فصلنامه مطالعات کمی در مدیریت

زمستان ۱۴۰۲، دوره ۱۴، شماره ۴، صفحه ۹۷-۷۱

کارایی متقاطع تصادفی در ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری با فاکتورهای نامطلوب

مهدی خدادادی‌پور[۱] و سید محمدرضا داودی[۲]*

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۸/۱۲ و تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲

چکیده

مشخص ورودی‌محور و دارای خروجی‌های نامطلوب با در نظر گرفتن خطای CCRدر این مقاله با استفاده از مدل مضربی و با استفاده از تکنیک‌های اماری وتوزیع نرمال یک مدل تصادفی جدید تحت عنوان معیار رتبه بندی میانگین جهت ارزیابی ها در تحلیل پوششی DMUکارایی داده‌های تصادفی پیشنهاد می‌گردد. همچنین کارایی متقاطع تصادفی برای رتبه بندی داده‌های تصادفی بر اساس برنامه‌ریزی قیودتصادفی و مقدار میانگین تعریف گردیده و از انجایی که وزن های بهینه منحصر فرد نیستند جهت رتبه‌بندی بهتر و اولویت دادن به انها روش خودخواهانه پیشنهاد می‌گردد . نهایتا مدل‌های پیشنهاد شده برای تعدادی واحد نیروگاه حرارتی که تولید کننده انرژی هستند و دارای ورودی ها ی مطلوب و خروجی های مطلوب و نامطلوب تصادفی هستند پیاده‌سازی گردیده و مشاهده شده با استفاده از مدل‌های پیشنهاد شده با قدرت بیشتری کارایی ها جهت جداسازی و رتبه بندی انجام گرفته است. DMUتصادفی

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی تصادفی داده‌ها، مدل ورودی محور CCR، خروجی نامطلوب تصادفی، معیار رتبه بندی میانگین، ارزیابی کارایی متقاطع تصادفی.

۱. استادیار، گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران؛ mehdikhoda@yahoo.com

۲. دانشیار، گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران، (نویسنده مسئول)؛ smrdavoodi@ut.ac.ir

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها درسال۱۹۸۷ توسط چارنز و همکاران به عنوان یک روش غیرپارامتری برای ارزیابی کارایی یک تعدادی از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) متجانس که دارای چندین ورودی و چندین خروجی می‌باشد پیشنهاد گردید. مدل ارایه شده به مدل CCRمعروف گشت که دارای بازده به مقیاس ثابت می‌باشد. در سال ۱۹۸۴بنکر و همکاران با تغییر در مدل ،CCR مدل BCCرا تعریف کردند، که این مدل دارای بازده به مقیاس متغیر است. گرچه این مدل‌ها میتوانند کارایی واحدهای تصمیم گیرنده کارا را از ناکارا تشخیص دهند اما قدرت تمیز دادن بین واحدهای کارا را ندارند. به همین دلیل روش‌های زیادی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده ارایه شده است. میتوان به روش‌های ابرکارایی ارایه شده توسط اندرسن و پیترسون(۱۹۹۳) و هادی- وینچه و اسماعیل زاده (۲۰۱۳) اسماعیل زاده و هادی - وینچه (۲۰۱۳و۲۰۱۵)، وزن مشترک ارایه شده توسط کوک و همکاران (۱۹۹۰ ،) رتبه‌بندی بر مبنای اسلکها ارایه شده توسط سی یوشی (۱۹۹۹) و کارایی متقاطع ارایه شده توسط سکستون و همکاران (۱۹۸۶) اشاره کرد.

در روش کارایی متقاطع به دلیل منحصر به فرد نبودن وزن‌های به‌دست آمده، ماتریس کارایی متقاطع منحصر بفرد نمی‌باشد. لذا برای این مشکل مفهوم هدف ثانویه مطرح گردید که دویل و گرین (۱۹۹۴) مدل‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ای که به‌ترتیب کارایی متقاطع واحدهای دیگر را بیشینه و کمینه می‌کنند را ارایه دادند. وانگ و چاین (۲۰۱۰) یک مدل کارایی متقاطع جایگزین، تحت عنوان مدل بیطرف برای به‌دست آوردن یک مجموعه متفاوت از وزن‌های ورودی و خروجی پیشنهاد کردند. همچنین جهانشاهلو و همکاران (۲۰۱۱)انتخاب وزن‌های متقارن را به عنوان یک هدف ثانویه در ارزیابی کارایی متقاطع معرفی کردندو دیمیتروف و سوتون (۲۰۱۳)مدلی پیشنهاد نمودند که در آن نه تنها کارایی فردی واحد تحت ارزیابی بیشینه شده، بلکه وزن‌های متقارن انتخاب می گردد. ریوز و سیرونت (۲۰۱۲)اهداف ثانویه را بر اساس مدل کلاسیک کارایی متقاطع برای حذف غیرمنحصر به فردی معرفی کرده و روش تهاجمی و عادلانه را پیشنهاد دادند. وو و همکاران (۲۰۱۶)مدل‌های گزینش اوزان را پیشنهاد کردند که در آنها هدف ثانویه عبارت از بهینه‌سازی وضعیت رتبه‌بندی DMUتحت ارزیابی است. همچنین وانگ و همکاران (۲۰۱۲)مدل کارایی متقاطع را با وزن متعادل ارائه کردند که هدف این روش اجتناب از تفاوتهای بزرگ ما بین وزن‌های بهینه DMUها است.حسین زاده لطفی و همکاران (۲۰۱۳)یک روش سه مرحله‌ای برای رتبه‌بندی گزینه ها ارایه دادند که به منظور حل غیر منحصر بفرد بودن وزن‌ها از هدف ثانویه استفاده می‌شود.

به هر حال مدل‌های مطرح شده در DEA همگی در حالتی که مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها همگی قطعی و کاملا مشخص باشند قابل کاربرد هستند. اما امروزه در محاسبه کارایی واحدها باید توجه داشته باشیم که می‌تواند مقدارها غیرقطعی و یا تصادفی باشند. که در این زمینه مطالعات و مقالات گسترده‌ای انتشار یافته است. هوانگ و لی (۱۹۹۶) مطالعات گسترده‌ای را در حالتی که داده‌ها تصادفی اند انجام دادند و کاو و لیو (۲۰۰۰) , لتوراسیریکول و همکاران (۲۰۰۳) نظریه فازی و دسپوتیس و اسمیرتیس (۲۰۰۲) مفهوم ناحیه اطمینان و اولیسن (۲۰۰۶) برنامه‌ریزی قیود تصادفی, برونی و همکاران (۲۰۰۹) قیود توام احتمالی و سیمار و زلنیوک(۲۰۱۰) براورد ماکزیمم درست‌نمایی مکانی ,ونگ (۲۰۱۰)و کواه و همکاران (۲۰۱۲)روش شبیه سازی مونت کارلو را در حالات غیر قطعی مطرح نمودند.

در حالتی که متغیرهای ورودی و خروجی تصادفی هستند لاند و همکاران (۱۹۹۳) از مدل برنامه‌ریزی قیود تصادفی (CCP) که توسط چانز و کوگر (۱۹۵۹) ارایه شده بود، به منظور محاسبه کارایی درحالت تصادفی استفاده کردند. آنها توزیع توام نرمال را توزیع خروجی و ورودیهایDMUها در نظر گرفته و قیود تصادفی را برای مدل توسعه دادند. همچنین اولیسین و پیترسین(۱۹۹۵) مدل قیود تصادفی در DEA را که فرم آن حالت مضربی بود را توسعه دادند. نهایتاکوپر و همکاران قیود تصادفی توام را در فرم مضربی مدل DEA پیشنهاد کردند. در زمینه تصادفی محققین بسیاری مقالات ارایه کردند که به عنوان مثال می‌توان به مقالات کوپر وهمکاران(۱۹۹۸و۲۰۰۲و۲۰۰۴) ,موریتا و سیفورد (۱۹۹۵) ,هوانگ و لی (۱۹۹۶), خدابخشی و همکاران (۲۰۱۰ و۲۰۱۱), برونی و همکاران (۲۰۰۹) ,خدابخشی و اصغر زاده (۲۰۰۹) ,حسین زاده لطفی و همکاران (۲۰۱۲) ودر سال های اخیر وانک و همکاران (۲۰۱۶) ,اولیسن و همکاران (۲۰۱۶) ,دوتوای و همکاران (۲۰۱۶) ,براندا و همکاران (۲۰۱۶), سیمار و همکاران (۲۰۱۷) ,زانجباو و همکاران (۲۰۱۷) ,چن و همکاران (۲۰۱۷) , وچارلزوکورتینر (۲۰۱۷), ولیو و همکاران (۲۰۱۷) , جرادی و روگیرو (۲۰۱۸) , پارک و همکاران(۲۰۱۸) , داوتالب و همکاران (۲۰۱۹) , چین کو و شانگ تایلی(۲۰۱۹) , وانک و همکاران (۲۰۲۰) اشاره نمود.

نگرش کلی در ارزیابی عملکرد واحدها کاهش میزان ورودی و افزایش مقدار خروجی است که موجب بهبود عملکرد و بهترین کارکرد می‌شود. مدل‌های CCR و BCC بر این مبنا استوار است. اما باید توجه داشت که سازمان‌ها همواره به دنبال حداکثر کردن خروجی و حداقل کردن ورودی نیستند زیرا خروجیها و ورودیها می‌توانند مطلوب یا نامطلوب باشند. برای مثال تعداد کالای معیوب یا میزان الودگی و ضایعات و یا انتشار گاز CO_2 در مراحل تولید خروجی

نامطلوب هستند که باید کاهش یابند. بر این اساس، مدل‌ها با ورودی یا خروجی نامطلوب باید در نظر گرفته شود.در حالتی که مقادیر ورودی و خروجیهای واحدهای تصمیم‌گیرنده قطعی هستند، مندل(۲۰۱۰) نشان داد که در ارزیابی کارایی انرژی در صنعت سیمان هند در صورتی که خروجی نامطلوب چشم‌پوشی شود، نتایج اریب در محاسبات کارایی مشاهده می‌گردد. همچنین شی و همکاران (۲۰۱۰) از خروجی نامطلوب در ارزیابی کارایی انرژی در صنایع تولیدی در چین استفاده نمود و یه و همکاران (۲۰۱۰) با در نظر گرفتن خروجی نامطلوب کل عوامل کارایی انرژی در قاره چین را با کشور تایوان با استفاده از DEA مقایسه نمودند. و همچنین وسیوشی و گتو (۲۰۱۰) یک دیدگاه جدید در DEA جهت اندازه‌گیری کارایی سوخت های فسیلی الکتریکی تولید شده با در نظر گرفتن CO2 تولید شده از واحدهای تولیدی پیشنهاد دادند. همچنین لیو و همکاران (۲۰۱۳) برای مطالعه کارایی و کارایی محیطی انرژی تولیدی ملی از DEA استفاده کردند. ایکس هونگ لی و همکاران (۲۰۱۶)با خروجی نامطلوب (انتشار گاز SO2) برای چند واحد تولید انرژی از زغال سنگ در چین با محاسبه کارایی متقاطع واحدهای تولیدی را مقایسه نمودند. و همچنین چن و همکاران (۲۰۱۷) کارایی تصادفی شرکت‌های هواپیمایی چین را با وجود انتشار گازCO2 به عنوان خروجی نامطلوب در پروازهای روزانه هواپیماها به‌دست اوردند. در حالت تصادفی جین و همکاران(۲۰۱۴) با در نظر گرفتن ورودی مطلوب و خروجی نامطلوب تصادفی با در نظر گرفتن خطا کشورهای عضو APEC را از لحاظ کارایی در تولید ناخالص ملی که تولید گاز CO2 بعنوان خروجی نامطلوب تصادفی در نظر گرفته شده است مقایسه نمودند. و همچنین ویو و همکاران (۲۰۱۳) با در نظر گرفتن خروجی نامطلوب تصادفی با یک خطای ، چند ایالت مختلف در چین را از لحاظ تولید ناخالص ملی مورد مقایسه قرار دادند که خروجی‌های نامطلوب هدر رفتن آب و انتشار گازهای سمی و تولید مواد جامد بیهوده در نظر گرفته شده است. در سالهای اخیر محققین بسیاری در این زمینه مقالات ارایه کردند که به عنوان مثال به مقالات ایزدخواه وساین (۲۰۱۸) ,لیو وهمکاران (۲۰۲۰), رین و همکاران (۲۰۲۰) اشاره نمود.

هدف از ارایه این مقاله، پیشنهاد یک مدل جدید در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی (SDEA) با حضورخروجی نامطلوب جهت ارزیابی کارایی داده‌های تصادفی می‌باشد. همچنین پیشنهاد مدلی جدید جهت محاسبه کارایی متقاطع تصادفی جهت رتبه‌بندی بهتر DMUها و اولویت‌بندی رتبه‌های به‌دست امده از روش خودخواهانه می‌باشد که تا کنون در این زمینه مطالعه‌ای صورت نگرفته و برای اولین بار مطالعه گردیده است. جهت پیاده‌سازی مدل‌های پیشنهاد شده

و محاسبه کارایی وکارایی متقاطع تصادفی ۳۲ نیروگاه های حرارتی بعنوان DMUها که دارای ورودیها مطلوب و خروجیهای مطلوب و نامطلوب تصادفی هستند، به‌کار برده می‌شود.

مبانی نظری و پیشینه پژوهش

مدل CCR ورودی محور با حضور خروجی نامطلوب

در این بخش در ابتدا به طور خلاصه مدل مضربی CCR ورودی محور با حضور خروجی نامطلوب در حالت قطعی را معرفی معرفی می نماییم. فرض کنیم n واحد تصمیم‌گیری برای ارزیابی داشته باشیم که هر کدام دارای m ورودی و s تا خروجی باشند ورودی ها و خروجی های $DMU_j\ (j = ۱, \dots, n)$ j ها با $x_{ij}\ (i = ۱, \dots, m)$و $y_{rj}\ (r = ۱, \dots, s)$ به ترتیب معرفی می گردنند.فرض کنیم $DMU_d\ d \in \{۱, \dots, n\}$ تحت ارزیابی قرار گیرد مدل CCR ورودی محور در فرم خطی و در حالت مضربی به صورت زیر تعریف گردیده:

$$
\begin{aligned}
& E^*_{dd} = max \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rd} \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{id} = ۱ \\
& \sum_{i=۱}^{m} \omega_{id} x_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rj} \geq ۰ \qquad j = ۱, \dots, n \qquad (۱) \\
& v_{id} \geq ۰ \qquad i = ۱, \dots, m \\
& u_{rd} \geq ۰ \qquad r = ۱, \dots, s
\end{aligned}
$$

در این مدل $u_{rd}\ (r = ۱, \dots, s)\ v_{id}\ (i = ۱, \dots, m)$,به ترتیب وزن‌های ورودی ها و خروجیهای می باشند. در مدل فوق مقدار E^*_{dd} مقدار کارایی CCR تعریف می‌شود. و در صورتیکه $(\omega^*_{id}, \mu^*_{rd})$ یک جواب بهینه مدل باشند اگر $E^*_{dd} = ۱$ و $u^*_{rd} > ۰\ (\forall i, r), v^*_{id}$, در این صورت DMU_d را کارا گویند. در مدل (۱) تمام خروجیها مطلوب در نظر گرفته شده و نمی‌توان ان را برای حالتی که خروجیها نامطلوب باشند بکار برد. حال فرض کنیم هر DMU_j دارای m ورودی وs خروجی مطلوب و k خروجی نامطلوب باشند. ورودیها مطلوب وخروجیهای مطلوب و خروجیهای نامطلوب به تر تیب با $x_{ij}\ (i = ۱, \dots, m), y_{rj}\ (r = ۱, \dots, s)$ و$z_{pj}\ (p = ۱, \dots, k)$ تعریف می گردند. بنابراین مدل (۱) را به مدل (۲) تبدیل و به صورت زیر در نظر می گیریم .

$$E^*_{dd} = max \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rd} - \sum_{p=۱}^{k} w_{pd} z_{pd}$$
s.t.
$$\sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{id} = ۱$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rj} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd} z_{pj} \geq ۰ \qquad j = ۱, \dots, n \qquad (۲)$$
$$v_{id} \geq ۰ \qquad j = ۱, \dots, m$$
$$u_{rd} \geq ۰ \qquad r = ۱, \dots, s$$
$$w_{pd} \geq ۰ \qquad p = ۱, \dots, k$$

در مدل (۲) $v_{id}\,(i = ۱, \dots, m)$ و $u_{rd}\,(r = ۱, \dots, s)$ و $w_{pd}\,(p = ۱, \dots, k)$ به ترتیب وزن‌های ورودیها و خروجیهای مطلوب و خروجیهای نامطلوب تعریف می‌شود.

فرم تصادفی مدل مطرح شده

برنامه‌ریزی تصادفی یک مسئله بهینه‌سازی است که در آن تمام یا تعدادی از پارامترهای مسئله تصادفی میباشند. این مدل‌ها با توجه به نیاز مدل‌های بهینه‌سازی در مدل‌های خطی با عدم قطعیت به وجود آمده‌اند. دنتزیگ (۱۹۵۵) و چارنز و همکاران(۱۹۵۸) از پیشگامان این زمینه هستند. آنها مشاهده کردند در بسیاری از مدل‌های خطی برخی پارامترها به طور دقیق مشخص نیستند بلکه بطور احتمالی معلوم میباشند. بنابراین آنها پیشنهاد دادند که باید دیدگاه تصادفی را با قطعی جایگزین کرد، با این فرض که ضرایب غیر معلوم متغیرهای تصادفی هستند که دارای تابع توزیع احتمال مشخص میباشند. حالت‌های مختلفی برای مسئله برنامه‌ریزی تصادفی وجود دارد. مسئله برنامه‌ریزی با قیود احتمالی یکی از حالت‌های مسائل برنامه‌ریزی تصادفی است که در آن قیود به صورت احتمالی می باشند، یعنی احتمالی را برای نقض شدن این قیود در نظر می گیریم.

در واقع مدل معرفی شده (۲) قابلیت اندازه‌گیری کارایی DMU ها وقتی ورودی ها و خروجی ها مطلوب و نامطلوب به طور تصادفی تغییر می‌کنند را ندارند. پس لازم است مدل‌های جدیدی بر اساس آنها پیشنهاد گردد. فرض کنید متغیرهای تصادفی $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{z}_{pj}$, $\tilde{y}_{rj}$, به ترتیب ورودی ها و خروجیهای مطلوب و نامطلوب تصادفی باشند بطوریکه هر کدام دارای توزیع نرمال به صورت زیر باشند.

$$\tilde{x_{ij}} \sim N\left(\bar{x_{ij}}, \left(\sigma_{ij}{}^{x}\right)^{۲}\right) \qquad \forall \text{ i, j}$$
$$\tilde{y_{rj}} \sim N\left(\bar{y_{rj}}, \left(\sigma_{rj}{}^{y}\right)^{۲}\right) \qquad \forall \text{ r, j}$$

$$\tilde{z_{pj}} \sim N\left(\bar{z_{pj}}, \left(\sigma_{pj}{}^{z}\right)^{۲}\right) \qquad \forall p, j$$

و همچنین هر DMU دارای ماتریس واریانس کوواریانس $\sum$ باشند که قطر اصلی ان واریانس متغییرها وبقیه درایه ها کوواریانس بین متغییرها را نشان می‌دهد . $\bar{y_{rj}}$, $\bar{z_{pj}}$ $\bar{x_{ij}}$ ،به ترتیب میانگین متغییرهای تصادفی و $\left(\sigma_{ij}{}^{x}\right)^{۲}$, $\left(\sigma_{rj}{}^{y}\right)^{۲}\left(\sigma_{pj}{}^{z}\right)^{۲}$ به ترتیب واریانس متغییرهای تصادفی $\tilde{y_{rj}}$, $\tilde{z_{pj}}\tilde{x_{ij}}$, نشان می دهند. بنابراین با در نظر گرفتن مقدار خطای α (ضریب اطمینان $(۱ - \alpha)$) فرم کلی مدل برنامه‌ریزی تصادفی با تابع هدف و قیود تصادفی به صورت زیر خواهد بود.

$$E^{*}{}_{dd} = max\ E\left(\sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y_{rd}} - \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z_{pd}}\right)$$
$$s.t.$$
$$E\left(\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x_{id}}\right) = ۱$$
(۳)
$$P\left(\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x_{ij}} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y_{rj}} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z_{pj}} \geq ۰\right) \geq ۱ - \alpha \qquad j = ۱, \dots, n$$
$$v_{id} \geq ۰ \qquad i = ۱, \dots, m$$
$$u_{rd} \geq ۰ \qquad r = ۱, \dots, s$$
$$w_{pd} \geq ۰ \qquad p = ۱, \dots, k$$

در مدل فوق E و P به ترتیب نشانگر میانگین تابع هدف تصادفی و احتمال قیود تصادفی می باشند. و طبق مفاهیم احتمال هر چه مقدار میانگین تابع هدف بیشتر باشد نشانگر کاراتر بودن DMU_d خواهد بود و برعکس.

لازم است مدل (۳) را به فرم غیر تصادفی درجه دوم تبدیل می نماییم تا بتوانیم جواب های بهینه و مقدار کارایی تصادفی و مقادیر کارایی متقاطع تصادفی را محاسبه نماییم. با توجه به خاصیت خطی میانگین متغیر تصادفی رابطه زیر را خواهیم داشت.

$$E\left(\sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y_{rd}} - \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z_{pd}}\right) = \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\bar{y_{rd}} - \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\bar{z_{pd}}$$
$$E\left(\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x_{id}}\right) = \sum_{i=۱}^{m} v_{id}\bar{x_{id}} = ۱$$

همچنین با توجه به این که ترکیب خطی از متغییرهای تصادفی نرمال دارای توزیع نرمال می‌باشد. پس

$$\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x_{ij}} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y_{rj}} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z_{pj}}$$

دارای توزیع نرمال با میانگین E_j و واریانس $\sigma_j{}^{۲}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$E_j = \sum_{i=۱}^{m} v_{id}\bar{x_{ij}} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\bar{y_{rj}} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\bar{z_{pj}}$$

$$\sigma_j^{۲} = Var\left(\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z}_{pj}\right)$$
$$= Cov\left(\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z}_{pj}\ ,\ \sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z}_{pj}\right)$$
$$= \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{m} v_{id}v_{kd}\ cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}) + \sum_{r=۱}^{s}\sum_{k=۱}^{s} u_{rd}u_{kd}\ cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{kj}) +$$
$$\sum_{p=۱}^{k}\sum_{q=۱}^{k} w_{pd}w_{qd}\ cov(\tilde{z'}_{pj}, \tilde{z}_{qj}) - ۲\sum_{i=۱}^{m}\sum_{r=۱}^{s} v_{id}u_{rd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}\right) +$$
$$۲\sum_{i=۱}^{m}\sum_{p=۱}^{k} v_{id}w_{pd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{z}_{pj}\right) - ۲\sum_{r=۱}^{s}\sum_{p=۱}^{k} u_{rd}w_{pd}ov\left(\tilde{y}_{rj}, \tilde{z}_{pj}\right) \quad j = ۱, \dots, n$$

جهت محاسبه احتمال در مدل (۳) لازم است ان را به صورت نرمال استانداردZ تبدیل نماییم.

$$P\left(\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z}_{pj} \geq ۰\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\tilde{z}_{pj} - E_j}{\sigma_j} \geq \frac{-E_j}{\sigma_j}\right) \geq ۱ - \alpha$$
$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{-E_j}{\sigma_j}\right) \geq ۱ - \alpha \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{E_j}{\sigma_j}\right) \leq \alpha$$
$$\Rightarrow \phi\left(\frac{-E_j}{\sigma_j}\right) \leq \alpha \Rightarrow \Phi^{-۱}(\alpha) \geq \frac{-E_j}{\sigma_j}$$
$$\Rightarrow E_j + \sigma_j\Phi^{-۱}(\alpha) \geq ۰,$$

که $\phi(\alpha)$ تابع توزیع نرمال استاندارد و $\phi^{-۱}(\alpha)$ معکوس تابع توزیع نرمال استاندارد در مقدار α می‌باشد. نهایتا مدل تصادفی پیشنهادی به صورت زیر خواهد شد.

$$E^*_{dd} = max\ \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pd}$$
s.t.
$$\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\bar{x}_{id} = ۱$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj} + \sigma_j\Phi^{-۱}(\alpha) \geq ۰ \qquad j = ۱, \dots, n$$
$$\sigma_j^{۲} = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{m} v_{id}v_{kd}\ cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}) + \sum_{r=۱}^{s}\sum_{k=۱}^{s} u_{rd}u_{kd}\ cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{kj}) +$$
$$\sum_{p=۱}^{k}\sum_{q=۱}^{k} w_{pd}w_{qd}\ cov(\tilde{z'}_{pj}, \tilde{z}_{qj}) - ۲\sum_{i=۱}^{m}\sum_{r=۱}^{s} v_{id}u_{rd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}\right) +$$
$$۲\sum_{i=۱}^{m}\sum_{p=۱}^{k} v_{id}w_{pd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{z}_{pj}\right) - ۲\sum_{r=۱}^{s}\sum_{p=۱}^{k} u_{rd}w_{pd}ov\left(\tilde{y}_{rj}, \tilde{z}_{pj}\right) \quad j = ۱, \dots, n$$

(۴)

$v_{id} \geq ۰ \quad i = ۱, \dots, m$
$u_{rd} \geq ۰ \quad r = ۱, \dots, s$
$w_{pd} \geq ۰ \quad p = ۱, \dots, k$
$\sigma_j \geq ۰ \quad j = ۱, \dots, n$

تعریف ۱: جواب شدنی $(v^*_{id}, u^*_{rd}, w^*_{pd})$ را یک جواب بهینه مدل (۴) گویند اگر نامساوی

$\sum_{r=۱}^{s} u^*_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=۱}^{k} w^*_{pd}\bar{z}_{pd} \geq \sum_{r=۱}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=۱}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pd}$

برای هر جواب شدنی (v_{id}, u_{rd}, w_{pd}) برقرار باشد.

در مدل پیشنهادی (۴) معیار زیر را جهت رتبه بندی کارایی تصادفی تعریف می کنیم.

معیار رتبه بندی میانگین

بیشتربودن مقدار E^*_{dd} به این معنای این است که واحد تصمیم‌گیری کاراتر تصادفی و رتبه بهتری خواهد داشت .

همان‌طور که مشاهده می‌گردد مقدار کارایی تصادفی بر خلاف حالت قطعی به نوع توزیع متغیرها , میانگین , واریانس و کوورایانس بین متغیر ها و مقدار خطای در نظر گرفته شده دارد که با تغییر مقادیر انها مقدار کارایی تصادفی تغییر خواهد کرد.

از حل مدل (۴) برای هر DMU_d می‌توان کارایی تصادفی را به‌دست اورد ولی جهت جدا سازی بهتر کارایی متقاطع تصادفی را می‌توان درنظر گرفت.اگر جواب های بهینه مدل (۴) برای $(v^*_{id}, u^*_{rd}, w^*_{pd}) \forall i, r, p,$ DMU_dباشد کارایی متقاطع تصادفی DMU_j بر حسب DMU_d به صورت

$$E^*_{dj} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u^*_{rd}\bar{y}_{rj} - \sum_{p=۱}^{k} w^*_{pd}\bar{z}_{pj}}{\sum_{i=۱}^{m} v^*_{id}\bar{x}_{ij}} \qquad (۵)$$

محاسبه می‌گردد. بنابراین رتبه کارایی متقاطع تصادفی هر DMU_j برابر میانگن E^*_{dj} ها می‌باشد

$$E^*_j = \frac{۱}{n}\sum_{d=۱}^{n} E^*_{dj} \qquad (۶)$$

این مقدار به عنوان یک اندازه جدید کارایی تصادفی برای هر DMU خواهد بود.

مدل اولویت‌بندی رتبه‌های تصادفی

با توجه به اینکه جواب های بهینه مدل ممکنه یکتا نباشد در این حالت امتیاز های کارایی متقاطع تصادفی تا حدی دلخواهانه به‌دست می‌آید. برای حل این مشکل یک مدل جدید برای اولویت بندی رتبه ها تصادفی معرفی می‌گردد. این مدل نه فقط مقدار کارایی تصادفی را حفظ می‌کند بلکه کارایی متقاطع تصادفی را افزایش می‌دهد.

$$R^*_{pd} = min \sum_{j=1}^{n} z_j$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{id} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj} + \sigma_j \Phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} v_{id}v_{kd}\, cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}\right) + \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} u_{rd}u_{kd}\, cov\left(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{kj}\right) + \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} w_{pd}w_{qd}\, cov\left(\tilde{z'}_{pj}, \tilde{z}_{qj}\right) - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} v_{id}u_{rd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}\right) + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} v_{id}w_{pd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{z}_{pj}\right) - 2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k} u_{rd}w_{pd}ov\left(\tilde{y}_{rj}, \tilde{z}_{pj}\right)$$

$$j = 1, \dots, n \qquad (۷)$$

$$E^*_{dd}\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj} + s_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$s_j \leq M \times z_j \qquad j = 1, \dots, n$$

$$z_j \epsilon \{0,1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$s_j\ free \qquad j = 1, \dots, n$$

$$v_{id} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

$$u_{rd} \geq 0 \qquad r = 1, \dots, s$$

$$w_{pd} \geq 0 \qquad p = 1, \dots, k$$

$$\sigma_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

ایده اصلی مدل (۹) این است که اولین و دومین قید تضمین می‌کند که کارایی تصادفی DMU_d حفظ شود. در ششمین قید به راحتی مشاهده می‌شود که

$$E^*_{dd}\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj} = -s_j$$

اگر $s_j > 0$ باشد پس

$$E^*_{dd} < \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} - \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij}} = E^*_{dj}$$

به این معنی که کارایی متقاطع DMU_j بر اساس DMU_d بزرگتر از کارایی تصادفی DMU_d خواهد بود و مشابها اگر s^*_j>۰باشد E^*_{dd} >E^*_{dj} یعنی کارایی متقاطع تصادفی DMU_j بر اساس DMU_d کوچکتر از کارایی تصادفی DMU_dخواهد شد.

در هفتمین قید، مقدار M بزرگترین مقدار مثبت تعریف می‌شود. اگر $s^*_j \geq$ ۰ باشد پس مقدار z^*_j یک خواهد بود و اگر s^*_j>۰مقدار z^*_j صفر می‌گردد. و چون تابع هدف مینیمم می‌باشد پس بیشترین مقادیر z^*_j صفر خواهدشد یعنی s^*_j>۰ بیشتر مشاهده می‌گردد. در این صورت کارایی های متقاطع تصادفی DMU_j ها نسبت به کارایی DMU_dکمتر خواهند شد .

در مدل (۹) نیز جواب های بهینه ممکن است یکتا نباشند. پس مدل خودخواهانه زیر را پیشنهاد می کنیم که علاوه براین که کارایی تصادفی حفظ می‌شود، کارایی متقاطع سایر DMU ها را حداقل می نماید. این مدل، انحراف کارایی سایر DMU_j ها را افزایش می‌دهد تا کارایی متقاطع تصادفی DMU_d نسبت به بقیه افزایش یابد در حالیکه کارایی تصادفی E^*_{dd} حفظ می‌گردد.

$$max \sum_{j=1}^{n} \Psi_j$$

s.t

$$\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{id} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pd} = E^*_{dd}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj} + \sigma_j \Phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} v_{id}v_{kd}\, cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}\right) + \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} u_{rd}u_{kd}\, cov\left(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{kj}\right) + \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} w_{pd}w_{qd}\, cov\left(\tilde{z'}_{pj}, \tilde{z}_{qj}\right) - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} v_{id}u_{rd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}\right) + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} v_{id}w_{pd}cov\left(\tilde{x}_{ij}, \tilde{z}_{pj}\right) - 2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k} u_{rd}w_{pd}ov\left(\tilde{y}_{rj}, \tilde{z}_{pj}\right)$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj} - \Psi_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$E^*_{dd}\sum_{i=1}^{m} v_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} w_{pd}\bar{z}_{pj} + s_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = R^*_{pd}$$

$$s_j \leq M \times z_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad (8)$$

$$z_j \epsilon \{0,1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$s_j \; free \qquad j = ۱, \dots, n$$
$$v_{id} \geq ۰ \qquad i = ۱, \dots, m$$
$$u_{rd} \geq ۰ \qquad r = ۱, \dots, s$$
$$w_{pd} \geq ۰ \qquad p = ۱, \dots, k$$
$$\text{دل} \quad \Psi_j \geq ۰ \qquad j = ۱, \dots, n$$

(۸) مقدار R^*_{pd} همان مقداری است که از مدل (۷) به‌دست امده است. بنابراین اگر $\left(v^*_{id}, u^*_{rd}, w^*_{pd}\right)$ یک جواب بهینه مدل (۱۰) باشد کارایی متقاطع تصادفی DMU_j بر اساس DMU_d به صورت زیر است:

$$\theta'_{dj} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u^*_{rd} \bar{y}_{rj} - \sum_{p=۱}^{k} w^*_{pd} \bar{z}_{pj}}{\sum_{i=۱}^{m} v^*_{id} \bar{x}_{ij}} \qquad (۹)$$

بنابراین برای هر DMU_j میانگین کارایی متقاطع تصادفی برابر با میانگین θ'_{dj}

$$\theta_j = \frac{۱}{n} \sum_{d=۱}^{n} \theta'_{dj} \qquad (۱۰)$$

تعریف شده یک اندازه جدید کارایی متقاطع تصادفی برای DMU_j ها خواهد بود.

روش‌شناسی پژوهش

در این بخش با توجه به اینکه اطلاعات آماری در نیروگاه های داخلی کشور ایران در دسترس نبودند. مدل‌های پیشنهادی را برای ۳۲ نیروگاه حرارتی درکشور آنگولا بکار برده و آنها را مورد ارزیابی قرار میدهیم. هر نیروگاه حرارتی بعنوان یک واحد تصمیم‌گیری، دو متغیر ورودی مطلوب و سه متغیر خروجی دارد که دو تا از خروجی‌ها نامطلوب هستند. اولین متغیر ورودی($\tilde{x}_۱$)، ظرفیت تولیدی نیروگاه حرارتی بر حسب MW و دومین متغیر ورودی ($\tilde{x}_۲$) تعداد کارکنان در نیروگاه می‌باشد. همچنین اولین متغیر خروجی ($\tilde{y}_۱$) مطلوب، مقدار انرژی تولید شده بر حسب MWH و دومین خروجی ($\tilde{z}_۱$) نامطلوب است مقدار انتشار گاز CO2 بر حسب تن در سال و سومین خروجی ($\tilde{z}_۲$) نامطلوب است میزان آلودگی آب بر حسب لیتر در سال می‌باشد. در این مطالعه، اطلاعات با استفاده از نرم‌افزار MATLAB مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

یافته‌های پژوهش

طبق جمع‌آوری اطلاعات از سال ۲۰۱۰ تا ۲۰۲۲ (باروس و وانکه (۲۰۱۷)) در مورد هر نیروگاه حرارتی با استفاده از آزمون نیکویی برازش متغیرها دارای توزیع تقریبا نرمال می باشند. مقادیر میانگین ها و انحراف معیارها و ماتریس واریانس کوواریانس بر اساس داده‌ها برای هر نیروگاه تخمین زده شدند که در جدول (۱)و (۲) برآورده های میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال برای ورودی ها و خروجی ها اورده شده است.

جدول ۱- برآورد پارامترهای ورودی ها

DMU	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
۱	N(72.2,3.2)	N(46.4,1.3)
۲	N(9.4,1.3)	N(42.8,3.7)
۳	N(10.4,4.3)	N(24.8,1.7)
۴	N(36.2,1.7)	N(17.2,4.7)
۵	N(22.6,5.8)	N(32.4,4.3)
۶	N(31.6,4.3)	N(71,3.5)
۷	N(7,5.5)	N(32.6,3.3)
۸	N(19.4,22.2)	N(50.2,16.2)
۹	N(7,2.5)	N(22.2,3.2)
۱۰	N(12.6,5.3)	N(18.4,4.3)
۱۱	N(37.4,4.3)	N(35.8,4.7)
۱۲	N(8.4,1.3)	N(43.4,2.3)
۱۳	N(32.6,5.8)	N(25.4,4.3)
۱۴	N(32.4,6.8)	N(52.6,5.8)

ادامه جدول ۱- برآورد پارامترهای ورودی ها

DMU	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
۱۵	N(55.2,24.7)	N(69.2,20.2)
۱۶	N(18,6)	N(25.8,6.7)
۱۷	N(13.4,7.3)	N(28.4,7.4)
۱۸	N(11.8,2.2)	N(36.4,1.8)
۱۹	N(19,3.5)	N(19.6,2.3)
۲۰	N(21.8,2. 2)	N(17.6,8.3)
۲۱	N(31.6,3.3)	N(39,2.5)
۲۲	N(18.2,9.7)	N(32.8,5.2)
۲۳	N(12.2,3.2)	N(47.2,2.2)
۲۴	N(18.4,4.3)	N(44.4,4.2)
۲۵	N(9.8,1.7)	N(31,11)
۲۶	N(12.6,3.8)	N(22.6,5.8)
۲۷	N(20.4,3.3)	N(27.2,3.7)
۲۸	N(17.8,3.7)	N(22.4,4.3)
۲۹	N(13.2,5.7)	N(37.8,3.7)
۳۰	N(74.2,16.2)	N(19,17.5)
۳۱	N(22.4,4.3)	N(32.4,5.3)
۳۲	N(۴۲.۲,۲.۲)	N(۱۷.۴,۲.۳)

ماخذ: یافته‌های تحقیق

جدول ۲- برآورد پارامترهای خروجی ها

DMU	$\tilde{y}_1$	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$
۱	N(82.4,5.8)	N(1.86,0.059)	N(1100.54,3229.699)
۲	N(11.6,1.8)	N(2.058,0.0305)	N(1111.6,3294.9458)
۳	N(11.6,1.8)	N(2.118,0.0132)	N(1134.05,3429.573)
۴	N(42.8,8.7)	N(2.098,0.0132)	N(1122.77,3361.7017)
۵	N(32.8,8.7)	N(2.142,.0128)	N(1120.3,3346.993)

ادامه جدول ۲- برآورد پارامترهای خروجی ها

DMU	$\tilde{y}_1$	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$
6	N(40.72,3.8)	N(2.088,0.0146)	N(1116.69,3325.3806)
7	N(22,3.5)	N(2.054,0.0123)	N(1097.01,2923.744)
8	N(94.4,26.3)	N(2.032,0.012)	N(1105.59,3259.46)
9	N(16.6,1.8)	N(2.028,0.0117)	N(1101.89,3237.826)
10	N(32,3.5)	N(1.996,0.0125)	N(1134.05,3429.573)
11	N(42.4,5.8)	N(1.974,0.0132)	N(1145.45,3498.917)
12	N(11.2,0.7)	N(1.954,0113)	N(1132.85,3422.625)
13	N(42.4,5.8)	N(1.934,0.0103)	N(1116.7,3325.458)
14	N(42.4,5.8)	N(1.914,0.0102)	N(1112.83,3302.534)
15	N(84,21)	N(1.894,0.0104)	N(1099.33,3223.084)
16	N(32,3.5)	N(1.876,0.0097)	N(1100.18,3227.846)
17	N(32.2,4.7)	N(1.858,0.0099)	N(1111.59,3336.026)
18	N(15.4,0.3)	N(1.854,0.0095)	N(1112.83,3302.446)
19	N(21.6,1.8)	N(1.18,0.1558)	N(1114.07,3309.938)
20	N(36.2,2.7)	N(1.668,0.1409)	N(1115.31,3317.273)
21	N(32,3.5)	N(1.822,0.0098)	N(1112.97,3303.424)
22	N(32.4,5.8)	N(1.96,0.0154)	N(1121.31,3352.749)
23	N(21.6,1.8)	N(1.948,0.0125)	N(1105.33,3258.181)
24	N(22,3.5)	N(1.906,0.0112)	N(1124.39,3371.381)
25	N(11.4,0.3)	N(1.882,0.0107)	N(1152.51,3544.008)
26	N(16.2,0.7)	N(1.864,0.0103)	N(1247.23,4148.546)
27	N(32,3.5)	N(1.844,0.0103)	N(1314.39,4606.879)
28	N(21.6,1.8)	N(1.87,0.0103)	N(1252.06,4180.458)
29	N(22,3.5)	N(1.848,0.0108)	N(1221.56,3979.198)
30	N(94.4,26.3)	N(2.066,0.0259)	N(1694.8,7660.116)
31	N(32,3.5)	N(2.118,0.0117)	N(1306.15,4549.586)
32	N(45.2,0.7)	N(1.968,0.1258)	N(1190.47,3779.2)

ماخذ: یافته‌های تحقیق

و همچنین برای هرDMU یک ماتریس واریانس کوواریانس متقارن براورد شده که به عنوان مثال برای DMU_1 درایه های ماتریس در جدول (۳) امده است . مقداردرایه ها نشان دهنده ارتباط مستقیم بین متغییر های ورودی و خروجی را نشان می‌دهد.

جدول ۳- داریه‌های ماتریس DMU_1

covariance	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$
$\tilde{x}_1$	۳.۲	۱.۹	۴.۱۵	۰.۱۴	۹۷.۹۹۶
$\tilde{x}_2$	۱.۹	۱.۳	۲.۵۵	۰.۰۵۵	۵۹.۸۱۷
$\tilde{y}_1$	۴.۱۵	۲.۵۵	۵.۸	۰.۰۳۵	۱۱۹.۰۱۲
$\tilde{z}_1$	۰.۱۴	۰.۰۵۵	۰.۰۳۵	۰.۰۵۹	۷.۲۲۰۵
$\tilde{z}_2$	۹۷.۹۹۶	۵۹.۸۱۷	۱۱۹.۰۱۲	۷.۲۲۰۵	۳۲۲۹.۶۹۹

ماخذ: یافته‌های تحقیق

برای مقادیر مختلف خطا از مدل (۴) کارایی تصادفی محاسبه شده (با استفاده از برنامه‌نویسی متلب) که در جدول (۴) مقدار کارایی و رتبه واحدها آمده است.

جدول ۴- مقدارکارایی تصادفی DMUها

α / DMU	۰.۵	رتبه	۰.۲	رتبه	۰.۰۵	رتبه
۱	۱	۱	۰.۹۶۳۰۸۸	۹	۰.۹۵۳۸۱	۹
۲	۰.۷۴۴۴۴۶	۱۷	۰.۶۸۴۵۹۹	۲۲	۰.۶۷۱۸۰۲	۲۲
۳	۰.۸۵۵۷۶۷	۱۲	۰.۸۳۳۵۷۲	۱۳	۰.۸۳۰۲۵۲	۱۳
۴	۱	۱	۰.۹۸۵۶۵۶	۶	۰.۹۸۰۲۱۳	۶
۵	۰.۶۳۳۴۶۲	۲۲	۰.۵۷۵۵۱۲	۲۶	۰.۵۷۳۱۱۹	۲۶
۶	۰.۳۷۹۹۴۹	۲۸	۰.۳۷۹۰۵۷	۳۲	۰.۳۷۸۰۷۴	۳۲
۷	۱	۱	۰.۹۴۶۷۱۷	۱۰	۰.۹۳۲۶۴۱	۱۰
۸	۱	۱	۰.۹۹۹۷۴۴	۲	۰.۹۹۹۶۶۸	۲

ادامه جدول ۴- مقدارکارایی تصادفی DMUها

α / DMU	۰.۵	رتبه	۰.۲	رتبه	۰.۰۵	رتبه
۹	۰.۹۹۹۹۹۹	۶	۰.۹۸۵۷۵۴	۵	۰.۹۸۱۸۹۳	۵
۱۰	۱	۱	۰.۹۸۹۲۰۴	۳	۰.۹۸۶۱۲۷	۳
۱۱	۰.۵۷۳۵۸۱	۲۳	۰.۵۶۷۴۲۱	۲۷	۰.۵۶۵۹۶۵	۲۷
۱۲	۰.۹۵۷۱۸۳	۸	۰.۷۶۸۱۶۲	۱۷	۰.۷۳۶۰۱۲	۱۷
۱۳	۰.۷۸۴۹۴۱	۱۵	۰.۷۶۹۱۳۱	۱۶	۰.۷۶۴۱۵۶	۱۵
۱۴	۰.۴۸۲۸۳۶	۲۷	۰.۴۵۰۷۵۲	۳۱	۰.۴۵۰۳۳۱	۳۱
۱۵	۰.۶۸۳۲۴۴	۲۰	۰.۶۵۹۰۶۵	۲۳	۰.۶۵۴۹۳۸	۲۳
۱۶	۱	۱	۰.۷۴۷۸۴۴	۱۸	۰.۷۳۴۵۶۴	۱۸
۱۷	۰.۹۰۳۹۸۶	۱۰	۰.۸۶۳۵۱۳	۱۲	۰.۸۵۲۷۹۳	۱۲
۱۸	۰.۸۰۱۸۸۴	۱۴	۰.۶۹۷۳۸۸	۱۹	۰.۶۷۵۵۴۰	۲۱
۱۹	۱	۱	۰.۹۸۸۵۹۷	۴	۰.۹۸۴۸۵۹	۴
۲۰	۰.۹۹۹۹۹۸	۷	۰.۹۷۹۹۰۸	۷	۰.۹۷۴۵۴۲	۷
۲۱	۰.۵۱۷۷۶۳	۲۶	۰.۴۷۴۸۱۳	۳۰	۰.۴۷۰۵۴۸	۳۰
۲۲	۰.۶۷۰۸۸۷	۲۱	۰.۶۴۲۹۷۳	۲۴	۰.۶۳۶۸۱۹	۲۴
۲۳	۰.۶۹۰۹۶۳	۱۹	۰.۶۲۰۶۳۹	۲۵	۰.۶۰۷۳۹۸	۲۵
۲۴	۰.۵۲۱۰۱۹	۲۵	۰.۵۰۵۶۳۳	۲۹	۰.۵۰۱۷۱۶	۲۹
۲۵	۰.۹۲۵۱۰۴	۹	۰.۷۸۷۳۸۷	۱۵	۰.۷۶۳۰۳۵	۱۶
۲۶	۰.۸۹۶۳۳۲	۱۱	۰.۸۷۶۰۶۲	۱۱	۰.۸۶۹۷۵۶	۱۱
۲۷	۰.۷۰۶۶۹۸	۱۸	۰.۶۸۸۵۳۹	۲۱	۰.۶۸۳۴۸۹	۱۹
۲۸	۰.۸۱۹۶۶۵	۱۳	۰.۸۰۳۳۷۲	۱۴	۰.۷۹۸۰۹۹	۱۴
۲۹	۰.۷۵۱۲۷۳	۱۶	۰.۶۸۹۶۸۷	۲۰	۰.۶۷۶۱۴۱	۲۰
۳۰	۱	۱	۰.۹۹۹۷۷۳	۱	۰.۹۹۹۶۹۹	۱
۳۱	۰.۵۶۷۵۸۹	۲۴	۰.۵۶۲۹۳۰	۲۸	۰.۵۶۱۹۴۶	۲۸
۳۲	۱	۱	۰.۹۷۴۵۲۱	۸	۰.۹۶۶۷۹۴	۸

ماخذ: یافته‌های تحقیق

با توجه به اینکه تابع معکوس نرمال استاندارد در خطای ۰٫۵ برابر صفر می‌باشد ، پس در مدل(۴) نقش واریانس σ_j^2 در محاسبه کارایی تصادفی حذف شده و در واقع کارایی تصادفی فقط بر حسب میانگین متغیرها محاسبه میگردد. پس با توجه به مقادیرکارایی تصادفی در مقدار خطا ۰٫۵ مشاهده می‌شود DMU_1, DMU_4, DMU_7, DMU_8, DMU_{10}, DMU_{16}, DMU_{19}, DMU_{30} ,DMU_{32} فقط کارایی تصادفی هستند و همچنین مشاهده میگردد که با افزایش اطمینان (کاهش خطا) کارایی تصادفی هرواحدکاهش می‌یابد. به‌دلیل اینکه با کاهش مقدار خطا مقدار تابع معکوس نرمال استاندارد در مدل نیزکاهش می‌یابد.

تحلیل حساسیت روی پارامترهای اصلی مدل

تحلیل حساسیت روی حذف برخی متغیرهای ورودی و خروجی که قابل حذف و در پروسه تولید خللی ایجاد نمی‌کند مطرح و اثر آن‌ها روی کارایی بررسی می‌شود. در مطالعه موردی دو متغییر ورودی مطرح شده ظرفیت نیروگاه‌ها و تعداد کارکنان لازمه تولید انرژی و قابل حذف نخواهند بود و متغیرخروجی مطلوب مقدار انرژی تولید شده نیز لازمه حضور در مدل است و حذف یکی از این سه متغیر در مدل و محاسبه کارایی و اثر آن‌ها روی کارایی امری غیرواقعی و نادرست است. فقط می‌توان در مورد متغییرهای خروجی نامطلوب مقدار انتشار گاز CO2 و میزان آلودگی آب و حذف آن‌ها و تاثیر بر کارایی تحلیل حساسیت را بررسی نمود.

درجدول (۵) به‌عنوان مثال برای خطای ۰٫۵ در ستون دوم و سوم همان طور گه در جدول ۴ مشاهده می‌شود کارایی واحدها محاسبه و رتبه بندی شده‌اند. در ستون چهارم و پنجم میزان کارایی واحدها و رتبه بندی انها وقتی متغیر خروجی نامطلوب انتشار گاز CO2 حذف گردیده محاسبه شده و در ستون ششم و هفتم مشابها وقتی متغیر خروجی نامطلوب میزان آلودگی آب حذف شده، کارایی و رتبه بندی واحدها محاسبه شده است . همان‌طورکه مشاهده می‌گردد با حذف آن‌ها برخی واحدها کارا به غیر کارا و برعکس تبدیل شده‌اند و اثر حذف آن‌ها کاملا تاثیر بر کارایی واحدها دارند.

جدول ۵-کارایی واحدها با حذف برخی متغیرها

DMU	کارایی	رتبه	کارایی	رتبه	کارایی	رتبه
۱	۱	۱	۰.۸۸۲۲۷	۸	۰.۸۵۸۱۸	۱۲
۲	۰.۷۴۴۴۴۶	۱۷	۰.۷۴۴۳۹۵	۱۵	۰.۷۱۶۳۵	۱۹
۳	۰.۸۵۵۷۶۷	۱۲	۰.۸۴۵۸۹	۹	۰.۸۳۴۴۰	۱۳
۴	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۵	۰.۶۳۳۴۶۲	۲۲	۰.۶۰۶۲۳۲	۲۰	۰.۵۸۳۳۴	۲۴
۶	۰.۳۷۹۹۴۹	۲۸	۰.۳۸۲۶۹۴	۲۴	۰.۳۶۸۷۸	۳۰
۷	۱	۱	۱	۱	۰.۹۷۵۰۶	۷
۸	۱	۱	۱	۱	۰.۹۹۴۰۶	۳
۹	۰.۹۹۹۹۹۹	۶	۰.۹۹۹۹۹۹	۲	۰.۹۸۷۵۳	۵
۱۰	۱	۱	۰.۹۹۹۹۹۲	۳	۱	۱
۱۱	۰.۵۷۳۵۸۱	۲۳	۰.۵۷۳۵۸۱	۲۱	۰.۵۶۵۴۳	۲۵
۱۲	۰.۹۵۷۱۸۳	۸	۰.۹۵۷۹۹۶	۴	۰.۹۱۲۰۲	۸
۱۳	۰.۷۸۴۹۴۱	۱۵	۰.۷۸۴۹۷۴	۱۳	۰.۷۷۲۳۳	۱۶
۱۴	۰.۴۸۲۸۳۶	۲۷	۰.۴۷۶۴۸۸	۲۳	۰.۴۵۹۳۰	۲۹
۱۵	۰.۶۸۳۲۴۴	۲۰	۰.۶۳۷۴۱۲	۱۹	۰.۶۲۴۱۸	۲۳
۱۶	۱	۱	۰.۸۳۵۱۳۵	۱۰	۰.۸۰۰۸۲	۱۵
۱۷	۰.۹۰۳۹۸۶	۱۰	۰.۹۰۳۹۸۶	۶	۰.۸۸۳۱۵	۱۰
۱۸	۰.۸۰۱۸۸۴	۱۴	۰.۸۰۱۸۸۴	۱۲	۰.۷۶۶۳۵	۱۷
۱۹	۱	۱	۱	۱	۰.۹۸۹۰۷	۴
۲۰	۰.۹۹۹۹۹۸	۷	۱	۱	۱	۱
۲۱	۰.۵۱۷۷۶۳	۲۶	۰.۵۰۵۶۸۷	۲۲	۰.۴۸۵۴۶	۲۸
۲۲	۰.۶۷۰۸۸۷	۲۱	۰.۶۶۸۹۱۷	۱۸	۰.۶۴۹۵۲	۲۲
۲۳	۰.۶۹۰۹۶۳	۱۹	۰.۶۹۱۱۵۳	۱۷	۰.۶۵۳۶۸	۲۱
۲۴	۰.۵۲۱۰۱۹	۲۵	۰.۵۲۱۰۱۹	۲۳	۰.۵۰۸۴۱	۲۷
۲۵	۰.۹۲۵۱۰۴	۹	۰.۹۲۵۱۰۳	۵	۰.۸۸۳۳۱	۹
۲۶	۰.۸۹۶۳۳۲	۱۱	۰.۸۹۶۹۹۵	۷	۰.۸۸۰۹۹	۱۱

۲۰	۰.۶۹۲۵۷	۱۶	۰.۷۰۶۶۹۸	۱۸	۰.۷۰۶۶۹۸	۲۷
۱۴	۰.۸۰۷۲۲	۱۱	۰.۸۲۰۸۶۲	۱۳	۰.۸۱۹۶۶۵	۲۸
۱۸	۰.۷۲۳۱۶	۱۴	۰.۷۵۱۲۷۲	۱۶	۰.۷۵۱۲۷۳	۲۹
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۳۰
۲۶	۰.۵۵۹۶۰	۲۲	۰.۵۶۷۵۹۲	۲۴	۰.۵۶۷۵۸۹	۳۱
۶	۰.۹۸۵۶۸	۱	۱	۱	۱	۳۲

ماخذ: یافته‌های تحقیق

در جدول (۶) به عنوان مثال برای خطای ۰,۰۵ کارایی متقاطع تصادفی از مدل (۶) و از روش خودخواهانه مدل(۱۰) محاسبه گردیده است و مشاهده می‌شود که رتبه‌های کارایی های متقاطع تصادفی از مدل‌های (۶) و(۱۰) در برخی از واحدها تغییر پیدا کرده و رتبه بندی و جداسازی واحدها با قدرت بیشتری انجام گرفته است.

جدول ۶-کارایی متقاطع تصادفی DMU ها برای خطای ۰,۰۵

با استفاده از مدل (۱۰)		با استفاده از مدل (۶)		
رتبه	θ_j	رتبه	E^*_d	DMU
۱۱	۰.۵۴۱۵۱۳	۱۱	۰.۵۴۲۹۹۰	۱
۳۲	۰.۲۶۱۶۷۴	۳۲	۰.۲۳۶۴۷۱	۲
۳۰	۰.۳۳۳۷۵۰	۳۱	۰.۲۵۴۰۴۶	۳
۷	۰.۴۲۲۹۶۹	۷	۰.۵۸۰۵۵۴	۴
۱۹	۰.۴۶۰۱۸۹	۱۸	۰.۴۱۴۸۸۹	۵
۲۹	۰.۳۴۱۶۵۶	۲۸	۰.۳۲۳۲۸۳	۶
۱۶	۰.۴۷۶۴۰۷	۱۶	۰.۴۵۰۳۷۹	۷
۱	۰.۸۹۸۸۱۱	۱	۰.۸۹۶۴۳۷	۸
۱۴	۰.۵۱۵۵۱۲	۱۵	۰.۴۵۴۲۶۶	۹
۳	۰.۷۶۵۰۳۷	۴	۰.۶۹۸۵۸۳	۱۰
۱۸	۰.۴۶۳۸۴۸	۱۷	۰.۴۳۸۷۹۷	۱۱
۳۱	۰.۲۷۳۵۴۸	۳۰	۰.۲۶۵۹۹۲	۱۲
۱۰	۰.۵۷۹۲۶۶	۱۰	۰.۵۵۰۹۲۱	۱۳
۲۱	۰.۴۲۰۹۰۵	۲۰	۰.۴۰۵۴۳۱	۱۴

۱۵	۰.۵۰۴۰۶۲	۱۲	۰.۵۰۳۸۴۸	۱۵
۱۶	۰.۵۷۱۲۹۵	۸	۰.۶۰۵۶۸۸	۹
۱۷	۰.۶۰۷۵۰۸	۶	۰.۶۳۶۰۰۹	۶
۱۸	۰.۳۵۱۳۳۲	۲۵	۰.۳۷۳۴۴۴	۲۵
۱۹	۰.۷۰۰۸۴۳	۳	۰.۶۹۸۲۴۱	۴
۲۰	۰.۷۵۳۶۳۱	۲	۰.۷۸۰۷۹۱	۲
۲۱	۰.۳۹۸۹۵۰	۲۱	۰.۴۱۹۶۴۰	۲۲
۲۲	۰.۴۸۳۹۷۵	۱۳	۰.۵۱۸۳۹۰	۱۳
۲۳	۰.۳۵۰۷۹۶	۲۶	۰.۳۶۶۱۷۱	۲۶
۲۴	۰.۳۳۳۳۲۱	۲۷	۰.۳۵۸۳۹۸	۲۷
۲۵	۰.۳۱۵۸۵۳	۲۹	۰.۳۵۰۳۶۸	۲۸
۲۶	۰.۳۷۶۲۲۴	۲۳	۰.۴۴۴۳۵۰	۲۰
۲۷	۰.۴۷۰۷۲۶	۱۴	۰.۵۲۰۱۵۵	۱۲
۲۸	۰.۴۰۵۶۷۹	۱۹	۰.۴۶۸۷۵۵	۱۷
۲۹	۰.۳۸۳۳۷۸	۲۲	۰.۴۱۲۴۴۱	۲۴
۳۰	۰.۶۶۲۲۵۵	۵	۰.۶۸۱۷۷۶	۵
۳۱	۰.۳۶۰۶۸۱	۲۴	۰.۴۱۹۵۲۵	۲۳
۳۲	۰.۵۷۰۳۱۰	۹	۰.۶۰۶۱۰۵	۸

ماخذ: یافته‌های تحقیق

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

به منظور ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده و رتبه‌بندی واحدهای کارا مدل‌های زیادی در شاخه DEA ارائه شده است. این مدل‌ها عمدتاً برای داده‌های مختلفی از جمله قطعی، بازهای، فازی و ... بسط داده شده‌اند. در دنیای واقعی معمولاً با مسائلی سروکار داریم که داده‌های آن به صورت قطعی و تحت کنترل واحدهای تصمیم‌گیرنده نیستند، به عبارت دیگر ماهیت تصادفی دارند. در چنین شرایطی نیاز به تعمیم و معرفی روش‌هایی برای ارزیابی و رتبه‌بندی واحدها وجود دارد. اخیراً مدل‌هایی به منظور ارزیابی واحدهای تصادفی معرفی شده است. در کلیه روش‌های ارائه شده با درنظر گرفتن سطح خطای α برای حالت‌های پیش‌بینی نشده احتمال وقوع قائل می‌شویم این سطح باید از ابتدای تحلیل‌ها توسط مدیر

و بر مبنای میزان حساسیت او به نتایج مشخص گردد. نتایج حاصله وابسته به این سطح خطا بوده به طوری که تغییر در این سطح منجر به تغییر درنتایج خواهد شد و بنابراین مدیر باید در انتخاب سطح α دقت ویژه‌ای داشته باشد. نکته‌ای که در بحث رتبه‌بندی وجود دارد این است که هر روش رتبه‌بندی دارای معایب و محاسن مربوط به خود می‌باشد، به طوری که نمی‌توان با قطعیت حکم بر برتری یک روش داد. بنابراین انتخاب نوع رتبه‌بندی به استراتژی مدیریت و مسئله مورد بررسی، بستگی دارد.در این مقاله هدف پیشنهاد مدلی بود که بر اساس آنها بتوان کارایی DMU ها را در صورت تصادفی بودن مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها و نیز در صورت داشتن خروجی نامطلوب محاسبه نماییم. که با استفاده از مدل مضربی CCR ورودی محور و دارای خروجی نامطلوب و تکنیک‌های آماری و توزیع نرمال مدل‌های تصادفی را جهت محاسبه کارایی تصادفی پیشنهاد گردیده که بر اساس ان معیار رتبه بندی میانگین را تعریف نمودیم. و کارایی متقاطع تصادفی برای رتبه بندی DMU در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی بر اساس برنامه‌ریزی قیود تصادفی و مقدار میانگین تعریف گردیده و از آنجایی که وزن های بهینه منحصر فرد نیستند جهت رتبه بندی بهتر و اولویت دادن به آن‌ها روش خودخواهانه پیشنهاد گردیده که بتوان با قدرت بیشتری به جداسازی و رتبه‌بندیِ کارایی تصادفی DMUها بپردازیم. نهایتا مدل‌ها را برای ۳۲ واحد نیروگاه حرارتی که تولیدکننده انرژی هستند پیاده‌سازی نمودیم و مشاهده کردیم، استفاده از مدل‌ها در رتبه‌بندی بهتر واحدها قابل استفاده است. در تحقیقات آینده می‌توان برای مدل‌های دیگر در DEA و همچنین برای توزیع های دیگر آماری از قبیل نرمال چوله و وایبل و رایلی مدل‌های جدیدی را به‌دست آورد. همچنین می‌توان مدل‌ها را مشابها برای تحلیل پوششی داده‌های قطعی، فازی و هیبرید گسترش داد.

منابع و مآخذ

Andersen, P., Petersen, N.C., (1993).A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39 (10), 1261-1264.

Banker RD, Charnes A and Cooper WW (1984). Some method for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science* 30(9): 1078–1092.

Barros, C. P., & Wanke, P. (2017). Efficiency in Angolan thermal power plants: Evidence from cost structure and pollutant emissions. *Energy*, *130*, 129-143.

Bruni ME, Conforti D, Beraldi P and Tundis E (2009). Probabilistically constrained models for efficiency and dominance in DEA. *International Journal of Production Economics* 117(1): 219–228.

Cooper WW, Huang ZM, Lelas V, Li SX and Olesen OB (1998). Chance constrained programming formulations for stochastic characterizations of efficiency and dominance in DEA. *Journal of Productivity Analysis* 9(1): 530–579.

Cooper WW, Deng H, Huang Z and Li Susan X (2002). Chance constrained programming approaches to technical efficiencies and inefficiencies in stochastic data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society* 53(12): 1347–1356.

Cooper WW, Deng H, Huang ZM and Li SX (2004). Chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research* 155(2):487–501.

Charnes A, Cooper WW and Rhodes E (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2 (6): 429–444.

Cook, W., Roll, Y., Kazakov, A.,(1990). DEA model for measuring the relative efficiencies of highway maintenance patrols. *INFOR 28* (2), 811-818.

Charnes A and Cooper WW (1959). Chance-constrained programming. *Management Science* 6 (1): 73–79.

Chen Z, Wanke P, Antunes JJM, Zhang N (2017). Chinese airline efficiency under CO_2 emissions and flight delays: A stochastic network DEA model. *Energy Economics* 68: 89-108.

Charles V, Cornillier F(2017). Value of the stochastic efficiency in data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications,* Volume 81, Pages 349-357.

Chen Z, Wanke P, Antunes JJM, Zhang N (2017). Chinese airline efficiency under CO_2 emissions and flight delays: A stochastic network DEA model. *Energy Economics* 68: 89-108.

Dotoli M, Epicoco N, Falagario M and Sciancalepore F (2016). A Stochastic cross-efficiency data envelopment analysis approach for supplier selection under uncertainty .*International Transactions in Operational Research* 23, 725-748.

Davtalab-Olyaie M, Asgharian M, Partovi Nia V (2019). Stochastic ranking and dominance in DEA. *International Journal of Production Economics*, Volume 214, Pages 125-138

Hosseinzadeh Lotfi F, Nematollahi N, Behzadi MH, Mirbolouki M and Moghaddas Z (2012). Centralized resource allocation with stochastic data. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236 (7): 1783–1788.

Hosseinzadeh Lotfi, F., RostamyMalkhalifeh, M., Aghayi, N., Ghelej Beigi, Z., Gholami, K., (2013). An improved method for ranking alternatives in multiple criteria decision analysis. *Applied Mathematical Modelling*, 37, (1-2), 25-33

Hadi-Vencheh A, Esmaeilzadeh A (2013). A new super-efficiency model in the presence of negative data. *Journal of the Operational Research Society* 64(3):396-401.

Izadikhah, M., Saen, R.F., 2018. Assessing sustainability of supply chains by chance-constrained two-stage DEA model in the presence of undesirable factors.

Jradi S, Ruggiero J (2018). Stochastic data envelopment analysis: A quantile regression approach to estimate the production frontier. *European Journal of Operational Research*, In press, corrected proof, Available online 9 November 2018.

Jin J, Zhou D, Zhou P (2014). Measuring environmental performance with stochastic environmental DEA: the case of APEC economies. *Economic Modelling* 38:80-6.

Khodabakhshi M (2011). Super-efficiency in stochastic data envelopment analysis: An input relaxation approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235(16): 4576–4588.

Kao Ch, Liu Sh (2019). Stochastic efficiency measures for production units with correlated data. *European Journal of Operational Research*, Volume 273, Issue 1, 16, Pages 278-287.

Land KC, Lovell CAK and Thore S (1993). Chance constrained data envelopment analysis. *Managerial and Decision Economics* 14 (6): 541–554.

Liu, J., Fang, M., Jin, F., Wu, C., Chen, H., (2020). Multi-attribute decision making based on stochastic DEA cross-efficiency with ordinal variable and its application to evaluation of banks' sustainable development. *Sustainability* 12 (6), 2375.

Liu W, Wang Y, Lyu Sh (2017). The upper and lower bound evaluation based on the quantile efficiency in stochastic data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications,* Volume 85, Pages 14-24.

Lu, C.C., Chiu, Y.H., Shyu, M.K., Lee, J.H (2013). Measuring CO2 emission efficiency in OECD countries: application of the hybrid efficiency model. *Economical Modeling* 32, 130–135.

Morita H and Seiford LM (1999). Characteristics on stochastic DEA efficiency-Reliability and probability being efficient. *Journal of Operational Research Society of Japan* 42(4): 389–404.

Mandal, S.K (2010). Do undesirable output and environmental regulation matter in energy efficiency analysis? Evidence from Indian cement industry. *Energy Policy* 38(10), 6076–6083.

Park S, Ok Ch, Ha Ch (2018). A stochastic simulation-based holistic evaluation approach with DEA for vendor selection. *Computers & Operations Research*, Volume 100, Pages 368-378.

Ren, J., Gao, B., Zhang, J., Chen, C., 2020. Measuring the energy and carbon emission efficiency of regional transportation systems in China:Chance-constrained DEA models. *Math. Probl. Eng*. 2020.

Olesen, OB and Petersen N (2016). Stochastic Data Envelopment Analysis-A review. *Europen Journal of Operational Research* 251(1):1-13.

Olesen OB (2006). Comparing and combining two approaches for chance constrained DEA. *Journal of Productivity Analysis* 26(2): 103–119.

Ruiz, J.L., Sirvent, I., (2012). On the DEA total weight flexibility and the aggregation in cross-efficiency evaluations. *European Journal of Operational Research* 223 (3), 732-738.

Simar L, Keilegom, I and Zelenyuk W (2017). Nonparametric least squares methods for stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis* 47(3):189-204

Sueyoshi, T., (1999). DEA nonparametric ranking test and index measurement: slackadjusted DEA and an application to Japanese agriculture cooperatives. Omega Int. J. *Management Science* 27 (3), 315-326.

Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J., (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. In: Silkman, R.H. (Ed.), Measuring Efficiency: an Assessment of Data Envelopment Analysis. Jossey-Bass, San Francisco, CA, 73-105.

Shi, G.M., Bi, J., Wang, J.N (2010). Chinese regional industrial energy efficiency evaluation based on a DEA model of fixing non-energy inputs. *Energy Policy* 38 (10), 6172–6179.

Sueyoshi, T., Goto, M (2010). Should the US clean air act include CO2 emission control? Examination by data envelopment analysis. *Energy Policy* 38 (10), 5902–5911.

Wang, Y. M., Chin, K. S, (2010). A neutral DEA model for cross-efficiency54-evaluation and its extension, *Expert Systems with Applications* 37, 3666- 3675.

Wanke, P., Y. Tan, J. Antunes, and A. Hadi-Vencheh.(2020). Business environment drivers and technical efficiency in the Chinese energy industry: A robust Bayesian stochastic frontier analysis. *Computers & Industrial Engineering* 106487.

Wu, J., Chu, J., Sun, J., Zhu, Q., (2016). DEA cross-efficiency evaluation based on Pareto improvement. *European Journal of Operational Research* 248 (2), 571-579.

Wu, C., Li, Y., Liu, Q., & Wang, K. (2013). A stochastic DEA model considering undesirable outputs with weak disposability. *Mathematical and Computer Modelling*, 58(5-6), 980-989.

Yang F, Ang S, Xia Q and Yang C (2012). Ranking DMUs by using interval DEA cross efficiency matrix with acceptability analysis. *European Journal of Operational Research* 223(2): 483–488.

Zhou Z, Lin L, Xiao H, Ma C and Wu S (2017). Stochastic network DEA model for two-stage systems under the centralized control organization mechanism. *Computers & Industrial Engineering* 110: 404-412.

Stochastic cross- efficiency in evaluating decision units with undesirable factors

Mehdi Khodadadipour[۱] **and** ***Seyyed Mohammadreza Davodi***[۲]

Abstract

In this paper, using the input-oriented multiple CCR model with undesirable outputs, taking into account the specific error and using statistical techniques and normal distribution, a new random model is proposed under the title of mean rating criterion to evaluate the efficiency of random data. Also, the stochastic cross- efficiency for ranking DMUs in the coverage analysis of stochastic data is defined based on stochastic limit programming and mean value, and since the optimal weights are not unique, an arbitrary method is suggested for better ranking and prioritizing them.Finally, the proposed models have been implemented for a number of thermal power plant units that produce energy and have desirable inputs and desirable and undesirable stochastic outputs, and the stochastic efficiency of DMUs has been observed using the proposed models with greater power. Separation and ranking has been done.

Keywords: Data envelopment analysis (DEA); input-oriented CCR model ;Stochastic Cross-efficiency evaluation; Undesirable outputs; ranking criterion.

[۱]Assistant Professor, Department of Management, Dehagan Branch, Islamic Azad University, Dehagan, Iran. Email Address: mehdikhoda@yahoo.com.
[۲]Corresponding Author, Associate Professor, Department of Management, Dehagan Branch, Islamic Azad University, Dehagan, Iran. Email Address: smrdavoodi@ut.ac.ir.