه بعد از انتخاب توزیع حاشیه‌ای برتر به منظور ایجاد تابع توزیع تجمعی (CDF) به منظور ایجاد توزیع چند متغیره مشخصه‌های بارندگی، برازش توابع مفصل کلایتون، علی-میخائیل-حق، فارلی-گامبل-مورگن اشترن، فرانک، گالامبوس، گامبل-هوگارد، پلاکت، فیلیپ-گامبل، جو و گامبل-بارنت بر متغیرهای مذکور به صورت دوجه بررسی گردید و برای هر جفت از مشخصه‌های بارندگی تابع مفصل برتر با مقایسه با مقادیر متناظر مفصل تجربی تعیین گردید. سپس با استفاده از معیارهای نکویی برازش تابع مفصل برتر برای مشخصه‌های بارندگی تعیین گردید. از آنجائیکه شرط استفاده از توابع مفصل وجود همبستگی بین مشخصه‌های مورد مطالعه می‌باشد لذا با استفاده از ضرایب همبستگی اسپیرمن، پیرسون و کندال همبستگی بین مشخصه‌ها بررسی گردید همچنین موارد دوره بازگشت‌های توأم و شرطی، احتمال توأم و شرطی و دوره بازگشت کندال که از مفاهیم اساسی جهت تحلیل بر اساس توابع مفصل می‌باشند مورد ارزیابی قرار گرفت.

یافته‌ها: نتایج حاصل از تحلیل نشان داد که تابع توزیع مقادیر حدی (GEV) بر مشخصه‌های بارندگی (شدت، مدت، عمق) به عنوان تابع توزیع برتر شناخته شد و نتایج حاصل از آزمون نکویی برازش نشان داد که تابع مفصل جو به عنوان تابع مفصل برتر بر مشخصه‌های (شدت و مدت) و (شدت و عمق) می‌باشد و تابع مفصل فارلی گامبل مورگن اشترن به عنوان تابع مفصل برتر بر مشخصه‌های عمق و مدت بارندگی شناخته شد. در ادامه نتایج حاصل از احتمال توأم و شرطی نشان داد در زمانی که بارندگی‌های سیل ۸ ساعت باشد برای سطح احتمال ۰/۲ میزان بارندگی ۴۵ میلی‌متر خواهد بود و برای احتمال شرطی برای مدت زمان ۱۵ ساعت برای همین سطح احتمال میزان بارندگی ۵۱ میلی‌متر خواهد بود. نتایج حاصل از دوره بازگشت توأم برای حالت عطفی نشان داد که برای عمق بارندگی ۶۰ میلی‌متر و شدت بارندگی ۶۰ میلی‌متر در ساعت دوره بازگشت در حالت «و» کمتر از ۲۰ سال می‌باشد. بر اساس حالت «یا» برای همین مقدار شدت و عمق بارندگی میزان دوره بازگشت کمتر از ۱۰ سال (حدود ۶ سال) می‌باشد. برای دوره بازگشت ۲۵ ساله به شرطی که مدت بارندگی ۱۲/۵ ساعت یا بیشتر باشد، عمق بارندگی ۷۵ میلی‌متر خواهد بود.

نتایج: بر اساس نتایج مقایسه مقادیر مفصل‌های تئوری با مقادیر متناظر احتمال توأم تجربی، تابع مفصل جو به عنوان تابع مفصل برتر برای ایجاد توزیع دومتغیره جفت مشخصه‌های شدت و عمق بارندگی و همچنین جفت مشخصه‌های شدت و مدت بارندگی شناخته شد و تابع مفصل فارلی-گامبل-مورگن اشترن برازش مناسب‌تری بر داده‌های مدت و عمق بارندگی داشت. در ادامه با استفاده از توابع مفصل برتر برازش یافته اطلاعات مفیدی نظیر احتمال توأم و شرطی و همچنین دوره بازگشت‌های توأم و شرطی استخراج گردید. بیشترین میزان عمق بارندگی ثبت شده در ایستگاه آلونی ۱۱۴/۷ میلی‌متر و مدت زمان آن ۱۴/۴۰ ساعت بوده است، با این مشخصه‌ها دوره بازگشت شرطی آن تقریباً ۵۰ ساله، برای حالت عطفی «and» این دوره بازگشت ۱۶۰ ساله و برای حالت فصلی «or» ۶۰ ساله می‌باشد. نتایج حاصل از دوره بازگشت‌های توأم و شرطی در این تحقیق کاربرد گسترده‌ای در مطالعات هیدرولوژی و منابع آب داشته که از جمله آنها می‌توان به تحلیل ریسک سیلاب، خشکسالی، عملیات آبخیزداری و مرتع‌داری اشاره کرد.

کلیدواژه‌ها: بارندگی، تحلیل دومتغیره، دوره بازگشت، تابع مفصل

های حدی بکار برده شدند. پس از آن مفهوم توابع مفصل به سرعت در زمینه‌های مختلف هیدرولوژی شامل تحلیل فراوانی سیلاب (De Michele et al., 2005)؛ Shiau et al. (2006)؛ Genest et al. (2007) تحلیل سه متغیره و چهار متغیره خشکسالی (Khani temeliyeh et al., 2020). اشاره کرد. شفائی و همکاران (۱۳۹۵) مدل‌سازی مشخصه‌های رویدادهای بارش را با استفاده از مفصل دی-واین مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعه وابستگی میان مشخصه‌های مهم رویدادهای بارش (عمق بارش، ماکزیمم بارش، مدت دوره خشک و دوره مرطوب) با استفاده از ساختار دی-واین مدل‌سازی شد. ابتدا توزیع‌های احتمالی چند متغیره با توجه به جایگشت‌های مختلف متغیره‌های شرطی ساخته شد و سپس خانواده‌های مفصل‌های ارشمیدسی و بیضوی جهت برآزش بر جفت-مفصل‌های ساختارهای دی-واین مورد آزمون قرار گرفتند و مناسب-ترین خانواده مفصل جهت برآزش بر هر جفت-مفصل با توجه به معیارهای مختلف انتخاب گردیدند. گودرزی و همکاران (۱۳۹۹) به تحلیل فراوانی دومتغیره سیلاب با تابع مفصل ارشمیدسی گامبل- هوگارد پرداختند. آنها با استفاده از تابع مفصل گامبل- هوگارد توزیع احتمالی و دوره بازگشت توأم متغیره‌های دبی اوج و حجم سیلاب را در آبخیز آجی چای در استان آذربایجان شرقی محاسبه کردند. نتایج نشان داد که با به‌کاربردن توابع مفصل می‌توان توزیع تجمعی شرطی و دوره‌های بازگشت توأم متغیره‌های سیلاب را با دقت بسیار بالایی (با متوسط ضریب نش- ساتکلیف ۰/۷۴۵ و ریشه میانگین مربعات خطا برابر ۰/۵۶) برآورد نمود. لی^۵ و همکاران (۲۰۱۹) به-منظور تحلیل دومتغیره سیلاب در چهار زیر حوضه در شرق چین، حجم و شدت بارش‌های بیشینه سالانه را با سه مفصل ارشمیدوسی (گامبل، کلایتون و فرانک) مدل کردند. نتایج وقوع بارش‌های بیشینه در زیر حوضه‌ها متفاوت بود و در سه زیر حوضه افزایش و تنها در یکی کاهش وقوع طوفان دیده شد. ریزوان^۶ و همکاران

بارش به‌عنوان ورودی در مدل‌سازی سیل و طراحی سازه‌های هیدرولیکی از اهمیت بسزایی برخوردار است. تحلیل فراوانی بارش از جمله امور مهم در مطالعات هیدرولوژی و منابع آب می‌باشد. پدیده‌های هیدرولوژیکی از جمله بارندگی معمولاً با مشخصه‌های مختلف توصیف می‌شوند. به‌عنوان نمونه یک رویداد بارندگی را می‌توان با مشخصه‌های شدت، مدت و عمق بارش توصیف نمود. از این رو مدل‌سازی چند متغیره این مشخصه‌ها می‌تواند شناخت دقیق‌تری از این پدیده در اختیار طراحان و برنامه‌ریزان قرار دهد (Afsharypour et al., 2019). با توجه به ماهیت پیچیده و تصادفی پدیده باران، ممکن است در برخی از موارد مشخصه‌های این پدیده با همدیگر از وابستگی مناسبی برخوردار بوده و برعکس، در برخی موارد دیگر از وابستگی مناسبی برخوردار نباشند (Zakaria et al., 2010). با توجه به توانایی‌های توابع مفصل در تحلیل فراوانی چند متغیره، می‌توان پدیده‌های هیدرولوژیکی را با کاربرد توزیع‌های توأم^۱ یا توأم شرطی^۲ دومتغیره یا مرتبه بالاتر مورد بررسی قرار داد و در عین حال کل ساختار وابستگی بین متغیره‌ها را حفظ نمود. همچنین می‌توان مشخصه‌های وابسته پدیده‌های هیدرولوژیکی را که ممکن است دارای توابع توزیع حاشیه‌ای متفاوت باشند، با استفاده از مفصل‌ها با هم جفت نمود و به هم پیوند داد. بنابراین توزیع‌های توأم به‌دست آمده توصیف دقیق‌تری از وضعیت رویدادهای هیدرولوژیکی بدون تکیه بر قضاوت‌های سلیقه‌ای یا فرض‌های ناصحیح در اختیار می‌گذارند (Abdollahi et al., 2018). توابع مفصل اولین بار توسط Sklar (1959) برای ایجاد توزیع‌های چند متغیره ارائه گردید. این توابع اولین بار در مطالعات هیدرولوژی به‌وسیله دی میشل^۳ و سالوادوری^۴ (۲۰۰۳) برای ایجاد یک مدل دومتغیره توصیف کننده شدت و مدت بارش-

¹ Joint distribution

² Conditional joint distribution

³ De Michele

⁴ Salvadori

⁵ Li

⁶ Rizwan

کوهستانی با ارتفاع ۱۸۸۰ متر از سطح دریا و میانگین بارش سالانه ۵۰۰ میلی‌متر در عرض ۳۱ درجه و ۳۳ دقیقه شمالی و طول جغرافیایی ۵۱ درجه ۳ دقیقه شرقی قرار گرفته است. حداقل دمای آن ۵ درجه زیر صفر و حداکثر ۳۰ درجه بالای صفر می‌باشد. از این رو دارای آب و هوای معتدل کوهستانی می‌باشد. بیشترین عمق بارندگی ثبت شده در منطقه ۱۱۴/۷ میلی‌متر در طی ۱۵ ساعت و بیشترین شدت بارندگی ۸۲/۲۴ میلی‌متر بر ساعت بوده است. وسعت دشت خانمیرزا بالغ بر ۱۰۲۳ کیلومتر مربع است. در این مطالعه، از داده‌های روزانه بارندگی ایستگاه آلونی واقع در دشت خانمیرزا طی دوره آماری ۱۳۹۱-۱۳۶۵ استفاده گردید. پس از بررسی رویدادهای بارندگی ثبت شده در ایستگاه آلونی در دوره مورد مطالعه (۷۶۳ رویداد)، مدت زمان بارندگی، عمق بارندگی و سپس شدت بارندگی رویدادها محاسبه گردید. بررسی‌ها نشان می‌دهد که در منطقه مورد مطالعه، معمولاً رویدادهای بارش با شدت ۵ میلی‌متر بر ساعت و بیشتر منجر به وقوع سیلاب می‌شوند، لذا در این مطالعه رویدادهایی که منجر به ایجاد سیلاب شده‌اند برای ادامه محاسبات انتخاب گردیدند. سپس توزیع‌های رایج در هیدرولوژی بر هریک از مشخصه‌های بارندگی (مدت، شدت، عمق بارندگی) برازش داده شد و توزیع‌هایی که بهترین برازش را بر هر یک از مشخصه‌های بارندگی داشتند، انتخاب شدند. در ادامه جهت ایجاد توزیع چند متغیره مشخصه‌های بارندگی، برازش توابع مفصل کلایتون، علی-میخائیل-حق، فارلی-گامبل-مورگن اشترن، فرانک، گالامبوس، گامبل-هوگارد، پلاکت، فیلیپ-گامبل، جو و گامبل-بارنت بر متغیرهای مذکور به صورت دوجه دو بررسی گردید و برای هر جفت از مشخصه‌های بارندگی تابع مفصل برتر با مقایسه با مقادیر متناظر مفصل تجربی تعیین گردید.

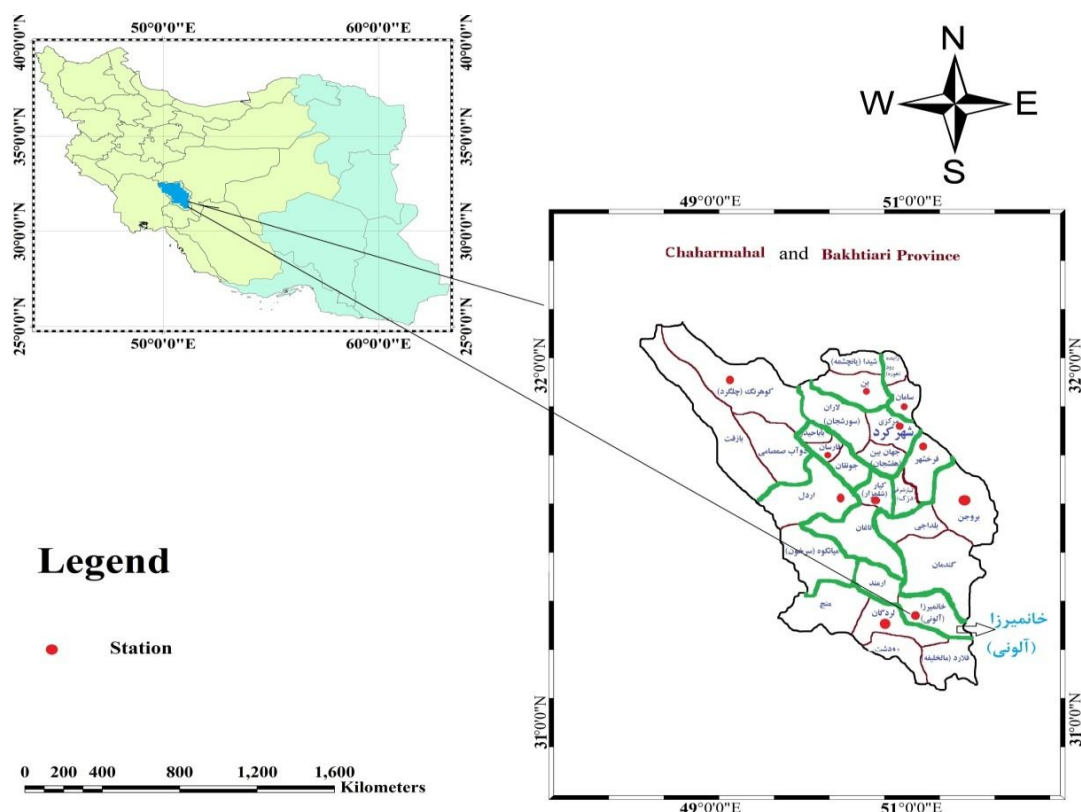
(۲۰۱۹) با استفاده از توابع مفصل هیدروگراف طراحی سیل را در حوضه سند در کشور پاکستان استخراج کردند. آنها برای ایجاد توزیع توأم متغیرهای دبی اوج و حجم سیلاب از مفصل‌های خانواده ارشمیدسی استفاده نمودند. نتایج حاصل نشان داد که عملکرد تابع گامبل-هوگارد از سایر توابع مفصل مورد بررسی در توصیف رابطه بین دبی اوج و حجم سیلاب در این حوضه بهتر بود. دودانگه و همکاران^۱ (۲۰۱۹) به منظور تحلیل فراوانی سیلاب در رودخانه‌های قزل‌اوزن و شاهرود از توابع مفصل استفاده کردند. نتایج نشان داد که برای دبی اوج ایستگاه گیلوان در رودخانه قزل‌اوزن و ایستگاه لوشان در رودخانه شاهرود تابع مفصل گوسی و توابع توزیع حاشیه‌ای ویبول و گاما بهترین برازش را داشتند. هدف از مطالعه حاضر، تحلیل فراوانی چند متغیره مشخصه‌های بارندگی ایستگاه آلونی در استان چهارمحال و بختیاری با استفاده از توابع مفصل ارشمیدسی می‌باشد.

مواد و روش‌ها

منطقه مورد مطالعه

استان چهارمحال و بختیاری با گستره‌ای برابر با ۱۶۴۲۱ کیلومتر مربع یک درصد از کل وسعت کشور ایران را به خود اختصاص داده است. این استان از جمله بخش‌های کوهستانی فلات مرکزی ایران محسوب می‌شود که در عرض شمالی ۳۱ درجه و ۹ دقیقه تا ۳۲ درجه و ۳۸ دقیقه و طول شرقی ۴۹ درجه و ۳۰ دقیقه تا ۵۱ درجه و ۲۶ دقیقه گریونیچ قرار دارد. این استان از شمال و شرق به استان اصفهان، از غرب به استان خوزستان، از جنوب به استان کهگیلویه و بویراحمد و از سوی شمال غربی به استان لرستان محدود می‌شود (شکل ۱). بر اساس طبقه‌بندی اقلیمی این استان به پنج منطقه اقلیمی سرد، مرطوب، خیلی مرطوب و سرد کوهستانی، نیمه مرطوب گرم، نیمه مرطوب سرد و نیمه خشک سرد تقسیم می‌شود (طبقه‌بندی آمبرژه). بخش خانمیرزا در جلگه سبز

^۱ Dodangeh



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی منطقه مورد مطالعه و ایستگاه آلونی

جدول ۱. توزیع‌های فراوانی رایج در هیدرولوژی

نام توزیع (نام اختصاری)	تابع توزیع تجمعی (CDF)	پارامترهای توزیع
نمایی (exp)	$F(x) = 1 - e^{-(x-\xi)/\alpha}$	ξ : location, α : scale
گاما (Gam)	$F(x) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt$	α : shape, β : scale
مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV)	$F(x) = \exp(-\exp(k^{-1} \ln(-\frac{k(x-\xi)}{\alpha})))$	k : shape, α : scale, ξ : location
لوگ لجستیک تعمیم یافته (GLO)	$F(x) = \frac{1}{1 + \exp(k^{-1} \ln(1 - \frac{k(x-\xi)}{\alpha}))}$	k : shape, α : scale, ξ : location
نرمال تعمیم یافته (GNO)	$F(x) = \phi(-k^{-1} \ln(1 - \frac{k(x-\xi)}{\alpha}))$	k : shape, α : scale, ξ : location
پارتوی تعمیم یافته (GPA)	$F(x) = 1 - \exp(-k^{-1} \ln(1 - \frac{k(x-\xi)}{\alpha}))$	k : shape, α : scale, ξ : location
گامبل (Gum)	$F(x) = e^{-e^{-\frac{(x-\xi)}{\alpha}}}$	ξ : location, α : scale
لوگ نرمال سه پارامتری (LN3)	$F(x) = \phi(\frac{\ln(x-\zeta) - \mu}{\sigma})$	ζ : lower bound, μ : mean, σ : standard deviation
پیرسون تیب سه (PE3)	$F(x) = \frac{\int_0^{\frac{x-\zeta}{\beta}} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt}{\Gamma(\alpha)}$	β : scale, α : shape, ζ : lower bound
ویبول (Wei)	$F(x) = 1 - \exp(-(\frac{x-\zeta}{\beta})^\delta)$	β : scale, δ : shape, ζ : location

(Maeng, et al., 2017)

تعیین توزیع حاشیه‌ای

به منظور تعیین توزیع حاشیه‌ای برتر برای داده‌های شدت، مدت و عمق بارندگی، ابتدا توزیع‌های رایج در هیدرولوژی (جدول ۱) به استناد مطالعات صورت گرفته در دنیا (شامل توزیع‌های نرمال، لوگ نرمال، لوگ نرمال سه پارامتری، گاما، نمایی، بتا، لوگ پیرسون تیپ ۳، گامبل، مقادیر حدی تعمیم یافته، پواسون، پارتوی تعمیم یافته، لوگ لجستیک تعمیم یافته و ویبول) بر سه مشخصه بارندگی برازش داده شد (Maeng, et al., 2017; Khani Ayantobo, et al., 2019; temeliyeh et al., 2020). سپس مقادیر احتمال به دست آمده از هر کدام از توزیع‌ها با مقادیر متناظر احتمال تجربی با استفاده از معیارهای نکونی برازش با آزمون کولموگروف-اسمیرنوف بررسی شد. بر این اساس هر توزیعی که مقدار آماره آن کمتر و مقدار p قابل قبولی داشت ($p > 0.05$) به عنوان توزیع با برازش مناسب بر روی داده‌های مورد نظر تعیین شد.

تئوری اسکالر و توابع مفصل

طبق قضیه (Sklar (1959)، چنانچه X و Y دو متغیر تصادفی وابسته با تابع توزیع دومتغیره F_{XY} و توابع حاشیه-

ای F_X و F_Y باشند، آنگاه تابع مفصل دو متغیره C به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (1)$$

به بیان دیگر، برای توابع توزیع مفروض و پیوسته F_X و F_Y تابع مفصل (C) توزیع F_{XY} یک تابع توزیع دومتغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای F_X و F_Y خواهد بود رابطه (۲). با فرض اینکه توابع توزیع حاشیه‌ای پیوسته و دارای چگالی تک متغیره f_X و f_Y باشند، تابع چگالی مفصل به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود:

$$f(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y) \quad (2)$$

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \quad 0 < u, v \leq 1 \quad (3)$$

که در این روابط، u و v به ترتیب مقادیر احتمال حاشیه‌ای متغیرهای X و Y می‌باشند و c تابع چگالی دو متغیره مفصل می‌باشد که از مشتق جزئی تابع توزیع مفصل نسبت به دو متغیر حاصل می‌شود. در این پژوهش برازش ده تابع مفصل مختلف بر مشخصه‌های بارش ایستگاه آلونی مورد بررسی قرار گرفت که روابط مربوط به آنها در جدول (۲) ارائه شده است.

جدول ۲. روابط توابع مفصل بکار گرفته شده در این تحقیق

نام تابع مفصل	تابع توزیع تجمعی مفصل
علی - میخائیل - حق	$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, -1 \leq \theta \leq 1$
گلامبوس	$C(u, v) = uv \exp\{[-(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{\frac{1}{\theta}}\}, \theta \geq 0$
گامبل - هوگارد	$C(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}\}, \theta \geq 1$
کلایتون	$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \theta \geq 0$
پلاکت	$C(u, v) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}, \theta \geq 0$
فرانک	$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \theta \neq 0$
فیلیپ - گامبل	$C(u, v) = u + v - 1 + \exp\{-[(-\ln(1-u))^a + (-\ln(1-v))^a]^{1/a}\}, a \geq 1$
فارلی - گامبل - مورگن اشترن	$C(u, v) = uv [1 + \theta(1-u)(1-v)], -1 \leq \theta \leq 1$
گامبل - بارنت	$C(u, v) = uv \exp(-\theta \ln u \ln v), \theta \in [0, 1]$
جونئی	$C(u, v) = uv [1 + \theta(1-u)(1-v)], -1 \leq \theta \leq 1$

(Nelsen, 2006)

θ : پارامتر وابستگی تابع مفصل، $C(u, v)$: تابع چگالی احتمال مفصل، u, v : توزیع حاشیه‌ای متغیرها (CDF)

تئوری و تجربی استفاده شد (Nash and Sutcliffe, 1970)؛
(Akaike, 1974).

$$AIC = -2 * LnML + 2 * K \quad (7)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Cp(i) - Ce(i)]^2} \quad (8)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_p(i) - C_e(i))^2}{\sum_{i=1}^n (C_e(i) - \bar{C}_e)^2} \quad (9)$$

در روابط فوق، n تعداد نمونه، C_p مقادیر محاسبه شده مفصل پارامتری، C_e مقادیر مشاهداتی احتمالی به دست آمده از مفصل تجربی، \bar{C}_e میانگین مقادیر مشاهداتی احتمالی به دست آمده از مفصل تجربی، $lnML$ حداکثر تابع لگاریتم درست نمائی و k برابر است با تعداد پارامترهای مستقل اصلاح شده می‌باشند. C تعداد جفت-های هماهنگ و D تعداد جفت‌های ناهماهنگ و di نشان‌دهنده اختلاف رتبه‌ها است. مقدار شاخص AIC می‌تواند بین منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت باشد.

آماره‌ی کرامر-ون-میسز^۲ (S_n بر مبنای مفصل تجربی)

این روش توسط (Kojadinovic and Yan (2010) ارائه شده که روشی دقیق و با کارایی بالا می‌باشد. آزمون شامل مقایسه فاصله بر مبنای رتبه بین مفصل تجربی $C_n(\cdot)$ و مفصل‌های خانواده‌ی پارامتری برآورد شده $C_\theta(\cdot)$ می‌باشد (رابطه ۱۰).

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left\{ C_n \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) - C_{\theta_n} \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\}^2 \quad (10)$$

که در آن، C_n تابع مفصل تجربی ناپارامتری به صورت رتبه‌ای می‌باشد که با رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود:

$$C_n(u, v) = \sum_{i=1}^n I \left\{ \left(\frac{R_i}{n+1} \leq u, \frac{S_i}{n+1} \leq v \right) \right\} = I(A) u, v \in [0, 1] \quad (11)$$

این مفصل‌ها معیارهای احتمالی تجمعی توأم رتبه‌ای می‌باشند. برای نمونه‌ای با اندازه n ، مفصل تجربی دوبردی شدت و مدت بارندگی یا هر دو متغیر دیگر به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌گردند که در آن، $I(A)$ شمارنده تعداد دفعات برقراری تابع (A) می‌باشد. بر این اساس مقدار p مربوط به آزمون نکوئی برازش به صورت رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود. این مقدار p جهت طبقه‌بندی

مراحل بررسی ساختار وابستگی و انتخاب مفصل برتر

از آنجائی که شرط استفاده از توابع مفصل وجود همبستگی بین متغیرهاست، لذا در این پژوهش جهت تعیین مفصل برتر ابتدا با استفاده از روابط تاو کندال (رابطه ۴) و راو اسپیرمن (رابطه ۵) ساختار وابستگی بین مشخصه‌های بارش بررسی گردید (Khani temeliyeh et al., 2020; Ayantobo et al., 2019). سپس به برازش توابع توزیع حاشیه‌ای برتر بر مشخصه‌های بارش پرداخته شد. چنانچه توابع توزیع حاشیه‌ای هر یک از متغیرها به درستی انتخاب نشوند، این امر باعث ایجاد اربیی در تخمین پارامترهای توابع مفصل می‌شود. بنابراین برای اینکه تخمین پارامتر وابستگی تابع مفصل (θ) متأثر از توابع توزیع حاشیه‌ای نباشد، از روش تعدیل یافته برآوردگر بیشینه درست نمایی (MLE) یعنی حداکثر شبه درست نمائی^۱ (PML) (رابطه ۶) استفاده می‌شود (Requena et al., 2013). در این روش، توابع حاشیه‌ای تجربی به جای توابع حاشیه‌ای پارامتری بکار می‌روند (Dupuis, 2007; Joe, 2014). تخمین پارامتر با استفاده از روش حداکثر شبه درست نمائی بر اساس بیشینه کردن تابع چگالی احتمال توأم (رابطه ۶) نسبت به تمامی پارامترها انجام می‌شود (Cherubini et al., 2004):

$$\tau_c = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (4)$$

$$\rho_c = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \quad (5)$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ c_\theta \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\} \quad (6)$$

که در آن، c_θ تابع چگالی احتمال مفصل C_θ می‌باشد. R_i رتبه x_i در میان (x_1, \dots, x_n) ، S_i رتبه y_i در میان (y_1, \dots, y_n) و n طول داده‌های مشاهداتی است. در مرحله بعد، جهت تعیین تابع مفصل برتر از معیارهای نکوئی برازش اطلاعات آکائیکه (AIC) (رابطه ۷)، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) (رابطه ۸) و ضریب نش-ساتکلیف (NSE) (رابطه ۹) برای مقایسه مقادیر مفصل

² Cramér-von Mises

¹ Pseudo-Maximum Likelihood

نتایج و بحث

تحلیل وابستگی و آزمون نکوئی برازش

جهت تحلیل چند متغیره (دو، سه و چهار متغیره) بارندگی لازم است که ابتدا همبستگی بین مشخصه‌های بارندگی (شدت، مدت و عمق) بررسی گردد. در این تحقیق، پس از استخراج رخدادهای بارندگی از بین ۷۶۳ رویداد، تعداد ۱۴۱ رویداد که منجر به وقوع سیلاب می‌شوند (شدت بارش بیش از ۵ میلی‌متر بر ساعت بود)، برای تحلیل دومتغیره انتخاب شدند. سپس مشخصه‌های بارندگی، شامل مدت، شدت و عمق بارندگی برای هر رویداد محاسبه شد. از آنجائی که شرط استفاده از توابع مفصل وجود همبستگی بین متغیرها می‌باشد، در این مطالعه از ضریب همبستگی پیرسون، تاو کندال و آماره راو اسپیرمن برای بررسی همبستگی بین مشخصه‌های بارندگی ارائه شده در جدول ۱ استفاده شد. بر این اساس مشخصه‌هایی که دارای بیشترین ضرایب همبستگی مثبت و یا منفی بودند، مشخص گردید. بیشترین میزان همبستگی بین مدت بارندگی و عمق آن معادل ۰/۸۶ و سپس شدت بارندگی و عمق آن معادل ۰/۷۴ به‌دست آمد. از سوی دیگر، همبستگی بین شدت و مدت بارندگی معادل ۰/۵۶- به‌دست آمد که نشان‌دهنده همبستگی معکوس این دو متغیر می‌باشد (طبیعی است که هرچه شدت بارندگی بیشتر باشد، مدت آن کمتر است و بالعکس) نتایج این بخش در جدول ۴ ارائه شده است. در مرحله بعد، توابع توزیع حاشیه‌ای رایج در هیدرولوژی (جدول ۱) بر مشخصه‌های بارندگی (شدت، مدت و عمق) برازش داده شد. برای تعیین بهترین توزیع حاشیه‌ای، مقادیر احتمال تئوری توزیع‌های مذکور با مقادیر متناظر احتمال تجربی مقایسه گردید. برای این منظور از دو آزمون کولموگروف-اسمیرنوف و اندرسون-دارلینگ در سطح اطمینان ۹۵٪ استفاده شد که نتایج حاصل در جدول (۵) ارائه شده است. بر این اساس تابع توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV) به‌عنوان تابع توزیع برتر بر هر سه مشخصه بارندگی (شدت، مدت و عمق) تعیین گردید که پارامترهای مربوط به این توزیع k ، μ ، σ در جدول (۳) ارائه شده است.

توابع مفصل به‌منظور تأیید یا رد آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد (Ayantobo et al., 2019; Salvadori, and Michele. 2011).

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n S_n^k \geq S_n \quad (12)$$

دوره بازگشت و احتمال توأم

اگر X یک متغیر تصادفی باشد، در این صورت تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ برابر است با مقدار احتمالی که X کوچکتر یا مساوی مقداری ممکن x یعنی $F_X(x) = p[X \leq x]$ باشد. در این صورت احتمال رخداد X بیشتر از x برابر است با:

$$F'_X(X) = 1 - F_X(X) \quad (13)$$

در این صورت دوره بازگشت در حالت تک متغیره برای وقایع $X \geq x$ ، بیانگر متوسط فاصله زمانی بین رخداد $X \geq x$ که عکس احتمال وقوع می‌باشد (Yue and Rasmussen, 2002).

$$T_X(x) = \frac{1}{F'_X(X) = 1 - F_X(X)} \quad (14)$$

در این تحقیق، مقادیر دوره بازگشت دومتغیره در دو حالت «و» $T_{X,Y}^{\wedge}$ و «یا» $T_{X,Y}^{\vee}$ محاسبه گردید که با روابط (۱۵) و (۱۶) بیان می‌شوند:

$$T_{X,Y}^{\wedge} = \frac{E(I)}{P(X > x \wedge Y > y)} = \frac{E(I)}{1 - F(x) - G(y) + C(F(x), G(y))} \quad (15)$$

$$T_{X,Y}^{\vee} = \frac{E(I)}{P(X > x \vee Y > y)} = \frac{E(I)}{1 - C(F(x), G(y))} \quad (16)$$

در تعریف دوره بازگشت $T_{X,Y}^{\wedge}$ متغیرهای تصادفی X و Y هر دو از آستانه x و y بیشتر هستند و برای حالت $T_{X,Y}^{\vee}$ یکی از متغیرهای تصادفی X یا Y از آستانه تصادفی X و Y بیشتر هستند. $E(I)$ به معنی میانگین فاصله زمانی بین آغاز دو رویداد متوالی است که برای رویدادهای حداکثر سالانه برابر یک در نظر گرفته می‌شود. x و y مقادیر حد آستانه برای دو متغیر حاشیه‌ای شدت و عمق بارندگی و یا هر دو متغیر دیگر می‌تواند باشد که در آن $F(x)$ و $G(y)$ مقادیر توابع توزیع حاشیه‌ای آنها می‌باشند (Requena et al., 2013).

جدول ۳. مشخصات آماری مشخصه‌های بارندگی

عمق بارندگی (D) (mm)	مدت بارندگی (T) (hr)	شدت بارندگی (I) (mm/hr)	
۰/۳۳	۰/۰۹	۰/۸۷	پارامتر شکل (K)
۱۱/۶۵	۲/۳۷	۰/۹۵	پارامتر مقیاس (σ)
۱۳/۸۵	۲/۹۹	۳/۹۸	پارامتر موقعیت (μ)
۲۴/۵۷	۴/۵۹	۶/۱۳	میانگین
۲۰/۸۵	۳/۳۹	۶/۱۵	انحراف معیار
۳/۱۰	۴/۳۸	۶/۳۲	ضریب کشیدگی
۱/۶۹	۱/۵۸	۴۸/۵۳	ضریب چولگی
۱۱۴/۷	۲۳/۵	۶۶	مقدار بیشینه
۱/۲	۰/۰۳	۳/۰۲	مقدار کمینه

جدول ۴. ماتریس ضرایب همبستگی بین مشخصه‌های بارش

متغیر	عمق بارندگی (D)	شدت بارندگی (I)	مدت بارندگی (T)
D	×		
I	۰/۷۴	×	
T	۰/۸۶	-۰/۵۶	×

جدول ۵. نتایج آزمون نیکویی برازش توزیع‌های رایج در هیدرولوژی

با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف در سطح معنی‌داری ۰/۰۵٪.

توزیع متغیر	عمق بارندگی (D)	مدت (T)	شدت (mm/h)
Beta	۰/۱۳۲	۰/۰۷۴	۰/۳۷۳
Exp	۰/۴۲۲	۰/۲۰۷	۰/۱۵۶
Gamma (3P)	۰/۰۴۳	۰/۰۷۵	۰/۱۱۴
Gama	۰/۰۴۸	۰/۰۷۳	۰/۳۸۹
Gen Gama	۰/۰۵۷	۰/۰۸۷	۰/۲۳۳
Gen Pareto	۰/۰۵۱	۰/۰۸۷	۰/۰۵۱
GEV	۰/۰۴۳	۰/۰۵۹	۰/۰۴۸
Log-normal3	۰/۰۴۶	۰/۰۷۴	۰/۱۲۶
Log-Pearson3	۰/۰۴۶	۰/۰۸۷	۰/۰۹۳
Normal	۰/۱۵۸	۰/۱۳۱	۰/۳۰۶
Pareto	۰/۳۴۳	۰/۴۲۶	۰/۰۸۰
Wakeby	۰/۰۴۳	۰/۰۶۷	۰/۰۴۸
Wiebull	۰/۰۵۱	۰/۰۷۹	۰/۱۸۱

هوگارد، پلاکت، فیلیپ-گامبل، جو و گامبل-بارنت مورد بررسی قرار گرفت و برای هر جفت از مشخصه‌های بارندگی تابع مفصل مناسب انتخاب گردید. لازم به ذکر است جهت انتخاب توابع مفصل برای ایجاد توزیع توأم

بعد از انتخاب توزیع حاشیه‌ای برتر، به منظور ایجاد تابع توزیع تجمعی (CDF) دو متغیره، برازش ده تابع مفصل شامل کلایتون، علی-میخائیل-حق، فارلی-گامبل-مورگن اشترن، فرانک، گالامبوس، گامبل-

نزدیک‌تر باشد، بیانگر کارایی بهتر مفصل موردنظر است که در این تحقیق ضرایب نش- ساتکلیف به‌دست آمده در محدوده مناسب قرار دارند. نتایج حاصل از معیارهای نکوئی برازش و پارامتر وابستگی تنا (θ) تخمین زده شده برای هر تابع مفصل در جداول (6) و (7) ارائه شده است. بر این اساس تابع مفصل جو به‌عنوان تابع مفصل برتر بر جفت داده‌های شدت و مدت بارندگی شناخته شد (مقادیر حداکثر درست نمائی منفی می‌باشد). پس از آن، توابع مفصل گالامبوس، گامبل- هوگارد و کلاپتون در رتبه بعدی قرار گرفتند. برای جفت داده‌های شدت و عمق بارندگی تابع مفصل جو به‌عنوان تابع مفصل برتر شناخته شد. پس از آن، توابع مفصل فارلی- گامبل- مورگن اشترن، گامبل- بارنت و فیلیپ- گامبل در رتبه بعدی قرار گرفتند. برای جفت داده‌های مدت و عمق بارندگی، تابع مفصل فارلی- گامبل- مورگن- اشترن به‌عنوان تابع مفصل برتر شناخته شد و پس از آن به ترتیب توابع مفصل فیلیپ- گامبل، جو و گامبل- هوگارد در رتبه‌های بعدی قرار گرفتند.

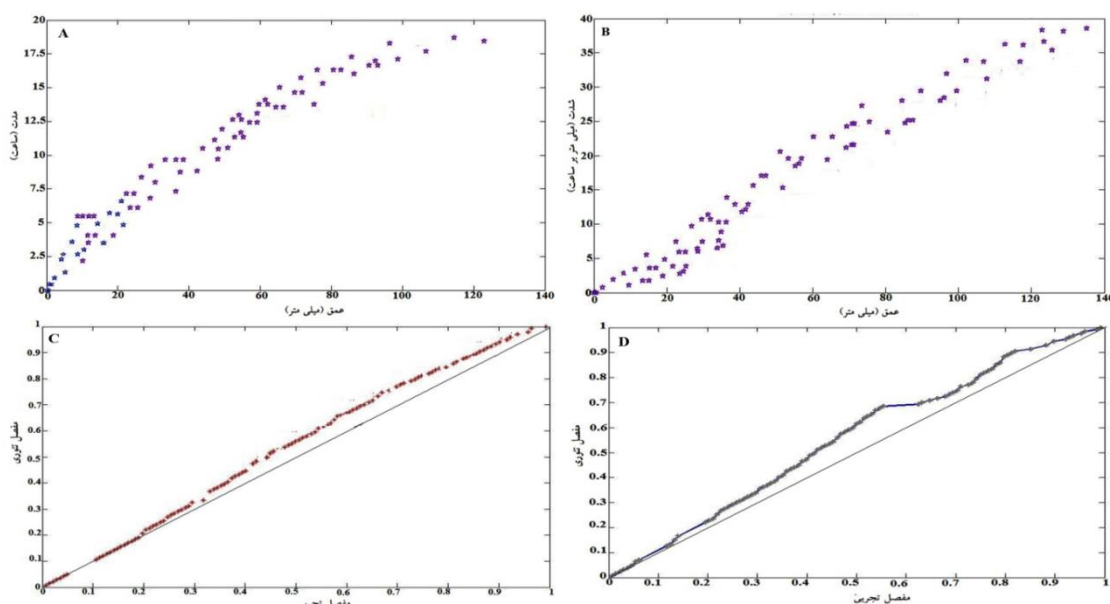
لازم است که دامنه مجاز تاو کندال آنها مورد توجه قرار گیرد. به‌عنوان مثال، تابع مفصل علی- میخائیل- حق فقط در دامنه $0.3333 \leq \tau \leq 0.1807$ - قابلیت کاربرد دارند، با توجه به اینکه تاو کندال این مفصل در دامنه مذکور قرار نگرفته است برای آزمون نکوئی برازش مشخصه‌های بارش کنار گذاشته شد. جهت تعیین تابع مفصل برتر به استناد مطالعات صورت گرفته (Ayantobo et al., 2019؛ Mirabbasi et al., 2020؛ Khani temeliyeh et al., 2012) از شاخص آکائیکه (AIC)، ضریب نش- ساتکلیف (NSE)، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)، مقدار حداکثر درست نمائی و آماره کرامر فن مایسس (Sn) استفاده گردید. بر این اساس هر تابع مفصلی که بیشترین مقدار حداکثر درست نمائی (ML) یا کمترین میزان AIC، RMSE و Sn را داشته باشد، به‌عنوان تابع مفصل برتر شناخته می‌شود (در صورتیکه مقدار آماره p بالاتر از 0/05 باشد بیانگر برازش بهتر آن مفصل بر داده‌های مورد نظر می‌باشد به‌عنوان مثال برای داده‌های شدت و عمق بارندگی برای مفصل جو مقدار آماره 0/065 به‌دست آمد). همچنین ضریب نش- ساتکلیف هر چقدر به یک

جدول 6. نتایج معیارهای نکوئی برازش توابع مفصل مورد بررسی در این تحقیق

متغیر	شدت- مدت	عمق- مدت	عمق- شدت	مدت- شدت	عمق- مدت	عمق- شدت	مدت- شدت	شدت- مدت	عمق- مدت	عمق- شدت	مدت- شدت
تابع مفصل	RMSE	NSE	AIC	RMSE	NSE	AIC	RMSE	NSE	AIC	RMSE	NSE
کلاپتون	0/13	0/09	0/10	0/63	0/86	0/73	0/10	0/09	0/13	0/09	0/10
فارلی- گامبل- مورگن اشترن	0/09	0/09	0/06	0/81	0/85	0/82	0/06	0/09	0/09	0/06	0/81
فرانک	0/08	0/10	0/10	0/84	0/84	0/72	0/10	0/08	0/08	0/10	0/84
گالامبوس	0/13	0/14	0/10	0/63	0/71	0/73	0/10	0/13	0/13	0/10	0/63
گامبل- هوگارد	0/13	0/10	0/10	0/63	0/85	0/73	0/10	0/13	0/13	0/10	0/63
پلاکت	0/08	0/10	0/08	0/84	0/85	0/75	0/08	0/08	0/08	0/10	0/84
فیلیپ- گامبل	0/13	0/14	0/10	0/63	0/71	0/72	0/10	0/13	0/13	0/10	0/63
جوئی	0/08	0/09	0/10	0/84	0/87	0/82	0/10	0/08	0/08	0/10	0/84
گامبل- بارنت	0/08	0/09	0/06	0/84	0/87	0/82	0/06	0/08	0/08	0/10	0/84

جدول ۷. مقادیر پارامتر وابستگی تابع مفصل تخمینی با روش حداکثر درست‌نمایی (ML) و آماره کرامر فن مایسس (Sn)

متغیر	شدت - مدت	شدت - عمق	شدت - مدت	شدت - عمق	شدت - مدت	شدت - عمق	شدت - مدت	شدت - عمق	تابع مفصل
	Sn	ML	Teta						
کلایتون	۰/۰۲۹	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸	-۸۶۳/۶۷	-۸۹۸/۱۴	-۳۹۹/۳۷	۳/۵۸	۰/۴۴	۱۹/۹۹
فارلی - گامبل - مورگن اشترن	۰/۰۱۴	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	-۷۴۵/۲۳	-۸۰۳/۴۷	-۵۵۲/۴۲	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۹۹
فرانک	۰/۰۲۷	۰/۰۱۹	۰/۰۰۷	-۸۶۶/۲۷	-۸۹۱/۳۳	-۶۳۶/۳۸	۱۰/۵۸	۲/۵۸	۰/۰۹
گلامبوس	۰/۰۲۹	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸	-۸۶۰/۹۹	-۸۹۵/۷۳	-۳۷۳/۱۱	۲/۴۱	۱۹/۹۹	۱۹/۹۹
گامبل - هوگارد	۰/۰۲۹	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸	-۸۶۰/۱۸	-۸۹۲/۶۱	-۳۷۳/۶۹	۳/۱۲	۱/۳۱	۱۹/۹۹
پلاکت	۰/۰۲۱	۰/۰۱۴	۰/۰۰۷	-۸۶۲/۸۴	-۸۹۶/۷۵	-۶۳۶/۳۸	۱۹/۹۹	۳/۴۲	۱/۰۴
فیلیپ - گامبل	۰/۰۲۹	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸	-۸۳۰/۷۵	-۸۵۰/۷۵	-۴۴۵/۰۴	۳/۳۸	۱۹/۹۹	۱۹/۹۹
جو	۰/۰۲۹	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸	-۸۵۳/۸۳	-۷۰۳/۳۵	-۳۷۲/۰۶	۱	۱	۱
گامبل - بارنت	۰/۰۱۸	۰/۰۱۱	۰/۰۰۷	-۸۶۷/۰۸	۸۰۸/۵۲	-۵۳۸/۶۷	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۶



شکل ۲. نمودار پراکنش مقادیر عمق بارندگی در برابر مدت و شدت بارندگی (A,B) و مقادیر مشاهداتی شده مفصل تجربی در برابر مفصل تئوری جو و فارلی گامبل مورگن اشترن (C,D) برای ایستگاه آلونی

تئوری در اغلب نقاط مقادیر بیش برآورد^۱ داشته است، ولی در کل بر اساس معیارهای کمی ارائه شده در جداول (۶) و (۷)، برازش قابل قبول است.

احتمالات توأم و شرطی

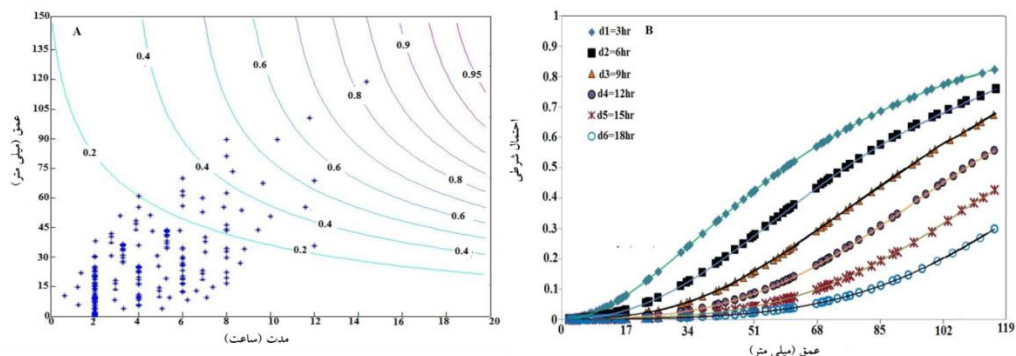
یکی از مفاهیم کاربردی قابل محاسبه با توابع مفصل، احتمال توأم می‌باشد. از جمله کاربردهای احتمال توأم می‌توان به برآورد ریسک خشکسالی، ریسک سیلاب و

در شکل (A-۲) و (B-۲) هاله ابری داده‌های مشاهداتی عمق در برابر مدت و شدت بارندگی ارائه گردیده است. همچنین در شکل (C-۲) و (D-۲) تابع مفصل تجربی در برابر تابع مفصل تئوری جو و فارلی گامبل مورگن اشترن ترسیم شده است. هرچه نقاط مذکور (به شکل ستاره) به نیمساز ۴۵ درجه نزدیک‌تر باشند، نشان‌دهنده برازش بهتر تابع مفصل انتخابی بر داده‌های مشاهداتی است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود مفصل

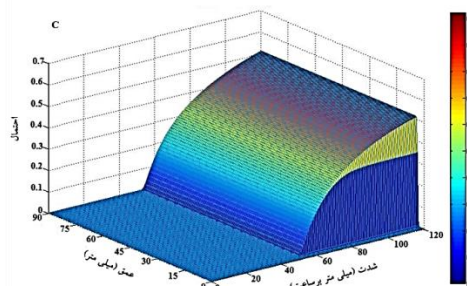
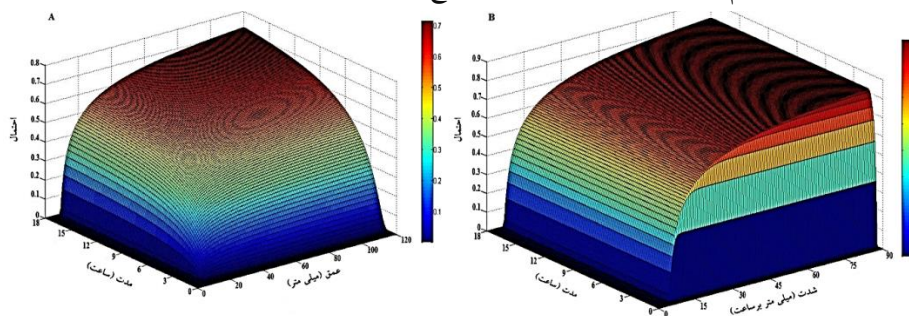
1 Over-estimation

مختلف در برابر تداوم‌های مختلف بارندگی است. در این مطالعه، احتمال شرطی عمق‌های مختلف بارندگی در تداوم‌های مختلف (۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵ و ۱۸ ساعت) با استفاده از تابع مفصل برتر محاسبه و در شکل (B-۳) ترسیم شده است. برای مثال، به شرط وقوع بارندگی با مدت زمان ۱۵ ساعت، عمق بارندگی با احتمال ۰/۲ برابر ۵۱ میلی‌متر خواهد بود. بدیهی است که با افزایش زمان این میزان عمق برای سطوح مختلف احتمالاتی بیشتر می‌شود که این موضوع به نوبه خود مؤید این مطلب است که با افزایش مدت بارندگی، شدت آن کاسته می‌شود و بالعکس. از نمودارهای احتمال شرطی می‌توان در طراحی برنامه‌های مقابله با سیلاب و برنامه‌ریزی منابع آب حوضه استفاده نمود.

ریسک سیستم‌های هشدار در مدیریت به‌هنگام سیستم‌های منابع آب اشاره کرد (رضایی و همکاران، ۱۳۹۹؛ Yue and Rasmussen, 2002). از آنجائی که ترکیبات مختلف مشخصه‌های بارندگی می‌توانند منجر به احتمال توأم مشابهی شوند، لذا مقادیر احتمال توأم (هم‌زمان) هر دو متغیر با خطوط کنتور نشان داده می‌شود. شکل (A-۳) خطوط کنتور مدت بارندگی در مقابل عمق آن را برای سطوح مختلف احتمالاتی نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال، در زمان بارندگی‌های سیل آسا زمانی که مدت بارندگی ۸ ساعت و خط احتمال ۰/۲ باشد عمق بارندگی تقریباً ۴۵ میلی‌متر خواهد بود. مفهوم کاربردی دیگر که با استفاده از توابع مفصل می‌توان استخراج نمود، احتمال وقوع شرطی مشخصه‌های باران است که با در نظر گرفتن تداوم‌های مختلف برای عمق‌های مختلف و یا بالعکس عمق‌های



شکل ۳. خطوط کنتور احتمال توأم مدت-عمق بارندگی (A) و توزیع شرطی عمق باران به ازای مقادیر مختلف مدت بارندگی (B)



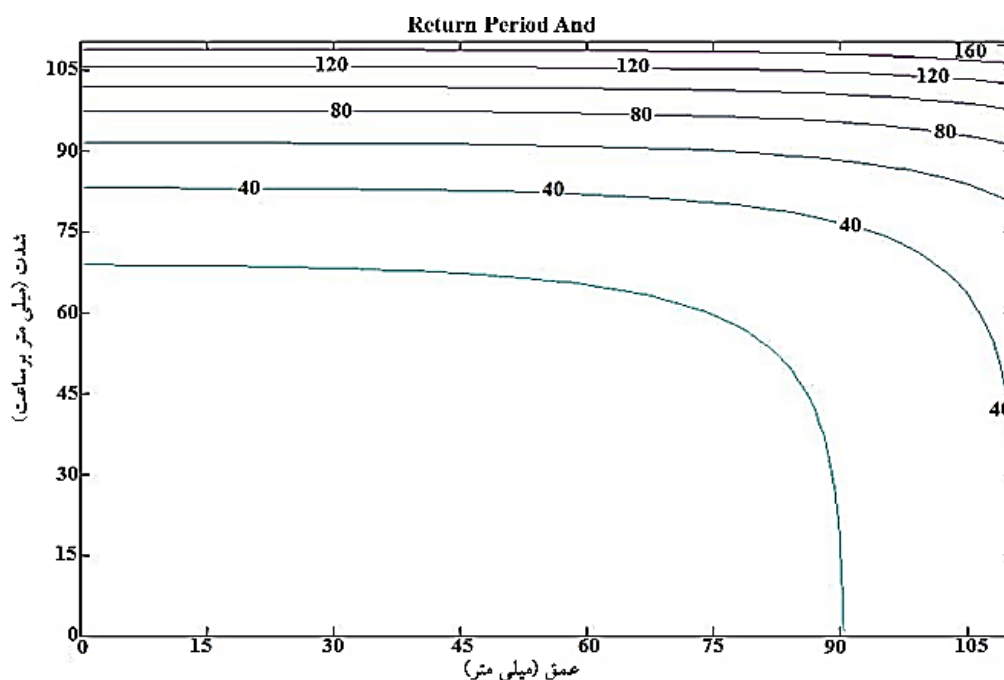
شکل ۴. نمایش سه‌بعدی مشخصه‌های بارندگی ایستگاه آلونی برای سطوح مختلف احتمالاتی با استفاده از تابع مفصل جو

بارندگی و انتخاب تابع مفصل برتر برای ایجاد توزیع دومتغیره، دوره بازگشت دومتغیره در دو حالت عطفی (and) «و» فصلی (or) «یا» محاسبه و منحنی‌های کنتور آنها برای حالت عطفی در شکل (۵) ارائه شده است. از آنجائی که برای محاسبه دوره بازگشت برای حالت «و» از تابع توزیع‌های حاشیه‌ای (CDF) تک متغیره استفاده می‌شود و از طرفی با توجه به اینکه مخرج کسر حاصل تفریق عدد یک از یک مقدار مشخص (حاصل جمع مقادیر توزیع حاشیه‌ای دو مشخصه) کسر می‌گردد، لذا مخرج کسر در مقایسه با حالتی که دوره بازگشت (or) «یا» می‌باشد، کوچک‌تر خواهد بود. به‌عنوان مثال، همان‌طور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود برای عمق بارندگی ۶۰ میلی‌متر و شدت بارندگی ۶۰ میلی‌متر در ساعت دوره بازگشت در حالت «و» کمتر از ۲۰ سال می‌باشد. بر اساس حالت «یا» برای همین مقدار شدت و عمق بارندگی میزان دوره بازگشت کمتر از ۱۰ سال (حدود ۶ سال) می‌باشد. سایر دوره بازگشت‌ها برای سایر مقادیر شدت و عمق بارندگی در شکل (۵) ارائه شده است.

در شکل (۴) حالات مختلف دو به دو مشخصه‌های بارندگی در برابر سطوح احتمال مختلف به‌صورت سه‌بعدی ارائه شده است. شکل (۴-A) تداوم-عمق بارندگی، شکل (۴-B) تداوم-شدت بارندگی و شکل (۴-C) عمق-شدت بارندگی در مقابل احتمال توأم رخداد آنها به‌صورت سه‌بعدی را نشان می‌دهند. از نقطه نظر هیدرولوژیکی در یک بارندگی با شدتی معین چنانچه مدت بارندگی زیاد باشد، احتمال اینکه عمق بارندگی زیاد باشد، بالاست و همچنین احتمال اینکه شدت بارندگی زیاد و مدت آن کم باشد، از لحاظ علمی قابل تائید است. به‌عنوان مثال، همان‌گونه که در شکل (۴-A) قابل مشاهده است، برای یک بارندگی ۱۸ ساعته با عمق ۱۲۰ میلی‌متر، میزان احتمال وقوع ۰/۷ می‌باشد. به‌طور مشابه می‌توان برای زوج‌های مختلف شدت، مدت و عمق بارندگی، مقدار احتمال توأم متناظر را از شکل (۴) به‌دست آورد.

دوره بازگشت توأم و شرطی

در این مطالعه، جهت محاسبه دوره بازگشت توأم، پس از تعیین توابع توزیع حاشیه‌ای (CDF) مشخصه‌های

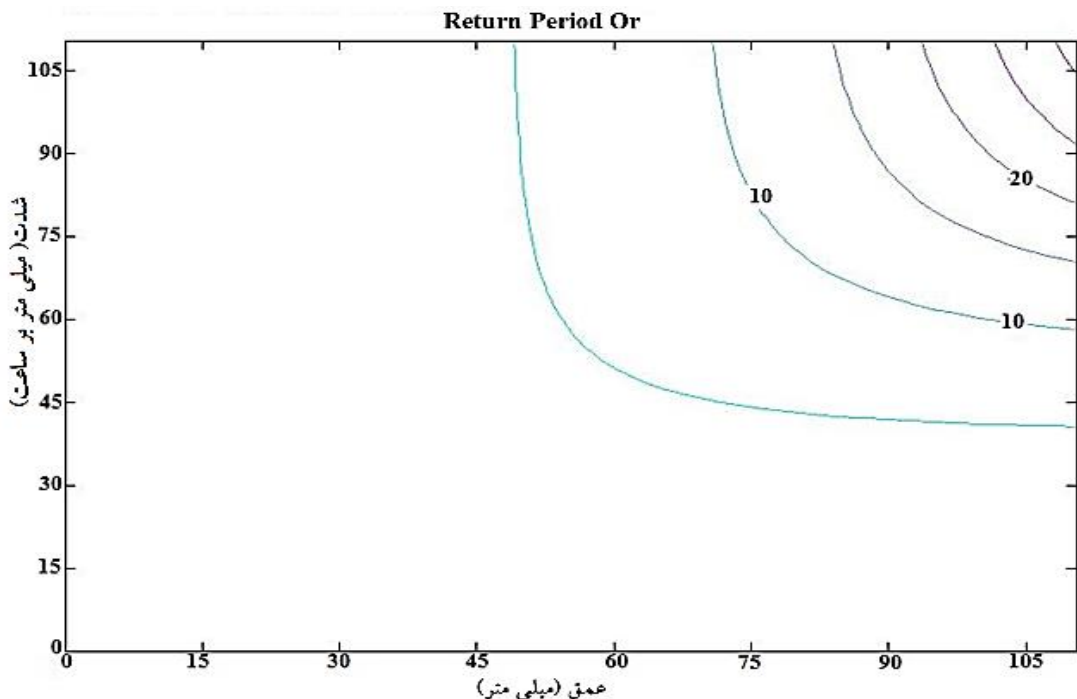


شکل ۵. دوره بازگشت توأم مشخصه‌های بارندگی در ایستگاه آلونی برای حالت عطفی «and»

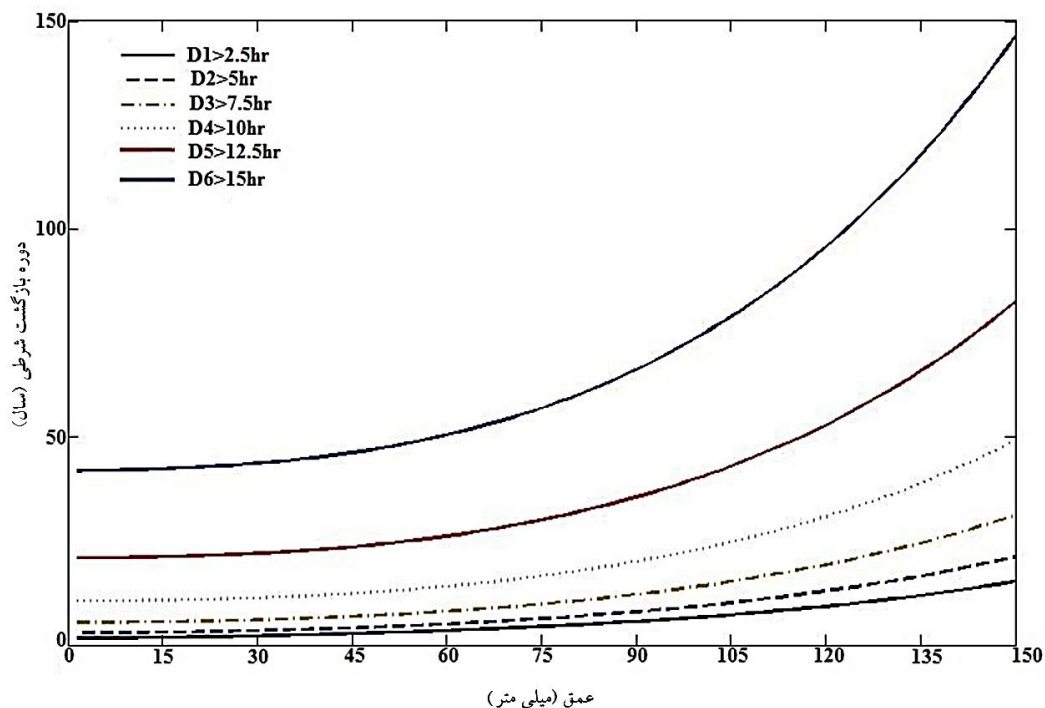
بارندگی ۱۲/۵ ساعت یا بیشتر باشد، عمق بارندگی ۷۵ میلی‌متر خواهد بود. مقادیر مربوط به سایر عمق‌های بارندگی و تداوم آنها برای دوره بازگشت‌های مختلف در شکل مذکور نشان داده شده است. لازم به ذکر است برای محاسبه دوره بازگشت شرطی مقدار $E(L)$ که بیانگر متوسط فاصله زمانی بین آغاز دو رویداد متوالی می‌باشد، برابر ۱ در نظر گرفته شده است (Requeuna, et al., 2013). به‌طور مشابه برای سایر زوج مشخصه‌های بارندگی می‌توان دوره بازگشت شرطی آنها را نیز ترسیم نمود. جهت مقایسه دوره بازگشت تک متغیره با دوره بازگشت شرطی مقادیر مربوط به توزیع حاشیه‌ای عمق بارندگی برای دوره بازگشت‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۵۰۰ ساله محاسبه و در جدول (۸) ارائه شده است. بر این اساس چنانچه عمق بارندگی ۵۹/۶ و ۶۳/۴ میلی‌متر باشد دوره بازگشت شرطی به ترتیب ۴۵ و ۵۵ ساله خواهد بود که دوره بازگشت تک متغیره متناسب با آنها ۵۰ و ۱۰۰ ساله خواهد بود.

بر اساس حالت «یا» شکل (۶) برای شدت ۶۰ میلی‌متر بر ساعت و عمق ۶۰ میلی‌متر میزان دوره بازگشت کمتر از ۱۰ سال (حدود ۶ سال) می‌باشد. همین‌طور مشاهده می‌شود که خطوط هم‌دوره بازگشت در دوره بازگشت‌های بالاتر به هم نزدیک‌تر می‌شوند. از آنجائی که طراحی سازه‌های هیدرولیکی برای دوره بازگشت‌های طولانی مقرون به‌صرفه نمی‌باشد، بنابراین بهتر است در پروژه‌هایی که از اهمیت کمتری برخوردارند، از دوره بازگشت در حالت «یا» استفاده گردد؛ اما در دوره بازگشت دومتغیره در حالت «و» وقوع هم‌زمان هر دو مشخصه از حد آستانه معین مطرح می‌باشد، لذا از لحاظ هیدرولوژیکی دوره بازگشت‌های آن طولانی‌تر است. بنابراین در پروژه‌های عمرانی طولانی مدت که از اهمیت بالایی برخوردارند و شکست پروژه ممکن است منجر به خسارات مالی و جانی وسیع شود، استفاده از دوره بازگشت در حالت «و» ارجح می‌باشد.

بر اساس دوره بازگشت شرطی شکل (۷)، به‌عنوان مثال، برای دوره بازگشت ۲۵ ساله به شرطی که مدت



شکل ۶. دوره بازگشت توأم مشخصه‌های بارندگی در ایستگاه آلونی برای دو حالت فصلی «or»



شکل ۷. دوره بازگشت شرطی عمق بارندگی به ازای تجاوز از مقادیر مختلف مدت بارندگی در ایستگاه آلونی

جدول ۸. مقایسه مقادیر دوره بازگشت تک متغیره با دوره بازگشت شرطی

دوره بازگشت تک متغیره	دوره بازگشت شرطی	عمق بارندگی (میلی متر)
۲	$T < 20$	۱۸/۶
۵	$T < 20$	۲۰/۱
۱۰	$T < 25$	۲۱/۸
۲۵	$T < 25$	۵۷/۱
۵۰	۴۵	۵۹/۶
۱۰۰	۵۵	۶۳/۴
۲۰۰	۷۵	۱۰۵
۵۰۰	۱۵۰	> ۱۰۵

نتیجه گیری

از ۷۶۳ رویداد بارش ثبت شده در دوره زمانی ۱۳۹۱-۱۳۶۵ تعداد ۱۴۱ رویداد که منجر به وقوع سیلاب می-شوند (شدت بارش بیش از ۵ میلی متر بر ساعت بود)، برای تحلیل دو متغیره انتخاب شدند. سپس توزیع های رایج در هیدرولوژی بر مشخصه های مذکور برآزش داده شد و توزیع برتر برای هر مشخصه با دو آزمون کولموگروف-اسمیرنوف تعیین گردید. نتایج نشان داده که برای هر سه مشخصه مورد بررسی، تابع توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV) بهترین برآزش را بر داده های

پدیده های هواشناسی و هیدرولوژیکی غالباً با مشخصات مختلف که با هم وابسته هستند، توصیف می شوند. از این رو تحلیل هم زمان مشخصه های آنها می-تواند نقش بسزایی در مطالعات هیدرولوژی و منابع آب و افزایش دقت طراحی ها داشته باشد. در این مطالعه، به تحلیل فراوانی دو متغیره مشخصه های بارندگی (شامل شدت، مدت و عمق بارندگی) برای ایستگاه آلونی در استان چهارمحال و بختیاری پرداخته شد. برای این منظور

در ایستگاه آلونی ۱۱۴/۷ میلی‌متر و مدت زمان آن ۱۴/۴۰ ساعت بوده است، با این مشخصه‌ها دوره بازگشت شرطی آن تقریباً ۵۰ ساله، برای حالت عطفی «and» این دوره بازگشت ۱۶۰ ساله و برای حالت فصلی «or» ۶۰ ساله می‌باشد. نتایج حاصل از دوره بازگشت‌های توأم و شرطی در این تحقیق کاربرد گسترده‌ای در مطالعات هیدرولوژی و منابع آب داشته که از جمله آنها می‌توان به تحلیل ریسک سیلاب، خشکسالی، عملیات آبخیزداری و مرتع داری اشاره کرد. همچنین از نتایج این مطالعه می‌توان برای طراحی سازه‌های آبی و برنامه‌ریزی منابع آب استفاده نمود. پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی روش‌های سه و چهار متغیره تحلیل مشخصه‌های بارندگی و سیلاب با استفاده از توابع مفصل تو در تو (روش nested) و همچنین توابع مفصل C-Vine و D-Vine بررسی گردد.

مشاهداتی دارد. در ادامه برازش ده تابع مفصل کلایتون، علی - میخائیل - حق، فارلی - گامبل - مورگن اشترن، فرانک، گالاموس، گامبل - هوگارد، پلاکت، فلیپ - گامبل، جو و گامبل - بارنت جهت ایجاد توزیع توأم متغیرهای بارندگی مورد آزمون قرار گرفت. بر اساس نتایج مقایسه مقادیر مفصل‌های تنوری با مقادیر متناظر احتمال توأم تجربی، تابع مفصل جو به عنوان تابع مفصل برتر برای ایجاد توزیع دومتغیره جفت مشخصه‌های شدت و عمق بارندگی و همچنین جفت مشخصه‌های شدت و مدت بارندگی شناخته شد و تابع مفصل فارلی - گامبل - مورگن اشترن برازش مناسب‌تری بر داده‌های مدت و عمق بارندگی داشت. در ادامه با استفاده از توابع مفصل برتر برازش یافته اطلاعات مفیدی نظیر احتمال توأم و شرطی و همچنین دوره بازگشت‌های توأم و شرطی استخراج گردید. بیشترین میزان عمق بارندگی ثبت شده

Reference:

- Abdollahi Asadabadi, S., akhond ali, A., Mirabbasi, R. (2018). Joint frequency analysis of rainfall characteristics using copula functions (Case study: Kasiliyan watershed). *Iranian journal of Ecohydrology*, 5(2), 497-509. [in Persian]
- Afsharypour, Z., Bahremand, A., Abdolhosseini, M. (2019). Bivariate frequency analysis of rainfall intensity and depth using copula functions (Case study: Chehelchai Watershed, GorganRoad, Golestan). *Irrigation and Water Engineering*, 9(2), 121-134. [in Persian]
- Akaike, H. 1974. A new look at Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19:716- 723.
- Ayantobo, O.O., Li Y. and Song, S. 2019. Copula-based trivariate drought frequency analysis approach in seven climatic sub-regions of mainland China over 1961–2013. *Theor Appl Climatol*. 137: 2217- 2237.
- Cherubini, U., E. Luciano, and W. Vecchiato. 2004. *Copula Methods in Finance*, John Wiley, Sons Ltd, England. 310p.
- De Michele, C. and Salvadori, G. 2003. A generalized Pareto intensity-duration model of storm rainfall exploiting 2-copulas, *Journal of Geophysical Research*, 108(D2), 4067.
- De Michele, C., Salvadori, G., Canossi, M., Petaccia A. and Rosso, R., 2005. Bivariate statistical approach to check adequacy of dam spillway. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(1): 50–57.
- Dodangh, E. Singh, V. P. Pham, B. T. Yin, J. Yang, G. and Mosavi, A. 2020. Flood frequency analysis of interconnected Rivers by copulas. *Water Resources Management: An International Journal*, Published for the European Water Resources Association (EWRA), 34(11), 3533-3549.
- Dupuis, D. J. 2007. Using copulas in hydrology: Benefits, cautions, and issues. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 381-393.
- Genest, C., Favre, A.C., Béliveau, J. and Jacques, C., 2007. Metaelliptical copulas and their use in frequency analysis of multivariate hydrological data. *Water Resources Research*, 43: W09401, doi:10.1029/2006WR005275.
- Goodarzi, M., Fatehifar, A., Khaseh, A., Mahmoudvand, M. (2020). Bivariate Flood Frequency Analysis Using the Copula Archimedean Function (Gumbel–Hougaard). *Watershed Management Research Journal*, 33(3), 20-35. [in Persian]
- Joe, H. 2014. *Dependence modeling with copulas*. CRC press, 459 pp.
- Khani temeliyeh, Z., Rezaie, H., Mirabbasi, R. (2020). Application of the Nested Copula Functions for Analysis of Four variate of Meteorological Droughts (Case Study: West of Iran). *Journal of Water and Soil Resources Conservation*, 10(1), 93-112. [in Persian]

- Khanitemeliyeh, Z., Rezaie, H., Mirabbasi, R. (2020). Frequency Analysis of Trivariate Drought characteristics Properties Using Nested Copula Functions (Case Study: Eastern Iran). *Iran-Water Resources Research*, 16(2), 202-213. [in Persian]
- Kojadinovic, I. and Yan, J. 2010. Modeling Multivariate Distributions with Continuous Margins Using the copula R Package. *J. Statistical Soft.* 34(9): 1-20.
- Li H, Wang D, Singh VP, Wang Y, Wu J, Wu J,... and Zhang J. 2019. Non-stationary frequency analysis of annual extreme rainfall volume and intensity using Archimedean copulas: A case study in eastern China. *Journal of Hydrology*. 571(1): 114–131.
- Maeng, S.J.; Azam, M.; Kim, H.S. and Hwang, J.H. 2017. Analysis of Changes in Spatio-Temporal Patterns of Drought across South Korea. *Water* 2017, 9, 679.
- Mirabbasi, R., Fakheri-Fard, A. and Dinpashoh, Y., (2012). Bivariate drought frequency analysis using the copula method. *Theor. Appl. Climatol.*
- Nash, J.E. and Sutcliffe, J. V., 1970. River flow forecasting through conceptual models. A discussion of principles, *J Hydrol*, 10:282–290.
- Nelsen, R. B., 2006. *An Introduction to Copulas*, Springer, New York. 269 pp.
- Requena, A.I. Mediero, Land Garrote, L. A. 2013. bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: Accounting for reservoir routing in risk estimation. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 17, 3023–3038.
- Rezaie, H., Mirabbasi, R., Khanitemeliyeh, Z. (2020). Bivariate Analysis of Drought Risk in West and Northwest of Iran Using PSO Algorithm and Copula Functions. *Journal of Water and Soil Conservation*, 27(3), 125-144. [in Persian]
- Rizwan, M. Guo, S. Yin. and J. Xiong, F. 2019. Deriving design flood hydrographs based on copula function: a case study in Pakistan. *Water*, 11(8), 1531.
- Salvadori, G., and Michele, C. D. 2011. Estimating strategies for multiparameter multivariate extreme value copulas. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15(1), 141-150.
- Shafaei, M., Fakheri-Fard, A., Dinpashoh, Y., Mirabbasi Najafabadi, R. (2016). Modeling the Four-Dimensional Joint Distribution Function of Flood Characteristics Using C-Vine Structure. *Iranian Journal of Irrigation & Drainage*, 10(3), 327-338. [in Persian]
- Shiau JT, Wang HY. and Tsai, CT. 2006. Bivariate frequency analysis of floods using copulas. *Journal of American Water Resources Association* 42 (6): 1549–1564.
- Sklar, A., 1959. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8: 229-231.
- Yue, S. and Rasmussen, P. 2002. Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological applications. *Hydrol. Process*, 16: 2881-2898.
- Zakaria, R., Metcalfe, A.V., Howlett, P., Boland, J. and Piantadosi, J., 2010. Using the skew-t copula to model bivariate rainfall distribution. *Anziam J.* 51, pp. C231-C246.



Print ISSN: 2251-7480
Online ISSN: 2251-7400

Journal of
**Water and Soil
Resources Conservation
(WSRCJ)**

Web site:

<https://wsrcj.srbiau.ac.ir>

Email:

iauwsrcj@srbiau.ac.ir
iauwsrcj@gmail.com

**Vol. 11
No. 3
Spring 2022**

**Received:
2021-07-11**

**Accepted:
2021-10-31**

Pages: 59-75



Bivariate Frequency Analysis of Rainfall Characteristics Using Archimedean Copula Functions

(Case Study: Khanmirza Watershed in Chaharmahal and Bakhtiari Province)

Samira Moradzadeh Rahmatabadi¹, Mohsen Irandoust^{*2} and Rasoul Mirabbasi Najafabadi³

1) PhD student, Department of Water Engineering, Kerman Unit, Islamic Azad University, Kerman, Iran.

2) Assistant Professor, Department of Water Engineering, Kerman Unit, Islamic Azad University, Kerman, Iran.

3) Associate Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, University of Shahrekord, Shahrekord, Iran.

*Corresponding author email: irandostmo@gmail.com

Abstract:

Background and Aim: This study aims to analyze the frequency of bivariate precipitation characteristics using Copula functions. For this purpose, daily rainfall data of Aloni station located in Khanmirza plain during the statistical period of 1986-2012 were used. After evaluating the rainfall events recorded at Aloni station in the study period (763 events), rainfall duration, rainfall depth, and then rainfall intensity of the events were calculated. Studies show that in the study area, usually rainfall events with an intensity of 5 mm/hr and more lead to floods, so in this study, the events that led to floods were selected to continue the calculations. Then, the common distributions in hydrology were fitted to each of the rainfall characteristics (duration, intensity, depth of rainfall) and the distributions that had the best fit to each of the rainfall characteristics were selected. Then, ten Copula functions were used to create a multivariate distribution of rainfall characteristics.

Method: In this study, at first rainfall characteristics such as intensity, duration and depth were extracted for rainfall data leading to floods. Then the common margin distribution functions in hydrology were fitted to the characteristics. Then, after selecting the best margin distribution to create the cumulative distribution function (CDF) to create the multivariate distribution of rainfall characteristics, fitting the Copula functions of Clayton, Ali-Mikhail-Haq, Farli-Gumble-Morgan Stern, Frank, Galambos, Gamble-Hauggard, Plackett, Filip-Gumble, Joe, and Gumble-Barnett on the mentioned variables were studied in pairs and for each pair of precipitation characteristics, the best Copula function was determined by comparing with the corresponding values of the empirical Copula. Then, using good criteria, the fit of the best Copula function for rainfall characteristics was determined. Since the condition for using Copula functions is the existence of a correlation between the studied features, so using Spearman, Pearson, and Kendall correlation coefficients, the correlation between the features was investigated also the cases of joint and conditional return periods, both probability and conditional and Kendall return period, which is basic concepts for analysis based on Copula functions, were evaluated.

Results: The results of the analysis showed that the general extreme value distribution function (GEV) on rainfall characteristics (intensity, duration, depth) was known as the best distribution function and the results of the goodness of fit test showed that the Joe Copula function as the superior Copula function is based on the characteristics (intensity and duration) and (intensity and depth) and the Farli Gumble Morgan Stern Copula function was known as the superior Copula function on the depth and duration characteristics of rainfall. The results of both probability and conditional probability showed that when the flooding rainfall is 8 hours, the probability level will be 45 mm for the probability level of 0.2 and the probability of precipitation for the same level for the duration of is not necessary. It can be omitted 15 hours. It will be 51 mm. The results of the Joint return period for "and" state showed that for the depth of rainfall of 60 mm and the intensity of rainfall of 60 mm/hr., the return period in the "and" state is less than 20 years. Based on the "or" mode for the same amount of intensity and depth of rainfall, the return period is less than 10 years (about 6 years). For a 25-year return period, provided the duration of the rainfall is 12.5 hours or more, the rainfall depth will be 75 mm.

Conclusion: Based on the results of comparing the values of theoretical Copulas with the corresponding values of empirical probability, the Joe Copula function was recognized as the superior Copula function to create a bivariate distribution of rainfall intensity and depth characteristics, as well as a pair of rainfall intensity and duration characteristics. Farli-Gumble-Morgan Stern Copula had a better fit for rainfall duration and depth data. Then, using superior fitted Copula functions, useful information such as probabilistic and conditional probability as well as joint and conditional return periods were extracted. The maximum rainfall depth recorded at Aloni station was 114.7 mm and its duration was 14.40 hours. The seasonal "or" is 60 years old. The results of the joint and conditional return periods in this study have been widely used in hydrological and water resources studies, including flood risk analysis, drought, watershed management, and rangeland management.

Keywords: Precipitation, bivariate analysis, Return Period, Copula Function