حل عددی معادله‌ی برگر تعمیم یافته با کاربرد تفاضل محدود و مقایسه‌ی آن با روش Lattice Boltzmann

محمد واقفی[*۱]

چکیده

هدف اصلی این تحقیق حل عددی معادله‌ی برگر تعمیم یافته در شرایط مرزی و اولیه‌ی مناسب با استفاده از روش تفاضل محدود، و مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با جوابهای موجود در مقالات دیگر می باشد. این معادله‌ی در حالت بی بعد مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حل عددی با کاربرد تفاضل محدود با دستاوردهای روش Lattice Boltzmann مقایسه شد، که نمودارها و جداول مربوطه ارائه گردید، این مقایسه را توصیف می نمایند. همچنین، در این مقاله، به بررسی تاثیر فراسنجهای زمان، گرانروی و توان سرعت ته نشینی (در معادله‌ی برگر) بر سرعت ته نشینی مواد معلق، پرداخته شد. نتایج نشان دادند که با افزایش فراسنجهای زمان و گرانروی، از بیشترین سرعت ته نشینی کاسته شده، و محل رخداد بیشترین سرعت ته نشینی به سمت انتهای بازه‌ی مورد مطالعه انتقال می‌یابد. علاوه بر این، نتایج بیانگر آنند که با ۱۰۰ برابر شدن فراسنج گرانروی، سرعت سقوط ذرات در نقطه‌ی اوج حدود ۶۰ درصد کاهش می یابد. تجزیه و تحلیل نتایج از مطالب ارائه شده در این مقاله می باشد.

واژه‌های کلیدی: معادله‌ی برگر تعمیم یافته، روش تفاضل محدود، سرعت بیشترین، ته نشینی

[۱]- استادیار سازه های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، بوشهر،

[*]- نویسنده مسوول مقاله: vaghefi@pgu.ac.ir

مقدمه

فرایندهای فیزیکی وابسته به فراسنجهای مختلف می‌باشند که در زبان ریاضی با معادله‌ی دیفرانسیل نظیر خود شبیه سازی می شود. با علم به اینکه نزدیک بودن شبیه ریاضی به رفتار واقعی فرایند از اهمیت خاص برخوردار است، حل دقیق معادلات دیفرانسیل و درستی جواب نیز دارای درجه اهمیت بالایی می باشد. از آن جایی که حل برخی از این معادلات غیرخطی چنان دشوار است که به دست آوردن جواب تحلیل آنها مگر در شرایط خاص امکان پذیر نمی باشد، این گونه معادلات را می توان با روشهای عددی با در نظر گرفتن ضریب خطا در محاسبه حل نمود. شکل کلی معادله‌ی برگر تعمیم یافته به شکل زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^m \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۱)$$

با داشتن شرایط مرزی و اولیه مناسب، این معادله‌ی به یک معادله‌ی قابل حل تبدیل می شود.

$$u(0,t) = a \quad (۲)$$
$$u(1,t) - b$$
$$u(x,0) = f(x)$$

که معادله‌ی فوق u تابعی وابسته به زمان و مکان است که نشانگر سرعت ته نشینی ذره می باشد. a و b عدد ثابتند، m توان سرعت ته نشینی در معادله‌ی برگر و t زمان سقوط ذره می باشد. معادله‌ی برگر تعمیم یافته که به بیان شبیه ریاضی نحوه‌ی ته نشین شدن ذره ای در سیال راکد تحت تأثیر نیروی گرانش و تلاطم در سیال به صورت بی بُعد می پردازد، جزء معادلات دیفرانسیل غیرخطی وابسته به زمان می باشد. معادله‌ی برگر اولین بار به وسیله‌ی بَتمن در سال ۱۹۱۵ مطرح شد، اما به دلیل کارهای گسترده برگر از جمله استفاده از معادله‌ی به عنوان شبیه ریاضی تلاطم این معادله‌ی به نام وی اسم گذاری شد [۱]. حل معادله‌ی برگر در حالات مختلف از زمان های گذشته تاکنون در زمینه مهندسی آب کاربردهای فراوانی داشته است که در ادامه به تعدادی از آنها اشاره می شود. این معادله برای نخستین بار در سال ۱۹۳۹ برای مطالعه‌ی جریان آشفته مورد استفاده قرار گرفت. معادله‌ی برگر KDV اولین بار به وسیله‌ی کُرتوج و دِوریز برای استفاده در شبیه غیرخطی تغییرات در شکل موج های طولانی در کانال پیشنهاد شد [۲]. یکی از اولین حلهای عددی معادله‌ی برگر فیشر در سال ۱۹۷۴ به وسیله‌ی دازداگ و کانُسا ارائه شد که با کاربرد Pseudo– Spectra حل گردید. برادبریج و همکاران (۱۹۹۲)، حل تحلیلی و دقیق معادله‌ی برگر و کاربرد آن در نفوذ آب در خاکهای لایه ای ارائه نمودند [۸]. هیلز و واریک (۱۹۹۳)، با استفاده از روشهای تحلیلی و تفاضل محدود به حل معادله‌ی برگر برای جریان آب در خاک در یک طول محدود پرداخته و دو مثال را با این روش حل نمودند [۵]. واریک و همکاران (۱۹۹۵)، به حل تحلیلی معادله‌ی برگر یک بعدی برای مسائل مربوط به آب های سطحی و زهکشی پرداختند. معادله‌ی برگر در دو حالت درگیر و منفرد به وسیله‌ی دوان و نی (۱۹۹۸)، شرح داده شد و مساله در حالت شرایط مرز و آغازی صفر تشریح شد. معادله‌ی برگر فیشر به روش اجزاء محدود در سالهای ۱۹۹۰، ۱۹۹۱، ۱۹۹۵، ۱۹۹۷ و ۲۰۰۱ به ترتیب به وسیله‌ی پارخ، تانگ، کری، روسلر و رزوان حل شده است حق و همکاران (۲۰۱۲)، معادله‌ی برگر به وسیله‌ی باشا (۲۰۰۲)، برای حالت یک بعدی و تحت شرایط مختلف اولیه و مرزی برای مساله نفوذ آب در خاک حل شد. معادله‌ی برگر سه بعدی به وسیله‌ی شن و همکاران(۲۰۰۴)، مورد بررسی قرار گرفت. عبدو و سلیمان (۲۰۰۵)، معادله‌ی برگر را در حالت درگیر باکاربرد تکرار تغییراتی حل کرده و پاسخ را با جواب به دست آمده از روش ADM مقایسه کرد، او نشان داد که روش تکرار تغییراتی دقیق تر از روش ADM است. معادله‌ی برگر تعمیم یافته دیگر بار به وسیله‌ی رامادان و دناف(۲۰۰۵)، به روش Quintic Splines حل شد. وازواز (۲۰۰۸)، به حل معادله‌ی برگر سه بعدی پرداخت و نتایج خود را ارائه داد. دوان و همکاران (۲۰۰۸)، به حل معادله‌ی برگر تعمیم یافته پرداخته، آنها با استفاده از روش LBM این معادله‌ی را حل کردند. دای و همکاران (۲۰۰۹)، به بررسی معادله‌ی برگر سه بعدی پرداختند و با استفاده از روش Enp- Function برای حل این روش استفاده کردند و جوابی دقیق برای این معادله‌ی محاسبه کردند. حق و اودین

(۲۰۰۹)، به حل عددی معادله‌ی برگر KDV پرداخته و آنرا به روش Mesh-Free به صورت عددی حل کردند. در سال ۲۰۱۰، مهر و مهتا به توسعه یک شبیه انگاره ای برای حل مساله انتشار در محیطهای مختلخل با استفاده از معادله‌ی برگر غیرخطی در جریانهای غیریکنواخت و یک بعدی پرداختند. شارلر و همکاران (۲۰۱۲)، به حل عددی معادله‌ی برگر دو بعدی پرداخته و با استفاده از روش Radial Basis Function Collocation این معادله‌ی را حل کردند و دو مثال عددی را نیز با نمودارهای متفاوت ارائه دادند که در هر یک از مثالهای عددی شرایط مرزی متفاوتی را استفاده کرده و در شرایطی متفاوت این معادله را حل کردند. ژاو و همکاران (۲۰۱۲)، معادله‌ی برگر فیشر با کاربرد Chebyshev-Legender Pseudo-Spectral حل کردند و در سه شرایط مرزی متفاوت نتایج عددی را ارائه دادند. سینگ و همکاران (۲۰۱۵)، به حل معادله‌ی برگر ناشی از مساله انتشار طولی با استفاده از انتقال Sumudu برای جریان سیال در محیطهای مختلخل پرداختند. اصغری پری و محققیان (۱۳۹۳) به مطالعه عددی تاثیر ایجاد گودالهای حفاظتی در بستر برای مهار کردن جریانهای غلیظ پرداختند. نتایج آنها نشان داد که ایجاد گودالهای حفاظتی در بستر هم برای جریان زیر بحرانی و هم فوق بحرانی می تواند میزان بسیار زیادی از جریان غلیظ را مهار کند.

در مقاله حاضر درستی نتایج حاصل از حل معادله ی برگر تعمیم یافته به روش تفاضل محدود و مقایسه آن با نتایج روش LBM اثبات شده است. همچنین این معادله‌ی در حالتهای خاصی که نتایجی برای آنها در دست نیست، حل شد و تأثیر فراسنجهای مختلف نظیر زمان و گرانروی بر سرعت ته نشینی ذرات در طول مکان بررسی شده و نتایج آن ارائه شده است.

مواد و روشها

روش تفاضل محدود

در مرحله اول دو بازه زمانی و مکانی به طول‌های به ترتیب t و L با در نظر گرفتن N_t گره در جهت زمان و N_x گره در جهت مکان، شبکه بندی شد.

$$h = \frac{L}{N_{x-1}} \qquad (۳)$$

$$x_i = (i-1)h \qquad (۴)$$

$$k = \frac{t}{N_t - 1} \qquad (۵)$$

$$t_j = (j-1)k \qquad (۶)$$

فراسنجهای k و h به ترتیب فواصل بین گره های شبکه بندی در جهت زمان و مکان می باشند. x_i و t_j به ترتیب نشانگر نقطه iام در جهت مکان و نقطه jام در جهت زمان است. i و j به ترتیب در بازه (N_x و ۱) و بازه (N_t و ۱) می باشند. برای مشتقهای مختلف موجود در معادله‌ی، مقادیر تقریبی با استفاده از روابط تقریبهای پیشرو و پسرو نیوتن محاسبه شد.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i,t_j) - u(x_{i-1},t_j)}{h} \qquad (۷)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i,t_j) - u(x_i,t_{j-1})}{k} \qquad (۸)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} \qquad (۹)$$

u سرعت ته نشینی ذره در زمان t_j و مکان x_i می‌باشد. با جایگذاری روابط ۷، ۸ و ۹ در معادله‌ی (۱) برای نقطه‌ی (x_i,t_j) رابطه‌ی ۱۰ به دست آمد.

$$u(x_i,t_j)\left[\frac{1}{k} + \frac{U^m_{(x_i,t_j)}}{h} + \frac{2\upsilon}{h^2}\right] + u(x_{i-1},t_j)\left[-\frac{U^m_{(x_i,t_j)}}{h} - \frac{\upsilon}{h^2}\right] + u(x_{i+1},t_j)\left[-\frac{\upsilon}{h^2}\right] + \frac{1}{k}u(x_i,t_{j-1})$$

$$\frac{u(x_i,t_j)}{k} - \frac{u(x_i,t_{j-1})}{k} + U^m_{(x_i,t_j)}\frac{u(x_i,t_j)}{h} - U^m_{(x_i,t_j)}\frac{u(x_{i-1},t_j)}{h} = \upsilon\frac{u(x_{i+1},t_j)}{h^2} - 2\upsilon\frac{u(x_i,t_j)}{h^2} + \upsilon\frac{u(x_{i-1},t_j)}{h^2} \qquad (۱۰)$$

$$A_1 u(x_i,t_j) + A_2 u(x_{i-1},t_j) + A_3 u(x_{i+1},t_j) = u(x_i,t_{j-1})$$

که در رابطه (۱۰) ضرایب A_1، A_2 و A_3 از روابط مربوطه محاسبه و در روابط فوق استفاده می شوند.

$$A_1 = 1 + \frac{k}{h} u^m(x_i, t_j) + \frac{2kv}{h^2} \quad (۱۱)$$

$$A_2 = -\frac{k}{h} u^m(x_i, t_j) - \frac{kv}{h^2} \quad (۱۲)$$

$$A_3 = -\frac{kv}{h^2} \quad (۱۳)$$

معادله‌ی ارائه شده در رابطه (۱۰) برای تمامی نقاط بازنویسی شده و با داشتن دو شرط مرزی و شرط اولیه، یک دستگاه چند معادله‌ی و چند مجهول غیر خطی حاصل شد.

جهت حل این دستگاه معادلات از روش نیوتن رافسون استفاده گردید. همچنین تمامی مراحل حل معادله‌ی به زبان MATLAB نگاشته شد.

روش محاسبه خطا

برای محاسبه خطای نتایج روش تفاضل محدود نسبت به روش دقیق در هر نقطه و یا نتایج حاصل از دو حالت متفاوت نسبت به یکدیگر، از رابطه‌ی زیر استفاده شده است:

$$e_{(1,2)} = \left(\frac{u_1(x_i, t_j) - u_2(x_i, t_j)}{u_2(x_i, t_j)}\right) \times 100 \quad (۱۴)$$

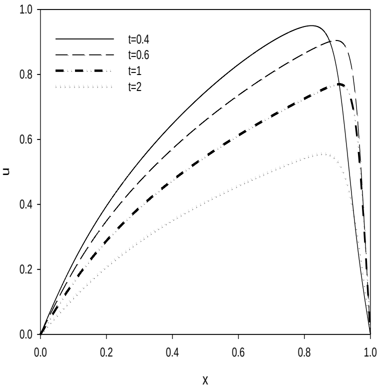
که در آن $e_{(1,2)}$، درصد خطای جواب به دست آمده از روش یا حالت ۲ نسبت به نتیجه حاصله از روش یا حالت ۱ می باشد. $u_{1(xi,tj)}$ و $u_{2(xi,tj)}$ به ترتیب سرعت ته نشینی به دست آمده در زمان t_j و مکان x_i به روش یا حالت ۱ و روش یا حالت ۲ می باشند. برای مثال $e_{(Exact,FDM)}$ نشان دهنده‌ی خطای نتایج حاصل از روش تفاضل محدود نسبت به نتایج روش دقیق در یک نقطه‌ی خاص می باشد. همچنین $e_{(m=1,2)}$ بیانگر تفاوت بین نتایج حاصل از حل در حالت m=2 نسبت به حالت m=1 می‌باشد.

مثال عددی

معادله‌ی برگر تعمیم یافته با فرض m=2، ν=0.01 با شرایط مرزی و اولیه ارائه شده در رابطه (۱) حل شد و نتایج عددی آن در ادامه ارائه شده است.

$$u(x,0) = \sin(\pi x)$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (۱۵)$$

در شکل (۱) نتایج حل عددی معادله‌ی برگر تعمیم یافته در حالت m=2 و ν=0.01 به روش تفاضل محدود در چهار زمان t=0.4 ، t=0.6، t=1 و t=2 نشان داده شده است که در این روش فواصل گره ها در جهت زمان (k) ۰/۰۰۵ و تعداد گره ها در جهت x برابر N_x=101 در نظر گرفته شد. نتایج نشان می دهد که با افزایش زمان تقریباً در تمامی مکانها از میزان سرعت ته نشینی کاسته می شود. بطوری که در زمان t=2 نقطه اوج سرعت ته نشینی به حدود ۶۰ درصد مقدار نقطه اوج در t=4 می‌رسد. همچنین با توجه به شکل آب نگار گونه نمودارها و همان طور که مشاهده می شود، شاخه نزولی آب نگار از شیب بیشتر نسبت به شاخه نزولی برخوردار است.



شکل ۱- نمودار u-x در حالت ν=0.01 در چهار زما t=0.4، t=0.6، t=1 و t=2 به روش تفاضل محدود.

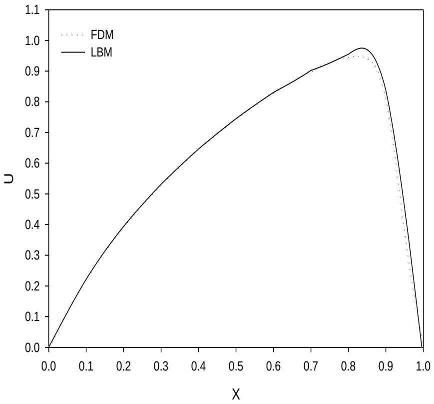
برخی داده های عددی نمودار های ارائه شده در این شکل، در جدول ۱ نشان داده شده است که تغییر سرعت ته نشینی با افزایش زمان بصورت عددی در برخی از مکانها مورد بررسی قرار گرفته نمایش داده شده است.

جدول ۱- داده های عددی u درحالت ν=0.01 در چهار زمان t=0.4، t=0.6، t=1 و t=2 به روش تفاضل محدود.

x	u t=0.4	u t=0.6	u t=1	u t=2	$e_{(t=0.4,t=0.6)}$	$e_{(t=0.4,t=1)}$	$e_{(t=0.4,t=2)}$
0.01	0.0238	0.0209	0.0168	0.0116	12.184	29.411	51.260
0.1	0.222	0.1957	0.1596	0.1122	11.846	28.108	49.459
0.2	0.3948	0.3488	0.2878	0.2076	11.651	27.102	47.416
0.3	0.5323	0.4699	0.3896	0.2857	11.722	26.808	46.327
0.4	0.6474	0.571	0.4741	0.3511	11.801	26.768	45.767
0.5	0.7461	0.6586	0.5473	0.4076	11.727	26.645	45.369
0.6	0.8307	0.736	0.6125	0.4576	11.400	26.267	44.913
0.7	0.9005	0.8047	0.6715	0.5027	10.638	25.430	44.175
0.8	0.9473	0.8648	0.7256	0.543	8.708	23.403	42.679
0.9	0.8056	0.9043	0.7695	0.5318	-12.251	4.481	33.987
0.98	0.1288	0.3679	0.346	0.1566	-185.636	-168.630	-21.583

نتایج ارائه شده در جدول ۱ نشانگر این است که سرعت ته نشینی در چهار زمان در برخی از مکانها می‌باشد. همچنین تفاوت نتایج حاصله در هر یک از زمانها نسبت به زمانt=0.4 با استفاده از رابطه ۱۴ محاسبه و در ستون مربوطه ارائه شده است. یادآور می‌شود که علامت مثبت نشان می دهد که سرعت ته نشینی نسبت به زمانt=0.4 کاسته شده است و علامت منفی نشان دهنده افزایش سرعت ته نشینی نسبت به زمان t=0.4 می باشد. همان طور که مشاهده می شود در انتهای بازه مورد بررسی و با افزایش زمان سرعت ته‌نشینی ذرات کاسته می شود.

جهت بررسی دقت روش تفاضل محدود، به مقایسه داده های حاصل از این روش با نتایج موجود از روش LBM پرداخته شد. نتایج این مقایسه در شکل ۲ ارائه شده است. این شکل نشان دهنده ی نتایج حل معادله‌ی برگر تعمیم یافته در حالت m=2 و ν=0.01 در زمان t=0.4 به دو روش تفاضل محدود و روش LBM می‌باشد. همان طور که در شکل ۲ مشاهده می شود، تطابق مناسب بین نتایج تحقیق حاضر و روش LBM وجود دارد و صحت سنجی مناسب را نشان می دهد.



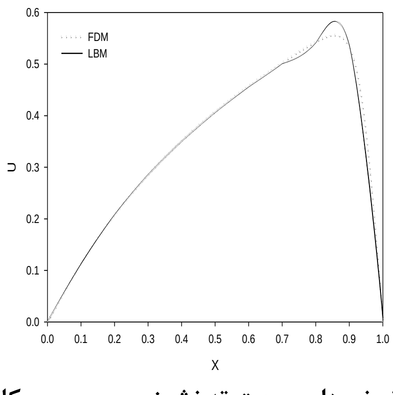
شکل ۲- نمودار u-x در حالت ν=0.01 و زمان t=0.4 به دو روش تفاضل محدود و LBM (Nx,t=401).

اعداد ارائه شده در جدول ۲ نشان دهنده‌ی نتایج حل معادله‌ی برگر تعمیم یافته در حالت m=2 و ν=0.01 در زمان t=0.4 به دو روش تفاضل محدود و روش LBM می باشد. تفاوت نتایج حاصل از روش تفاضل محدود نسبت به روش LBM با استفاده از رابطه ۱۴ محاسبه و در ستون آخر جدول ارائه شده است. نتایج نشان می دهد که بیشترین تفاوت در مکان x=0.9 حاصل شده و برابر ۳/۷۹ درصد می باشد. لازم به ذکر است که علامت منفی در ستون آخر نشان دهنده ی این است که قدر مطلق نتایج روش تفاضل محدود نسبت به نتایج روش LBM بزرگتر می باشد و علامت مثبت بیانگر عکس این مطلب است. بطور کلی می توان گفت که خطاهای ارائه شده در این قسمت بسیار ناچیز بوده و تقریبا تطابق کامل بین روش تفاضل محدود و LBM برقرار است.

جدول ۲- نتایج عددی سرعت ته نشینی در حالت $\nu=0.01$ و زمان $t=0.4$ به دو روش تفاضل محدود و روش LBM.

x	u LBM	u FDM	$e_{(LBM,FDM)}$
0.1	0.2218	0.2221	-0.13
0.2	0.3941	0.3948	-0.16
0.3	0.5313	0.5324	-0.19
0.4	0.6463	0.6475	-0.18
0.5	0.7451	0.7461	-0.13
0.6	0.8305	0.8307	-0.02
0.7	0.9024	0.9006	0.19
0.8	0.955	0.9473	0.79
0.9	0.8374	0.8056	3.79

نمودارهای شکل ۳ نتایج دو روش تفاضل محدود و LBM را در زمان $t=0.4$ مورد مقایسه قرار می دهد. در شکل ۳ به بررسی نتایج این دو روش در حل معادله‌ی برگر تعمیم یافته در حالت $m=2$ و $\nu=0.01$ در زمان $t=2$ پرداخته شده است. در روش تفاضل محدود تعداد گره های شبکهبندی در جهت زمان و مکان برابر ۴۰۱ گره برای این حل در نظر گرفته شد. مقایسه دو نمودار در شکل ۳ نشان می دهد که در زمان $t=2$ نیز نتایج دو روش به یکدیگر نزدیک بوده و از تطابق مناسب برخوردار می‌باشد. برخی داده‌های این دو نمودار به صورت عددی در جدول ۳ نیز آورده شده است.



شکل ۳- نمودار سرعت ته نشینی بر حسب مکان در حالت $\nu=0.01$ و زمان $t=2$ به دو روش تفاضل محدود و روش LBM (Nx,t=401).

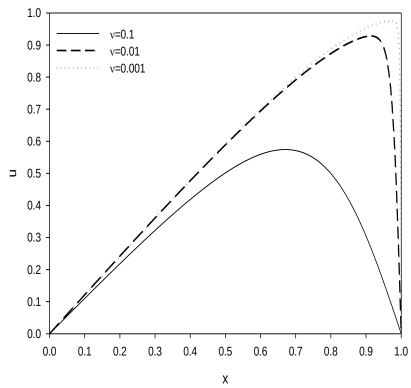
مقایسه نتایج جداول ۲ و ۳ نشان می دهد که بیشترین تفاوت بین نتایج روش تفاضل محدود نسبت به روش LBM با افزایش زمان از $t=0.4$ به $t=2$، از ۳/۷۹ درصد به ۰/۶۷ درصد کاسته می شود.

جدول ۳- نتایج عددی سرعت ته نشینی در حالت $\nu=0.01$ و زمان $t=2$ به دو روش تفاضل محدود و روش LBM.

x	u LBM	u FDM	$e_{(LBM,FDM)}$
0.1	0.1101	0.1122	-0.31
0.2	0.2061	0.2076	-0.24
0.3	0.2848	0.2857	-0.23
0.4	0.3505	0.3511	-0.22
0.5	0.407	0.4076	-0.22
0.6	0.457	0.4575	-0.24
0.7	0.5022	0.5027	-0.23
0.8	0.5427	0.5430	-0.18
0.9	0.5322	0.5318	0.67

فراسنج ν در نتایج حل معادله‌ی برگر تعمیم یافته تأثیر گذار است، تأثیر این فراسنج با حل معادله‌ی ۱ به روش تفاضل محدود، با مقادیر متفاوت این فراسنج و مقایسه آنها با یکدیگر مورد بررسی قرار گرفت.

معادله‌ی برگر تعمیم یافته در شرایط مرزی و اولیه ارائه شده در رابطه ی ۱۵، حالت $m=1$ و زمان $t=0.5$ در سه حالت $\nu=0.1$، $\nu=0.01$ و $\nu=0.001$ به روش تفاضل محدود با در نظر گرفتن ۲۰۱ گره در جهت مکان و زمان حل شد و نتایج این حل به صورت سه نمودار سرعت ته نشینی (u) بر حسب مکان (x) در شکل ۴ نمایش داده شده است، هر یک از نمودارها به شرح نتایج یکی از حالتهای فراسنج ν می پردازد. مقایسه سه نمودار نشان می دهد که با افزایش فراسنج ν از سرعت ته نشینی ذرات کاسته می شود بطوری که با ۱۰۰ برابر شدن گرانروی، سرعت در نقطه اوج حدود ۶۰ درصد کاهش می یابد. همچنین با کاهش گرانروی، نقطه اوج سرعت به سمت انتهای بازه مورد بررسی تغییرمکان می دهد. به بیان دیگر با کاهش فراسنج ν، مکان رخداد بیشترین سرعت به سمت نقطه مرزی سیر می کند. همچنین در گرانروی های زیاد $(\nu=0.1)$ شاخه صعودی و نزولی نمودار از تقارن مناسبی برخوردار است ولی با کاهش گرانروی، عدم تقارن مشاهده می گردد و شاخه نزولی حالت پله ای خواهد داشت.



شکل ۴- سرعت ته نشینی ذره در حالت m=1 و زمان t=0.5 در سه حالت ν=0.1، ν=0.01 و ν=0.001 به روش تفاضل محدود (Nx,t=201).

برخی از نتایج عددی نمودارهای ارائه شده در شکل ۴ در جدول ۴ آمده است. در این جدول در سه حالت ν=0.1، ν=0.01 و ν=0.001 در مکانهای متفاوت نتایج حل معادله‌ی برگر تعمیم یافته ارائه شده است. همچنین تفاوت نتایج هریک از حالتها نسبت به حالتهای دیگر با استفاده از رابطه ی ۱۴ محاسبه و در ستون مربوطه ارائه شده است. با افزایش این فراسنج از ν=0.1 به ν=0.01، از ν=0.1 به ν=0.001 و از ν=0.01 به ν=0.001 در این جدول بترتیب در بیشترین حالت ۲۰۴، ۲۱۳ و ۳ درصد، به سرعت ته نشینی ذرات افزوده شده است.

جدول ۴-داده های عددی سرعت ته نشینی ذره در حالت m=1 و زمان t=0.5 در سه حالت ν=0.1، ν=0.01 و ν=0.001 به روش تفاضل محدود (Nx,t=201).

x	u			$e_{(\nu=0.1,\ \nu=0.01)}$	$e_{(\nu=0.1,\ \nu=0.001)}$	$e_{(\nu=0.01,\ \nu=0.001)}$
	ν=0.1	ν=0.01	ν=0.001			
0.1	0.1100	0.1214	0.1223	-10.363	-11.181	-0.741
0.15	0.1644	0.1819	0.1832	-10.644	-11.435	-0.714
0.2	0.2181	0.2420	0.2438	-10.958	-11.783	-0.743
0.3	0.3220	0.3608	0.3636	-12.049	-12.919	-0.776
0.4	0.4184	0.4769	0.4809	-13.981	-14.937	-0.838
0.5	0.5013	0.5888	0.5943	-17.454	-18.551	-0.934
0.6	0.5594	0.6946	0.7021	-24.168	-25.509	-1.079
0.7	0.5710	0.7914	0.8018	-38.598	-40.420	-1.314
0.8	0.4994	0.8735	0.8891	-74.909	-78.033	-1.785
0.9	0.3047	0.9266	0.9552	-204.102	-213.488	-3.086

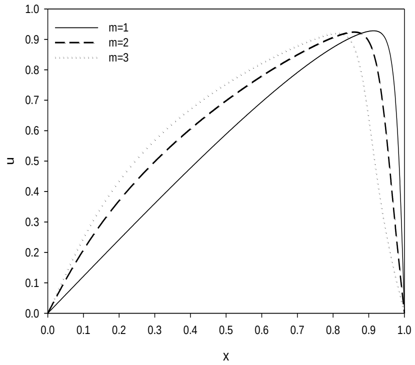
بیشترین سرعت ته نشینی از اهمیت بالایی بر خوردار می باشد چرا که در علوم مهندسی، طراحیها بر اساس بحرانی ترین حالتها آن جام می شود و بسیاری از حالتهای بحرانی در بیشترین سرعتها رخ می دهد. بیشترین سرعت‌های ته نشینی به دست آمده در سه حالت متفاوت νو در پنج زمان مختلف در جدول ۵ نشان می دهد.

جدول ۵- داده های عددی u_{max} و مکان وقوع آن در حالت m=2 در پنج زمان به روش تفاضل محدود(Nx,t=201).

t	u_{max}			$x(u_{max})$		
	ν=0.1	ν=0.01	ν=0.001	ν=0.1	ν=0.01	ν=0.001
0.1	0.9035	0.9876	0.9963	0.57	0.595	0.6
0.2	0.8147	0.9748	0.9923	0.595	0.685	0.69
0.3	0.7335	0.9611	0.9879	0.61	0.755	0.785
0.4	0.6601	0.9448	0.9829	0.605	0.815	0.875
0.5	0.5941	0.9239	0.9746	0.6	0.86	0.935

بررسی داده‌های جدول ۵ نشان می‌دهد که در تمامی زمان‌های ارائه شده در این جدول با کاهش فراسنج ν، به بیشترین سرعت ته نشینی افزوده می شود و محل رخداد بیشترین سرعت به مکانهایی با x های بزرگتر (یعنی انتهای مسیر) انتقال می یابد.

معادله‌ی برگر تعمیم یافته در شرایط مرزی و اولیه ارائه شده در رابطه‌ی ۱۵، حالت ν=0.01 و زمان t=0.5 در سه حالت m=1، m=2 و m=3 و با افزایش توان سرعت سقوط ذرات در معادله‌ی برگر به روش تفاضل محدود با در نظر گرفتن ۲۰۱ گره در جهت مکان و زمان حل شد و نتایج این حل به صورت سه نمودار سرعت ته نشینی (u) بر حسب مکان (x) در شکل ۵ نمایش داده شده است، هر یک از نمودارها به شرح نتایج یکی از حالت‌های فراسنج m می پردازد. مقایسه سه نمودار نشان می دهد که با افزایش فراسنج m در برخی مکان‌ها از سرعت ته نشینی ذرات کاسته و در برخی مکان‌ها به آن افزوده می شود. نکته قابل توجه در این شکل این است که با افزایش فراسنج m در این شکل، مکان رخداد بیشترین سرعت تغییر کرده و به مکانهای با مقدار x کوچکتری (یعنی به سمت ابتدای بازه مورد بررسی) انتقال یافته است. یا به عبارت دیگر با کاهش این فراسنج، مکان رخداد بیشترین سرعت به سمت راست بازه مورد بررسی و نقاط مرزی سیر می کند. برخی نتایج عددی نمودارهای ارائه شده در شکل ۵ در جدول ۷ آمده است.



شکل ۵- سرعت ته نشینی ذره در حالت ν=0.01 و زمان t=0.5 در سه حالت m=1، m=2 و m=3 به روش تفاضل محدود (Nx,t=201).

در جدول ۶ نتایج حل معادله‌ی برگر تعمیم یافته در حالت ν=0.1 و زمان t=0.5، در سه حالت m=1، m=2و m=3 در مکان‌های متفاوت ارائه شده است. بررسی نتایج این جدول نشان می‌دهد که در حالت ν=0.1 با افزایش فراسنج m، سرعت ته نشینی در برخی از مکان‌ها کاهش و در برخی دیگر افزایش یافته است. همچنین تفاوت نتایج هر یک از حالت‌ها نسبت به حالت-های دیگر با استفاده از رابطه‌ی ۱۴ محاسبه و در ستون مربوطه ارائه شده است. با افزایش این فراسنج از m=1 به m=2، از m=1 به m=3 و از m=2 به m=3 در این جدول به ترتیب در بیشترین حالت ۳۴، ۴۹ و ۱۲ درصد به سرعت ته نشینی ذرات افزوده شده است.

جدول ۶- داده های عددی سرعت ته نشینی ذره در حالت ν=0. 1 و زمان t=0.5 در سه حالت m=1، m=2 و m=3 به روش تفاضل محدود (Nx,t=201).

x	u m=1	u m=2	u m=3	$e_{(m=1,m=2)}$	$e_{(m=1,m=3)}$	$e_{(m=2,m=3)}$
0.1	0.1100	0.1473	0.1643	-33.909	-49.363	-11.541
0.15	0.1644	0.2171	0.2417	-32.055	-47.019	-11.331
0.2	0.2181	0.2831	0.3140	-29.802	-43.970	-10.914
0.3	0.3220	0.4013	0.4392	-24.627	-36.397	-9.444
0.4	0.4184	0.4976	0.5336	-18.929	-27.533	-7.234
0.5	0.5013	0.5661	0.5904	-12.926	-17.773	-4.292
0.6	0.5594	0.5941	0.5973	-6.203	-6.775	-0.538
0.7	0.5710	0.5602	0.5382	1.891	5.744	3.927
0.8	0.4994	0.4423	0.4062	11.433	18.662	8.161
0.9	0.3047	0.2429	0.2170	20.282	28.782	10.662

دادههـای ارائـه شـده در جـدول ۷ نشـانگر بیشـترین سرعتهای ته نشینی به دست آمده در سه حالـت متفـاوت m و در پنج زمـان مختلـف در حالـت ν=0.01 هسـتند. بررسی داده‌ها نشان می دهد که بجـز در زمـان t=0.1 در بقیه زمانهای ارائه شده در این جدول با افزایش فراسنج m از بیشترین سرعت تـه نشـینی کاسـته مـی‌شـود و محـل رخداد بیشترین سرعت به مکانهایی بـا xهـای کـوچکتر و ابتدای مسیر انتقال می یابـد. یـادآور مـی‌شـود کـه نتـایج جدول ۷ در حالت ν=0.01 و نتایج جدول ۶ در به عنوان نمونه حالت ν=0.1 محاسبه گردیده است.

جدول ۷- داده های عددی u_{max} و مکان وقوع آن در حالت ν=0.01 در پنج زمان به روش تفاضل محدود (Nx,t=201).

t	u_{max}			$x(u_{max})$		
	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3
0.1	0.9875	0.9876	0.9876	0.595	0.595	0.595
0.2	0.9749	0.9748	0.9747	0.69	0.685	0.675
0.3	0.9617	0.9611	0.9601	0.775	0.755	0.735
0.4	0.9478	0.9448	0.9421	0.855	0.815	0.78
0.5	0.9282	0.9239	0.9206	0.915	0.86	0.81

نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی نتایج حاصـل از حـل معادلـه‌ی برگر تعمیم یافته به روش تفاضل محدود و مقایسـه آن بـا روش LBM و حل یک مثـال عـددی در شـرایط مختلـف برای مساله ته نشینی مواد معلق پرداخته شد.

نتایج این مقایسه نشان دهنده تطابق و نزدیکـی جـواب های این دو روش می باشد. بیشترین تفاوت نتایج حاصـل از روش تفاضـل محـدود نسـبت بـه روش LBM در بـین مقایسه های آن جام شده ۳/۷۹ درصد می باشـد. بررسـی تأثیر فراسنج زمان بر روی سرعت ته نشینی نشان داد کـه با افزایش زمان وابسته به کوچک و یا بزرگ بودن اخـتلاف زمانی، به ترتیب سرعت ته نشینی در برخی نقاط کاهش و در برخی نقاط افزایش و یا فقط کاهش می یابـد؛ درحـالی که با افزایش فراسنج ν از سرعت ته نشینی کاسته و مکان رخداد بیشترین سرعت به مکانی با x کمتر انتقال می یابد بطوری که با ۱۰۰ برابر شدن گرانـروی، سـرعت در نقطـه اوج حدود ۶۰ درصد کاهش می یابد. همچنین بـا افـزایش فراسنج m نیز در حالـت ν=0.01 و پـنج زمـان t=0.1، t=0.2، t=0.3، t=0.4 و t=0.5، بیشـترین سـرعت تـه نشینی کاهش می یابد و مکان رخداد بیشترین سرعت تـه نشینی به سمت فواصل ابتدایی بازه مـورد بررسـی انتقـال می یابد. در حالی که در حالت ν=0.1 با افزایش فراسـنج m، از m=1 به m=2، از m=1 به m=3 و از m=2 بـه m=3 به ترتیب در بیشترین حالت ۳۴، ۴۹ و ۱۲ درصـد به سرعت ته نشینی ذرات افزوده شده است.

منابع

1. Abdou, M. A., and A. A., Soliman. 2005. Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 181(2): 245-251.
2. Basha, H. A. 2002. Burgers' equation: A general nonlinear solution of infiltration and redistribution. Water Resources Research. 38(11): 29-1.
3. Broadbridge, P., R., Srivastava and T. C. J., Yeh. 1992. Burgers' equation and layered media: Exact solutions and applications to soil-water flow. Mathematical and computer modelling. 16(11): 163-169.
4. Dai, C. Q., and Y. Y., Wang. 2009. New exact solutions of the (3+1)-dimensional Burgers system. Physics Letters A. 373(2): 181-187.
5. Diaz, J., J., Ramirez and J., Villa. 2011. The numerical solution of ageneralized Burger's-Huxley equation qhrough a conkitionally bounded and symmetry-preserving method.

Computers and Mathematics with Applications. 61: 3330-3344.
6. Duan, Y., R., Liu and Y., Jiang. 2008. Lattice Boltzmann model for the modified Burgers’ equation. Applied Mathematics and Computation. 202(2): 489-497.
7. Haq, S., A., Hussain and M., Uddin. 2012. On the numerical solution of nonlinear Burgers’-type equations using meshless method of lines. Applied Mathematics and Computation. 218(11): 6280-6290.
8. Haq, S., and M., Uddin. 2009. A mesh-free method for the numerical solution of the KdV–Burgers equation. Applied Mathematical Modelling. 33(8): 3442-3449.
9. Hills, R. G., and A. W., Warrick. 1993. Burgers' equation: A solution for soil water flow in a finite length. Water resources research. 29(4): 1179-1184.
10. Khater, A. H., R. S., Temsah and M. M., Hassan. 2008. A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers’-type equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 222(2): 333-350.
11. Meher, R., and M. N., Mehta. 2010. A new approach to Backlund transformations of Burger equation arising in longitudinal dispersion of miscible fluid flow through porous media. International Journal of Applied Mathematics and Computation. 2(3): 17-24.
12. Nee, J., and J., Duan. 1998. Limit set of trajectories of the coupled viscous Burgers' equations. Applied Mathematics Letters. 11(1): 57-61.
13. Ramadan, M. A., and T. S., El-Danaf. 2005. Numerical treatment for the modified burgers equation. Mathematics and Computers in Simulation. 70(2): 90-98.
14. Šarler, B., R., Vertnik and G., Kosec. 2012. Radial basis function collocation method for the numerical solution of the two-dimensional transient nonlinear coupled Burgers’ equations. Applied Mathematical Modelling. 36(3): 1148-1160.
15. Shen, S. F., Z. L., Pan and J., Zhang. 2004. New exact solution to (3+1)-dimensional Burgers equation. Communications in Theoretical Physics. 42(1): 49-50.
16. Singh, T., B. G., Choksi, M. N., Mehta and S., Pathak. A solution of the Burger’s equation arising in the longitudinal dispersion phenomena in fluid flow through porous media by Sumudu transform homotopy perturbation method. IOSR Journal of Mathematics. 11(1): 42-45.
17. Warrick, A. W., and G. W., Parkin. 1995. Analytical solution for one-dimensional drainage: Burgers' and simplified forms. Water Resources Research. 31(11): 2891-2894.
18. Wazwaz, A. M. 2008. Multiple soliton solutions and multiple singular soliton solutions for the (3+1)-dimensional Burgers equations. Applied Mathematics and Computation. 204(2): 942-948.
19. Zhao, T., C., Li, Z., Zang and Y., Wu. 2012. Chebyshev-legendve pseudo-spectral method for the generalized Burger's-Fisher equation. Applied Mathematical Modelling. 36: 1046-1056.
۲۰. اصغری پری، س.ا. و س.م. محققیان. ۱۳۹۳. بررسی عددی تاثیر ایجاد گودال‌های حفاظتی در بستر بر مهار کردن جریان غلیظ. مجله علمی پژوهشی مهندسی منابع آب. ۷(۲۳): ۱-۱۲.