فلسفه تحلیلی، شماره چهل، پاییز و زمستان ۱٤۰۰، ص۷۳-۹۰

تلقی ویتگنشتاین از بی‌نهایت ریاضی[1]

محمد حاجی‌بابایی سرخی[2]
کارشناس ارشد فلسفه علم، پژوهشگر مستقل، تهران، ایران
مالک حسینی
مؤسسه پژوهشی حکمت و فلسفه‌ی ایران، تهران، ایران
حسین بیات
دکتری فلسفه علم، پژوهشگر مستقل، تهران، ایران

چکیده

مسئله‌ی «بی‌نهایت» در ریاضیات از مهم‌ترین مسائل فلسفه ریاضیات به شمار می‌رود و بررسی تاریخی این موضوع حاوی جذابیت‌های فراوانی است. در ابتدای قرن بیستم، چهار مکتب اصلی فلسفه ریاضی شامل افلاطون‌گرایی، صورت‌گرایی، منطق‌گرایی و شهودگرایی از منظر هستی‌شناسانه تلاش فراوانی کردند تا دلایلی را برای قبول یا رد وجود بی‌نهایت‌های بالقوه و بالفعل ارائه دهند و البته به نظر نمی‌رسد، هیچ‌کدام در این امر توفیقی یافته باشد. در میانه عرضه اندام مکاتب مختلف، ویتگنشتاین فیلسوف نابغه اتریشی طریق مخصوص به خود را در فلسفه ریاضی پی‌گرفت و با روشی سقراطی، همه آن‌ها را با چوب انتقاد خود راند. اکثریت صاحب‌نظران اعتقاد دارند ویتگنشتاین در دو سوی دعوای متناهی‌گرایی و مخالفان شان، جانب متناهی‌گرایی را گرفته است و وجود بی‌نهایت‌های بالفعل را رد کرده است اما در این مقاله تلاش می‌شود با رجوع به درس‌گفتارهای او در ۱۹۳۹ درباره‌ی مبانی ریاضیات، این دیدگاه عمومی به چالش کشیده شود، انتقادهای او به دیدگاه متناهی‌گرایانه استخراج و ارائه گردد و در نهایت رویکرد سومی در مقابله با دو دیدگاه فوق به او نسبت داده شود.

کلیدواژه‌ها: متناهی‌گرایی، فلسفه ریاضی، بی‌نهایت، اعداد نامتناهی و ترامتناهی.

---

۱. تاریخ وصول: ۱۳۹۷/۲/۱۶؛ تاریخ تصویب: ۱٤۰۰/۱۱/۱٤

۲. پست الکترونیک (مسؤول مکاتبات): hajibabaei.m@gmail.com

مقدمه

مبحث بی‌نهایت‌ها در بین فیلسوفان از دوران باستان جزو موضوعات مورد مناقشه بوده است؛ به‌عنوان مثال پارادوکس زنون که در آن بحث تقسیم يك مسافت به دو نیم برای بیشمار مرتبه مطرح می‌شود، یکی از اولین مسائل فلسفی است که به بی‌نهایت‌های ریاضی می‌پردازد. در تعریف عرفی، بی‌نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بزرگ‌تر است اما اگر بخواهیم تعریفی دقیق‌تر ارائه دهیم، می‌توانیم از تلقی ددکیند در نظریه مجموعه‌ها استفاده کنیم: «مجموعه‌ای که با یک زیرمجموعه سره خود هم اندازه است». به عبارت دیگر، مجموعه‌ای که با یک زیرمجموعه سره خودش تناظر یک به یک دارد. در اوائل قرن بیستم، فیلسوفان ریاضی در دو دسته متناهی‌گرا و نامتناهی‌گرا قرار می‌گرفتند. نامتناهی‌گرایان وجود اعداد و مجموعه‌های نامتناهی و حتی ترامتناهی[1] را در ریاضیات و خارج از آن می‌پذیرفتند اما متناهی‌گرایان منکر آن بودند. هرچند متناهی‌گرایی نیز به واسطهٔ رد یا پذیرش بی‌نهایت‌های بالقوه به دو دسته متناهی‌گرایی اکید[2] و متناهی‌گرایی استانده[3] تقسیم می‌شدند. متناهی‌گرایی اکید نه تنها وجود بی‌نهایت بالفعل را در خارج از ریاضیات نمی‌پذیرد بلکه وجود بی‌نهایت‌های بالقوه را نیز در ریاضیات انکار می‌کند.

از میان چهار مکتب اصلی فلسفه ریاضی، صورت‌گرایی و شهودگرایی در سوی متناهی‌گراها و منطق‌گرایی و افلاطون‌گرایی در سوی مخالف قرار داشتند. هیلبرت در رویکرد صورت‌گرایی خود، تلاش نمود با تقسیم کردن ریاضیات به دو بخش متناهی و نامتناهی ابتدا سازگاری و تمامیت بخش متناهی را نتیجه بگیرد و بخش نامتناهی و ترامتناهی را جزو مقوله‌های خارج از ریاضیات عادی در نظر بگیرد. در شهودگرایی، براوئر بر این مبنا که اشیاء ریاضی ساختهٔ ذهن‌اند و تنها می‌توان به وجود اشیاء

1. Transfinite
2. Strict Finitism
3. Standard Finitism

ساخته‌شده در گام‌های متناهی حکم کرد، نتیجه می‌گرفت که اعداد اصلی و ترتیبی بی‌نهایت بزرگ در ریاضیات وجود ندارند. در مقابل منطق‌گرایان سعی کردند، برای کلیه هست‌های ریاضی از جمله بی‌نهایت‌ها، تعریفی با کمک نظریه مجموعه‌ها ارائه دهند و از این نظر با افلاطون‌گرایان که اعتقاد به وجود هست‌های نامتناهی بالقوه و بالفعل داشتند، هم داستان بودند.[۱]

اما ویتگنشتاین، به اعتقاد اکثریت کارشناسان فن، در دوران میانی و متأخر حیات فلسفی‌اش دیدگاهی متناهی‌گرایانه و حتی به روایتی متناهی‌گرایی اکید داشته است. یکی از مشهورترین فیلسوفانی که ویتگنشتاین را قایل به متناهی‌گرایی اکید می‌دانست، مایکل دامت فیلسوف تحلیلی بریتانیایی بود.[۲] این در شرایطی است که ویتگنشتاین با عقاید مکتب صورت‌گرایی، به‌عنوان یکی از مدافعان متناهی‌گرایی، دارای اختلافاتی است که عقیده غالب را به چالش می‌کشد و این نیاز را به وجود می‌آورد که به منظور درک دیدگاه واقعی ویتگنشتاین در مورد بی‌نهایت‌ها، تأمل بیشتری در آثار او شود. این مقاله بنا دارد تا در این خصوص، بر اساس درس‌گفتارهای ۱۹۳۹ ویتگنشتاین در دانشگاه کمبریج، کاوشی دقیق‌تر کند.

بی نهایت در درس‌گفتارهای ۱۹۳۹

ویتگنشتاین مطالب زیادی را در مبانی ریاضیات بین سال‌های ۱۹۲۹ تا ۱۹٤٤ به رشته تحریر درآورده است. در این دوره پانزده ساله، او چندین ترم کلاس در خصوص فلسفه ریاضیات در دانشگاه کمبریج برگزار کرد که آخرین آن ترم‌های لنت و ایستر[۳] ۱۹۳۹ بود.

۱. شهشهانی، سیاوش، «سیر تاریخی فلسفه ریاضیات»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ش ۵۹، ۱۳۹۵ش، صص ۷-۲۷.

2. Marion, M., *Quantification and Finitism*, A thesis for the degree of doctor of philosophy at the university of Oxford, 1991, p.102.

۳. در دانشگاه کمبریج هر سال تحصیلی به ۳ دوره (ترم) تقسیم می‌شود. ۱. میکلمس ترم که از ماه اکتبر تا

در کلاس‌های این دو ترم، بزرگانی هم‌چون تورینگ ریاضی‌دان معروف، نورمن مالکوم فیلسوف آمریکایی، گئورگ فون وریگت فیلسوف فنلاندی و جان ویزدم فیلسوف بریتانیایی حضور کامل داشتند. او در این دوره شش ماهه، طی ۳۱ جلسه دو ساعته به طور مفصل نظریات خود را در مبانی ریاضیات تشریح می‌کند. جلسه دوازدهم درس‌گفتارها با عبارت‌های زیر که حاکی از عدم پذیرش برداشت متناهی‌گرایانه در فلسفه ریاضی است، آغاز می‌گردد:

> گزاره‌های ریاضی پیش از هر چیز جملاتی انگلیسی‌اند؛ نه تنها جملات انگلیسی، بلکه هر گزاره ریاضی با گزاره‌هایی غیر ریاضی نیز دارای شباهت می‌باشند. ریاضی‌دانان، وقتی شروع به فلسفه‌ورزی می‌کنند، همیشه این اشتباه را می‌کنند که تفاوت بین کارکرد گزاره‌های ریاضی و غیر ریاضی را نادیده می‌گیرند. ازاین‌رو می‌خواهیم پوچی گفته‌های متناهی‌گرایان و مخالفانشان را دریابیم. درست همان‌طور که در فلسفه می‌خواهیم پوچی رفتارگرایان و مخالفانشان را دریابیم.
>
> متناهی‌گرایی و رفتارگرایی دو تخم شبیه به هم‌اند که دارای ادعاهای پوچ و پاسخ‌های یکسانی هستند. هر دو سوی چنین مباحثی بر سوءتفاهم‌هایی از نوعی خاص بنا گردیده است. آن‌ها از نگاه به صورت کلمات و فراموش کردن این پرسش که چه کاری با آن انجام می‌شود، یا تفکر در مورد این‌که آیا دو عبارت دارای معنای یکسانی هستند یا چیزهایی از این قبیل ناشی می‌شوند.[1]

در شرحی که در دانشنامه استنفورد در مورد فلسفه ریاضی ویتگنشتاین آمده، در

دسامبر برگزار می‌شود. ۲. لنت ترم که از ژانویه تا مارس است و ۳. ایستر ترم که از آوریل تا ژوییه است.

1. Diamond, C., (ed.), *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Ithaca, N.Y., Cornell University Press, 1976, Lecture XII, p.111.

بخش‌های ۲. ۲ و ۲. ۳ تحت عنوان‌های «متناهی‌گرایی دوره میانی ویتگنشتاین» و «متناهی‌گرایی برساختی متأخر ویتگنشتاین» چنین ادعا شده است که او برخلاف دیدگاه دوره ابتدایی فلسفه‌ورزی خود در رساله که نظر روشنی در مورد اعداد نامتناهی یا ترامتناهی ارائه ننموده است، در دوره‌های بعدی حیات فلسفی خود دیدگاهی متناهی‌گرایانه داشته و «شواهدی قوی نشان می‌دهد که ویتگنشتاین متأخر هنوز نامتناهی واقعی و مصداق‌های ریاضی نامتناهی را رد می‌کند».[۱] اما با توجه به آن‌چه ویتگنشتاین در ابتدای جلسه دوازدهم درس‌گفتارها گفته و توضیحاتی که در جلسه مذکور و جلسات آتی تا جلسه هفدهم ارائه می‌دهد، به نظر می‌رسد این ادعا که ویتگنشتاین متأخر صرفاً برداشتی متناهی‌گرایانه از ریاضیات داشته است، قابل نقد بوده و می‌توان از آن‌چه او در جلسات مذکور بیان نموده، نقد او را به متناهی‌گرایی در فلسفه ریاضی استخراج نمود. البته از پاراگراف بالا مشخص است که انتقاد ویتگشنتاین همان‌قدر که به طرفداران این دیدگاه اشاره می‌کند، به مخالفان نیز نهیب می‌زند.

در ادامه اظهار نظر ابتدایی جلسه دوازدهم، به تفاوت‌های گزاره‌های ریاضی و تجربی پرداخته می‌شود. ویتگنشتاین می‌گوید در ساده‌ترین شکل ممکن، اگر گزاره‌ای تجربی شبیه گزاره ریاضی بیان شود: به‌طور مثال «تعداد فلان و فلان با تعداد فلان و فلان برابر است» می‌توان با اضافه نمودن «بنا به تعریف» به گزاره‌ی تجربی آن‌را به گزاره‌های ریاضی تبدیل نمود. اضافه کردن «بنا به تعریف» تغییر قطعی در گزاره تجربی ایجاد می‌کند. البته اگر آن‌گونه که منطق‌گرایان ادعا می‌کردند بتوان تعریفی از هست‌های ریاضیاتی مانند اعداد، علائم و توابع با کمک منطق و زبان ارائه داد. اما ویتگنشتاین به درستی تأکید می‌کند که راسل در کتاب بزرگ اصول ریاضیات نتوانست چنین کاری انجام دهد و بنابراین استفاده از «بنا به تعریف» ما را به تصویری در آرشیو ارجاع می‌دهد

1. Rodych, V., "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), Summer 2011 Edition.

که وجود ندارد. او سپس این تعریف را نیز رد می‌کند که گزاره ریاضی گزاره‌ای است که شامل اعداد است. از نظر او برای نوشتن یک گزاره ریاضی نیازی به استفاده از علائم و اعداد نیست و می‌توان گزاره‌هایی ریاضی نوشت که به جای استفاده از نمادهای ریاضی از سایر نمادهای موجود در زبان و حتی کلمات در آن استفاده شده باشد. او این‌گونه جمع‌بندی می‌کند که صورت گزاره نمی‌تواند تمایز قطعی بین گزاره ریاضی و تجربی را ایجاد نماید. از نظر او برای ایجاد تفکیک بین گزاره‌های ریاضی و تجربی، تنها راه توجه به کاربردهای آن‌ها است و در غیر این صورت، به راحتی ممکن است دچار اشتباه شویم و با عبارتی ایجاز گونه و تمثیلی این‌گونه می‌گوید: «کشف پاسخ "... = [سیب] ۳۲٤+ [سیب] ٦٢٧" می‌تواند در یک مورد، کشفی درباره‌ی سیب‌ها و در مورد دیگر کشفی درباره اعداد نامیده شود. بر این اساس که چه کاری با آن انجام می‌دهیم».[1]

و هم‌چنین کاربرد ساده‌ی شمارش در خارج از ریاضیات که اعداد به واسطه‌ی آن شناخته می‌شوند، چیزی نیست که در ریاضیات با آن سروکاری داشته باشیم:

> گفتم که کل فرآیند این بحث‌ها قرار بود تفاوت بین گزاره‌های ریاضی و گزاره‌های تجربی را که کاملاً شبیه آن‌ها به نظر می‌رسد نشان دهد. حال مثلاً «شمردن» در زندگی عادی را در نظر بگیرید، به‌عنوان مثال شمارش تعداد افراد حاضر در این اتاق در مقایسه با شمارش در ریاضیات، مثلاً شمارش ریشه های معادله.[2]

از نظر ویتگنشتاین همان‌گونه که از صورت گزاره‌های تجربی و غیر ریاضی نمی‌توانیم به تمایز قطعی بین آن‌ها برسیم و لازم است از طریق بررسی کاربرد آن‌ها، به تفاوت‌های آن واقف شویم، لازم است در مورد سایر مفاهیمی نیز که در داخل و خارج از ریاضیات به کار برده می‌شود، هم‌چون «شمردن»، «بعلاوه»، «تساوی» و «بی

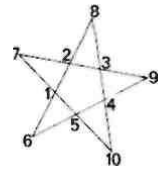
---

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XII, p.114.
2. Ibid.

نهایت»، تأمل کنیم و بدفهمی‌های ناشی از اختلاط معانی آن‌ها را دریابیم.

بدفهمی‌های ناشی از کاربردهای دوگانه ترم‌های ریاضی

ویتگنشتاین از حاضران درخواست می‌کند به تفاوت‌های کاربرد مفاهیم، گزاره‌ها و عبارت‌ها در داخل و خارج از ریاضیات با دقت بیشتری توجه کنند. او می‌پرسد تفاوت شمارش در ریاضیات و خارج از آن چیست؟ و خود چنین پاسخ می‌دهد که به نظر می‌رسد در خارج از ریاضیات می‌شماریم تا تعداد اشیاء را بدانیم و در این صورت کاربرد شمارش شبیه آزمایش است. همان‌طور که توزین می‌کنیم تا وزن چیزها را بدانیم. اما آیا چنین کاربردی در خود ریاضیات نیز مطرح است؟ او دو جمله را مثال می‌زند و سعی می‌کند تفاوت کاربرد این دو را مشخص کند. او برای نشان دادن کاربرد شمارش در ریاضیات از مثال ستاره پنج پر استفاده می‌کند. (شکل زیر)



«آیا اختلافی وجود دارد بین کاربرد جمله‌ی "ده نفر در این اتاق وجود دارد" و "ده نقطه تقاطع در ستاره پنج پر وجود دارد"؟ دومی گزاره‌ای ریاضی است و اولی نیست».[۱]

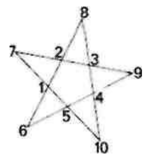
او می‌پرسد چرا گزاره‌ای که در مورد ستاره پنج پر داریم، گزاره‌ای ریاضی است؟ آیا این‌که این دو گزاره یکسان به نظر می‌رسند ناشی از نوعی سوءتفاهم نیست؟ کاربرد گزاره اول اطلاع از چیزی است اما گزاره دوم، با این‌که شبیه گزاره اول است، اطلاع جدیدی به ما نمی‌دهد. ستاره پنج پر شکلی ریاضی است که از اولین باری که رسم شده است، تعداد نقاط تقاطع آن تغییر نکرده که نیازی به شمارش داشته باشد. در ریاضیات با شمارشی از نوع آن‌چه در زندگی روزمره با آن سرکار داریم، مواجه نیستیم. به عبارتی، در

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XII, p.116.

ریاضیات نیازی به استفاده از ترتیب اعداد «۱ ۲ ۳ و ...» برای شمارش نیست.

> شمردن چیست؟ اشاره به چیزها و گفتن «۱،۲،۳،٤»؟ اما لازم نیست اعداد را بگوییم: من توانستم اشاره کنم و بگویم «مری بره‌ای کوچک داشت» یا می‌شد زمزمه کنم «خدا شاه را نگاه دارد» یا هر چیز دیگری. اما در حالت عادی فرآیند شمارش به روش متفاوتی استفاده می‌شود، حال آن‌که «مری... داشت» اصلاً به این روش استفاده نمی‌شود. اما اگر مسافری از مریخ باشید، چنین چیزی را نخواهید دانست.[1]

شاید در ریاضیات بتوان از ستاره پنج پر برای شمارش استفاده کرد بدون این‌که نیازی به استفاده از ارقام باشد. تمایزی بین کاربرد شمارش در ریاضیات و خارج از آن وجود دارد که به سادگی در نظر گرفته نمی‌شود و ممکن است ما را دچار سوءتفاهم کند. خلاصه آن‌چه در جلسه دوازدهم گفته شده، در ابتدای جلسه سیزدهم این‌گونه طرح می‌شود:

> من سعی در ایجاد تمایز بین شمارش عادی و شمارش در ریاضیات داشتم، برای مثال، شمارش نقاط تقاطع ستاره پنج پر. اگر ما با شمارش نقاط تقاطع ستاره پنج پر هم‌چون آزمایش رفتار کنیم، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟
>
> ممکن است بپرسید، چه چیزی را شمرده‌ایم؟ نقاط تقاطع «ستاره پنج
>
> 
>
>
> پر» یا نقاط تقاطع شکلی را که من در این‌جا کشیده‌ام؟ کاری را که

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XII, p.115.

کرده‌ام نمی‌توان با تماشای من در حال کشیدن این چیزها روی تخته‌سیاه، این یا آن کار نامید. یعنی پس نمی‌توان گفت که آیا دارم گزاره‌ای ریاضی را بیان می‌کنم یا گزاره‌ای تجربی.[۱]

و در جلسه چهاردهم، نظرات افلاطون‌گرایان در مورد وجود هست‌های ریاضیاتی این‌گونه به بحث کشیده می‌شود:

اگر بگویید «گزاره‌های ریاضی چیزی درباره واقعیت ریاضی می‌گویند [...]» و ریاضیات به هویات ریاضی می‌پردازد و [...]، در قلمرو هویات ریاضی، موجودات خارق‌العاده‌ای همانند اعداد ترامتناهی وجود خواهد داشت که بسیار جالب خواهند بود و به قول هیلبرت: «این قلمرو یک بهشت است».[۲]

اعداد در ریاضیات و در خارج از ریاضیات کاربرد متفاوتی می‌یابند. بنابراین با سروکار داشتن با اعداد در ریاضیات، اشتباه است فکر کنیم می‌دانیم چطور از آن در زندگی روزمره استفاده کنیم. اگر ابداً نمی‌دانستیم چطور از عدد ۳ در خارج از ریاضیات استفاده کنیم، به هیچ ایده‌ای از کاربردش در ریاضیات نمی‌رسیدیم. در ریاضیات، تنها می‌توانستیم عدد ۳ را به‌صورت تعداد ریشه‌های معادله درجه ۳ تعریف کنیم که «بنا به تعریف» یا «بنا به اثبات» معرفی می‌گردد.

«داشتن فلان عدد» در ریاضیات و در خارج از ریاضیات کاربرد متفاوتی دارد. همین طور است در مورد «داشتن عدد N_0»[۳]؛ اشتباه خواهد بود که فکر کنیم می‌دانیم آن چطور استفاده می‌شود اگر بگوییم N_0 اعداد اصلی وجود دارد، که آن را بنا به تعریف یا به‌وسیله اثبات داریم.

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XIII, p.122.
2. Ibid, Lecture XIV, p.140.
۳. کوچک‌ترین عدد نامتناهی است که برابر با اندازه مجموعه اعداد طبیعی است.

«این کودک N_0 ضرب را بلد است». آیا منظور از گفتن این جمله این است که N_0 عددی متناهی است؟ خیر ابداً چنین نیست، فقط به منظور یافتن نقشی که عدد بازی می‌کند این را می‌گوییم.

نقد ویتگنشتاین بر متناهی‌گرایی و نامتناهی‌گرایی

در ادامه جلسه چهاردهم، ویتگنشتاین به تشریح رویکرد واقع‌گرایانه و ناواقع‌گرایانه در مورد مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات می‌پردازد و می‌گوید:

> اگر بگویید که گزاره‌های ریاضی درباره‌ی یک واقعیت ریاضی هستند، گرچه کاملاً مبهم است اما پیامدهای بسیار مشخصی دارد و اگر آن را انکار کنید نیز پیامدهای عجیبی دارد. برای مثال، ممکن است کسی را به متناهی‌گرایی هدایت کند. که هر دو حالت کاملاً اشتباه خواهد بود. البته منظور این نیست که این گزاره‌های ریاضی معین اشتباه هستند، بلکه به نظر می‌رسد، جذابیت این موضوع به دلیلی به وجود آمده که وجود ندارد. من نمی‌گویم گزاره‌های ترامتناهی کاذب هستند بلکه آن‌ها شما را به تصاویری اشتباه سوق می‌دهد. اگر چنین چیزی را ببینید، ممکن است دیگر علاقه‌تان را به آن‌ها از دست بدهید. چنین بینشی می‌تواند پیامدهای زیادی داشته باشد البته نه در ریاضیات و نه آن‌چه متناهی‌گرایان انتظار آن را دارند.[1]

در عبارت فوق ویتگنشتاین مجدداً این نکته را تصریح می‌کند که واقعیت‌انگاری ریاضیات ما را دچار سوءتفاهم کرده و در نهایت به اشتباه می‌اندازد و این اشتباه صرفاً معطوف به طرفداران متناهی‌گرایی نیست. جست‌وجوی اعداد ترامتناهی در عالم واقع، شاید از نظر ریاضی حاوی جذابیت باشد اما این جذابیت به دلیل تصویر اشتباهی است

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XIV, p.141.

که ما برای آن قائلیم و نتیجه این خواهد بود که چون عده‌ای نمی‌توانند آن‌ها را در عالم واقع مشاهده کنند، به انکار آن پرداخته، به متناهی‌گرایی می‌رسند. هم‌چنین این خطا در مواجهه با بی‌نهایت کوچک‌ها نیز وجود دارد. ویتگنشتاین در ادامه این‌گونه مطرح می‌کند:

> به همین ترتیب، برخی به حساب دیفرانسیل اعتراض می‌کنند که: «آن نمی‌تواند با بی‌نهایت کوچک مربوط باشد زیرا هیچ‌کس نمی‌تواند چیزی بی‌نهایت کوچک در آن بیابد». این عجیب است، ممکن است بپرسیم، «یافتن چیزی بی‌نهایت کوچک در آن، شبیه چه خواهد بود؟»... هیچ چیز کوچکی در حساب وجود ندارد به این دلیل که مبحث حساب با کاربردهای آن متفاوت است و بزرگی و کوچکی در حساب با درکی که در واقعیت از آن داریم متفاوت است. آیا آن پیامدی است که باید به خاطرش ایده‌ای بی‌نهایت کوچک را رها کنیم؟ خیر ابداً. همه آن‌چه می‌توانیم بگویم این است که بیان «بی‌نهایت کوچک» گمراه‌کننده است زیرا به ما تصویری اشتباه می‌دهد و باعث می‌شود به چیزهای خیلی کوچک فکر کنیم.[۱]

ویتگنشتاین در انتهای جلسه‌ی هفدهم، در جایی که در مورد نحوه امکان استفاده از مفهوم همبستگی یک‌به‌یک بین مجموعه‌های نامتناهی بحث می‌کند، مجدداً به این موضوع باز می‌گردد که کاربرد اعداد نامتناهی در زندگی روزمره با کاربرد آن در ریاضیات متفاوت است. او این سوءتفاهم را در رویکردهای فرگه، هیلبرت و هاردی به‌عنوان سمبل‌های سه رویکرد منطق‌گرایی، صورت‌گرایی و افلاطون‌گرایی نشان می‌دهد. از نظر او وقتی فرگه، عدد نامحدود[۲] را به ما معرفی کرد، به نظر می‌رسید که او در مورد نحوه

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XIV, p.141.
2. The number endless

شمارش آن نیز اظهارنظر کرده است. اما دل‌مشغولی فرگه تنها اعدادی بود که در ریاضیات به کار می‌روند و او هیچ ادعایی در مورد کاربرد اعداد نامحدود در خارج از ریاضیات و زندگی روزمره نداشت، در صورتی که دیگران به اشتباه چنین برداشت کرده‌اند که اظهارنظر فرگه در مورد کاربرد اعداد نامحدود در ریاضیات و در خارج از آن است.

> اگر از فرگه بپرسند: «چه رده‌هایی این عدد "نامحدود" را دارند؟» او جواب می‌دهد: «اعداد اصلی، اعداد کسری، اعداد جبری و غیره.» این جواب اصلاً نشان نمی‌دهد که کلمه نامحدود در کدام جملات انگلیسی کاربرد دارد؟ فی الواقع کلمه نامحدود در زندگی روزمره کاربرد دارد، ولی نقشی که بازی می‌کند با آن‌چه ما انتظار داریم کمی متفاوت است. نکته در این است که فرگه نگفته است که چه گروه‌هایی دارای این «تعداد نامحدود» هستند. ممکن است این تصور در شما ایجاد شود که اگر آن به کار می‌رود پس محتملاً در تعداد کثیری از مجموعه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً «تعداد اعداد اصلی» شبیه «تعداد یک ردیف درخت است.» نظر به این‌که در جملاتی نظیر «جک قبلاً تعداد نامحدود (و یا N_0) ضرب را بلد بوده است.» نیز به کار می‌رود.[1]

از طرف دیگر پرفسور هاردی می‌گوید: «این واقعیت که هیچ ریاضی‌دانی تاکنون N_0 استنتاج را انجام نداده است نسبت به این موضوع که هیچ ریاضی‌دانی نیست که تاکنون یک لیوان آب ننوشیده باشد اهمیت منطقی بیشتری ندارد». اظهارات هاردی در پاسخ به هیلبرت که گفته بود هیچ ریاضی‌دانی بی‌نهایت استنتاج را انجام نداده، بیان شده است. او با رجوع به کتاب هیلبرت در بی‌نهایت ص ۱۵۱ که می‌گوید: «نتیجه اساسی ما این است که بی‌نهایت، در واقعیت یافت نمی‌شود.» به این دیدگاه هیلبرت و وِیل حمله

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XVII, p.169.

می‌کند که تنها قضایای متناهی ریاضیات دارای اهمیت واقعی است.

هاردی از منظر افلاطون‌گرایان چنین فکر می‌کند که تفاوت اعداد ترامتناهی با سایر اعداد تنها در این است که آن‌ها هنوز کاربردی نشده‌اند و یا در جاهایی کاربرد یافته‌اند که ما به آن‌ها دسترسی نداریم. در صورتی که ویتگنشتاین اعداد ترامتناهی را ماهیتاً با اعدادی که ما در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم متفاوت می‌بیند.

> مثلاً اگر بگویم: «تا آن‌جایی که می‌توانید خیابان‌های مختلفی بسازید و فقط یک مطلب را مدنظر داشته باشید و آن این است که هر خانه‌ای را با N_i متفاوت شماره‌گذاری کنید.» این جمله‌ای معنادار خواهد بود. ولی اگر بگویم: «N_0 درخت در این ردیف قرار دارد.» جمله‌ای معنادار نخواهد بود.[1]

به همین ترتیب این جمله که: «لویی هیچ‌گاه نمی‌تواند N_0 استنتاج را بنویسد.» نیز بی‌اعتبار است. این جمله چه معنایی دارد؟ ما هیچ معیاری نداریم. حتی اگر بگوییم: «۱۰ میلیون» شما می‌توانید بپرسید: «من چگونه می‌توانم بفهمم؟ در این حالت راه شمارش چگونه است؟ و یا شما به‌طور تقریبی تخمین می‌زنید که ...؟» برعکس عبارت «بی‌نهایت استنتاج بنویس» معنادار است و می‌توان عدد بسیار بزرگی به آن نسبت داد.

> من می‌توانم بگویم: «هر تعداد حاصل جمعی که دوست داری بپرس. به تو N_0 حق انتخاب می‌دهم.» ولی نمی‌توانید بگویید: «به من N_0 شیلینگ پول بده.» این جمله هیچ معنایی ندارد.[2]

از نظر ویتگنشتاین در لغت N_0 هیچ چیز رازآلودی وجود ندارد، ولی نقشی که بر عهده دارد با آن‌چه هیلبرت و هاردی فکر می‌کنند متفاوت است. هیلبرت از نقش ریاضیاتی N_0 به نقش غیر ریاضیاتی آن می‌رسد. دقیقاً مانند کاری که بین نقش

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XVII, p.170.
2. Ibid.

ریاضیاتی ٤ و نقش غیر ریاضیاتی آن انجام می‌دهد. در صورتی که نقش غیر ریاضیاتی N_0 با نقش غیر ریاضیاتی ٤ کاملاً متفاوت است.

ویتگنشتاین تصریح می‌کند:

> نقش اعداد ترامتناهی همانند N_0 در ریاضیات موجب گمراهی و ایجاد یک تصویر غلط در ذهن می‌گردد و اگر این ارقام N_0، N_1 و ... در دستور زبان انگلیسی به کار می‌رفتند آنگاه می‌دیدید که N_0 نقش دستوری کاملاً متفاوتی دارد، نسبت به نقشی که در دنیای ریاضیات شما از آن‌ها انتظار دارید. همانند عباراتی نظیرِ «بزرگ‌تر است از» که به همین ترتیب نقش دستوری متفاوتی در زبان نسبت به دنیای ریاضیات دارند.[1]

نتیجه

ویتگنشتاین در درس‌گفتارهای ۱۹۳۹ که مربوط به دوره متأخر حیات فلسفی او است، با تغییر رویکردی که نسبت به مقوله زبان دارد به بررسی انتقادی مکاتب مختلف فلسفه ریاضی پرداخته که در آن زمان، در اوج قرار داشتند و ذهن بسیاری از فلاسفه را مشغول به خود کرده بودند. دیدگاه ویتگنشتاین نسبت به بی‌نهایت و هم‌چنین اعداد ترامتناهی نیز با استفاده از فلسفه زبان و از منظر معرفت‌شناسانه ارائه می‌شود.

ویتگنشتاین، نقد خود بر متناهی‌گرایی را با این نکته آغاز می‌کند که تفاوت بین گزاره‌های ریاضی و غیر ریاضی در صورت آن‌ها یا نمادها و علائمی که در گزاره به کار می‌رود، نیست. به‌طور مثال گزاره «دو بعلاوه دو با چهار برابر است» را می‌توان گزاره‌ای تجربی دانست که معادل است با گزاره «وزن این دو توپ بعلاوه وزن آن دو توپ با وزن چهار توپ برابر است» و آنگاه نمی‌توان گفت همیشه دارای یک پاسخ یقینی است و شاید بتوان آن را نوعی آزمایش ریاضی دانست یا می‌توان در شمارش به جای گفتن اعداد

1. Diamond, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Lecture XVII, p.171.

۱، ۲، ۳، ٤ از جمله‌ای مانند «مری بره‌ی کوچکی داشت» استفاده کرد و هم‌چنان تأثیری در کاربرد آن نداشته باشد. از نظر او، راه بهتری برای تعیین خط تمایز بین گزاره‌های ریاضی و تجربی توجه به چگونگی کاربرد آن‌هاست، در حالی‌که یکسان به نظر می‌رسند. به‌طور مثال از توجه به کاربردهای متفاوت شمارش در ریاضیات و خارج از آن در می‌یابیم که چیزی به‌عنوان شمارش با استفاده از ترتیب اعداد در ریاضیات وجود ندارد که شبیه کارکرد آن در خارج از ریاضیات باشد و یکی دانستن آن‌ها تنها ناشی از سوء تفاهم است. ویتگنشتاین اقبال به رویکردهای متناهی‌گرا یا مخالفان آن‌را ناشی از بروز چنین سوءتفاهم‌هایی می‌داند. به عبارتی چون فیلسوفان ریاضی به کارکرد اعداد در ریاضیات و خارج از آن بی‌توجه هستند، آن‌ها را یکسان فرض می‌کنند و بنابراین به تناقضاتی مانند نبود هست‌های نامتناهی یا ترامتناهی در خارج از ریاضیات برخورد می‌کنند. لذا کاری که متناهی‌گرایانی هم‌چون هیلبرت سعی در انجام آن داشتند که مرزی برای دستگاه ریاضی خود برای اثبات تمامیت و سازگاری آن معین کنند و ریاضیات را به دو بخش متناهی-نرمال و نامتناهی-غیرنرمال تقسیم کنند، از چنین برداشت‌هایی ناشی می‌شود.

ویتگنشتاین، از یک‌سو دیدگاه افلاطون‌گرایی در مورد وجود قلمروی برای هست‌های ریاضیاتی را به نقد می‌کشد و این‌گونه استدلال می‌کند که هم متناهی‌گرایان و هم مخالفانشان در این دیدگاه اشتراک دارند که هست‌های ریاضی را می‌بایست در خارج از ریاضیات نیز یافت و هم‌چنین با بررسی کاربرد کلماتی مانند «نامحدود» یا «بی‌نهایت» در زبان، استدلال خود را بر این مبنا قرار می‌دهد که اگر بخواهیم اعداد ترامتناهی در زبان روزمره به کار ببریم با شرایطی متفاوت با سایر اعداد روبه‌رو هستیم و نقش دستوری آن متفاوت با کلماتی مانند «نامحدود» یا «٤» خواهد بود و لذا نباید این‌گونه فکر کنیم که اعداد ترامتناهی ماهیتی دارند هم‌چون سایر اعداد که کاربرد آن‌ها در ریاضیات، بر اساس کاربردهایشان در زبان روزمره فهمیده می‌شود.

در نهایت اگر بخواهیم خلاصه‌ای از فلسفه ریاضی ویتگنشتاین را از خلال درس‌گفتارها دریابیم باید این‌گونه بگوییم که به نظر او، ما ابتدا دست به ابداع ریاضیات بر اساس کاربردپذیری آن در تجربه می‌زنیم اما پس از ابداع دستگاه ریاضی و تعریف هست‌های جدیدی در درون آن، دچار اشتباه سیستماتیکی می‌گردیم که فکر می‌کنیم چون ریاضیات ما با جهان دارای انطباق است، پس اگر هر موجود جدیدی در ریاضیات تعریف شود می‌بایست در جهان خارج نیز یافت شود و از دریچه این خطاست که مسئله بی‌نهایت‌های بالقوه و بالفعل در فلسفه ریاضیات پدید می‌آید. اما هم‌چنان این ابهام وجود دارد که با چه استدلالی عده‌ی کثیری از فیلسوفان ریاضی و صاحب‌نظران، ویتگنشتاین را متناهی‌گرا دانسته و حتی برخی او را جزو معتقدان به متناهی‌گرایی اکید قرار می‌دهند؟ ویکتور رودیچ در بخش ۲.۲ مقاله‌اش در دانشنامه استنفورد در مورد دلائل متناهی‌گرا بودن ویتگنشتاین در دروه میانی چنین آورده است:

برهان‌های اصلی ویتگنشتاین برای توسعه فلسفه ریاضی متناهی‌گرا به قرار زیر است.

۱. ریاضیات به‌عنوان ابداع انسانی: بر اساس دیدگاه ویتگنشتاین در دوره میانی فلسفه خود، ما ریاضیات را ابداع می‌کنیم، از این نتیجه می‌شود که ریاضیات و آن‌چه اشیاء ریاضی می‌نامیم، به‌طور مستقل از ما وجود ندارد. هر چیزی ریاضیاتی است، اساساً محصولی از فعالیت انسانی است.

۲. محاسبات ریاضی منحصرا شامل مدلول‌ها[1] و مصداق‌ها[2]: با توجه به این‌که ما مصداق‌ها (شامل نمادها، مجموعه‌های محدود، توالی‌های محدود، گزاره‌ها و اصل موضوع‌ها) و مدلول‌ها (شامل قوانین استنتاج و تبدیل، اعدد گنگ بر اساس قواعد) ریاضی را ابداع کرده‌ایم، این مصادیق، مدلول‌ها و محاسبات مربوط به آن‌هاست که تمامیت ریاضیات را تشکیل می‌دهند.

1. Intensions
2. Extensions

استدلال فوق بسیار شبیه استدلال شهودگرایی بروائر است که اعتقاد داشت هست‌های ریاضی هم‌چون اعداد، محصول درک شهودی و ذهن انسان است و چون انسان تنها در گام‌های محدود می‌تواند به وجود اشیاء ریاضی حکم کند، بنابراین بی‌نهایت در ریاضیات وجود ندارد. به همین دلیل تا دهه ٦٠ قرن بیستم، دیدگاه ویتگنشتاین از این نظر بسیار نزدیک به شهودگرایان طبقه‌بندی می‌شد و در همین راستا هنگامی که متناهی‌گرایی اکید به‌عنوان یکی از نتایج فلسفه شهودگرایی توسط مایکل دامت و دیگران تئوریزه شد، بسیاری از فیلسوفانی که آن را تشریح می‌نمودند، از آثار ویتگنشتاین مخصوصاً کتاب نکته‌هایی درباره‌ی مبانی ریاضیات استفاده می‌کردند. بنابراین این اعتقاد به وجود آمد که ویتگنشتاین نیز خود قائل به متناهی‌گرایی اکید است.[۱]

اما بر اساس آن‌چه از بررسی درس‌گفتارهای ۱۹۳۹ برداشت می‌شود، می‌توان گفت که ویتگنشتاین در دوره متأخر فلسفه ریاضی خود، هنگامی‌که از منظر فلسفه زبان به بررسی معرفت‌شناسانه مسائل فلسفه ریاضی می‌پردازد، ابداع ریاضیات توسط انسان را لزوماً دلیلی بر متناهی بودن هست‌های آن نمی‌داند، بلکه برعکس، هم‌سان دانستن آن‌چه را ما در یک دستگاه ابداعی به آن می‌رسیم با جهان واقعی، منشاء بروز سوء تفاهماتی هم‌چون متناهی‌گرایی قلمداد می‌کند. به عبارتی موضع ویتگنشتاین در دعوای میان متناهی‌گرایی و مخالفانش موضع سومی است که اصل مناقشه را بیهوده دانسته و نیازی به ادامه آن نمی‌بیند.

1. Marion, *Quantification and Finitism*, p.90.

منابع

شهشهانی، سیاوش، «سیر تاریخی فلسفه ریاضیات»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ش ۵۹، ۱۳۹۵ش.

Diamond, C., (ed.), *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Ithaca, N.Y., Cornell University Press, 1976.

Rodych, V., “Wittgenstein's Philosophy of Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, (Summer 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.)

URL=<https://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/wittgenstein-mathematics/>.

Marion, M., *Quantification and Finitism*, A thesis for the degree of doctor of philosophy at the university of Oxford, 1991.