جستارهای فلسفی، شماره بیست و هفتم، بهار و تابستان ۱۳۹٤، ص۵-٤۲

انواع تبیین ریاضیاتی[۱]

حسین بیات[۲]

دانشگاه زنجان، دکتری فلسفه‌ی علم، زنجان، ایران

چکیده

بررسی انواع مصادیق یک مفهوم، یکی از مؤثرترین راه‌های درک آن مفهوم است. این مقاله به بررسی انواع تبیین ریاضیاتی و معرفی چند نوع جدید می‌پردازد. در فلسفه‌ی ریاضیات معمولاً از دو نوع تبیین سخن گفته می‌شود: تبیین‌های درونی و بیرونی. تبیین‌خواه در این دو نوع تبیین، به ترتیب، پدیده‌های طبیعی و ریاضیاتی است. بنابراین مبنای تقسیم و تمایز نوع تبیین‌خواه است. گاهی نیز، بر مبنای راهبرد تبیین، دو نوع تبیین موضعی و فراگیر را از هم متمایز می‌کنند. اما به نظر می‌رسد که می‌توان انواع بیشتری از تبیین‌های ریاضیاتی را از هم متمایز کرد و از این طریق درک بهتری از آن به دست آورد. مثلاً تبیین‌های ریاضیاتی برهانی و غیربرهانی را می‌توان از هم تفکیک کرد. این دو نوع تبیین، به ترتیب، در فرآیند اثبات و فرآیندهایی مثل ایده‌آل‌سازی و نظریه‌پردازی ریاضیاتی ارائه می‌شوند. می‌توان گفت که مبنای تقسیم در اینجا نقش شناختی و نظری تبیین‌هاست. افزون بر اینها، باید تبیین‌های نمادی و غیرنمادی، و نیز تبیین‌های اجتناب‌پذیر و اجتناب‌ناپذیر را از یکدیگر متمایز کرد. بعضی از تبیین‌ها را می‌توان از فرآیند یک استدلال یا ایده‌آل‌سازی حذف کرد، بدون آنکه خللی به آن فرآیندها وارد آید. این نوع تبیین‌ها صرفاً با اهداف عمل‌گرایانه یا آموزشی ارائه می‌شوند. اما برخی دیگر به گونه‌ای هستند که بار اصلی تبیین بر دوش آنهاست یعنی در فرآیند استدلال یا ایده‌آل‌سازی تعیین‌کننده و اجتناب‌ناپذیرند. در این مقاله تلاش می‌شود تا این ده نوع تبیین ریاضیاتی با ذکر مثال‌های مختلف معرفی و از هم متمایز شوند.

واژگان کلیدی: تبیین‌های درونی و بیرونی، تبیین‌های موضعی و فراگیر، تبیین‌های برهانی و غیربرهانی، تبیین‌های نمادی و غیرنمادی، تبیین‌های اجتناب‌پذیر و اجتناب‌ناپذیر.

---

۱. تاریخ وصول: ۱۳۹٤/۲/۲ تاریخ تصویب: ۱۳۹٤/٦/۱۲

۲. پست الکترونیک: logicbay@yahoo.com

مقدمه

تبیین در علوم طبیعی نقش بی‌بدیلی دارد. به طوری‌که اغلب فیلسوفان علم آن را مهم‌ترین هدف علوم طبیعی بر شمرده‌اند.[۱] به بیان دیگر، تبیین مهم‌ترین کارکرد نظریه‌های علمی است و نظریه‌ای که چنین کارکردی نداشته باشد علمی نیست. درباره‌ی جایگاه تبیین در علوم انسانی کمی مناقشه وجود دارد به طوری‌که برخی معتقدند، در این علوم، تبیین ممکن نیست و به جای آن به تفهّم و تفسیر توجه دارند.[۲] در عوض، برخی دیگر، مثل پوزیتویست‌ها، تبیین در علوم انسانی را هم‌چنان ممکن و ضروری می‌دانند.[۳] اما درباره‌ی علوم ریاضیاتی چه می‌توان گفت؟ آیا تبیین در ریاضیات لازم یا حتی ممکن است؟ برخی مانند استینر[٤] و کیچر[٥]، نظریه‌ها و اثبات‌های ریاضیاتی را واجد کارکرد اساسی تبیین می‌دانند و تبیین‌های ریاضیاتی را اجتناب‌ناپذیر می‌دانند؛ اما در مقابل کسانی هم مانند زلسر[٦] هستند که تبیین در ریاضیات را ناممکن می‌شمارند.[٧]

به نظر می‌رسد که امکان و ضرورت تبیین در ریاضیات از یک سو به نظریه‌ی فلسفی ما درباره‌ی ریاضیات بستگی دارد و از سوی دیگر به تلقی ما از تبیین. زیرا اگر ما واقع‌گرا باشیم به نظر می‌رسد که گریزی از تبیین ریاضیاتی نداریم و می‌توان گفت که اساساً توفیق نظریه‌ها و استدلال‌های ریاضیاتی را در نقش تبیینی آنها باید جست‌وجو

---

۱. همپل، کارل، فلسفه‌ی علوم طبیعی، ترجمه حسین معصومی همدانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰ش، ص۵۸.

۲. فروند، ژولین، نظریه‌های مربوط به علوم انسانی، ترجمه علی محمد کاردان، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷ش، ص۱۰۱.

۳. بنتون، تد، و یان کرایب، فلسفه‌ی علوم اجتماعی، ترجمه شهناز مسمی پرست و محمود متحد، آگه، ۱۳۸۹ش، ص۶۲.

4. Mark Steiner
5. Philip Kitcher
6. Mark Zelcer
7. Zelcer, M., “Against Mathematical Explanation”, *Journal for General Philosophy of Science*, p.174.

کنیم. اما اگر ناواقع‌گرا باشیم، تبیین ریاضیاتی اهمیت و حتی معنای خود را از دست می‌دهد. بخصوص اگر بخواهیم از یک نظریه‌ی فلسفی صورت‌گرایانه دفاع کنیم، تبیین ریاضیاتی منتفی خواهد شد. از سوی دیگر، تلقی ما از تبیین بسیار تعیین‌کننده است. اگر مراد از «تبیین» تعلیل باشد مسلماً حتی افراطی‌ترین واقع‌گرایان یعنی افلاطون‌گرایان نیز قادر نخواهند بود از امکان تبیین علّی پدیده‌هایی که زمانمند و مکانمند نیستند و فاقد قدرت علّی‌اند دفاع کنند. اما اگر مراد از «تبیین» توضیح چرایی یک حقیقت ریاضیاتی بر اساس نوعی ارتباط غیرعلّی بین حقایق ریاضیاتی باشد چه؟ مثلاً آیا تبیین بر اساس قوانین ریاضیاتی بین حقایق ریاضیاتی واقعاً ناممکن است؟ یعنی شبیه به آنچه که در تبیین قیاسی- قانونی بین تبیین‌خواه و تبیین‌گر برقرار است، با این تفاوت که تبیین در اینجا بر اساس قوانین ریاضیاتی، به جای قوانین علمی، شکل بگیرد؟ آیا توضیح یک فرآیند اثبات ریاضیاتی، بر اساس روابط صوری و نحوشناختی، تبیین محسوب نمی‌شود؟ آیا اگر مراد از «تبیین» وحدت‌بخشی باشد باز هم می‌توان به سادگی منکر امکان و ضرورت تبیین ریاضیاتی شد؟ روشن است که پاسخ هیچ‌کدام از این پرسش‌ها، حتی اگر منفی باشد، ساده نیست. بنابراین موضع‌گیری درباره‌ی امکان و ضرورت تبیین ریاضیاتی به نظریه‌ی فلسفی ما درباره‌ی ریاضیات و تبیین بستگی دارد.

به همین ترتیب، موضع‌گیری ما درباره‌ی انواع تبیین ریاضیاتی نیز به نظریه‌ی ما درباره‌ی تبیین ریاضیاتی بستگی دارد و برعکس. یعنی از یک سو تلقی ما از تبیین ریاضیاتی تعیین می‌کند که کدام دسته از تبیین‌های مناقشه‌آمیز را به انواع تبیین‌ها بیافزاییم و کدام دسته را کنار بگذایم و با چه نوع طبقه‌بندی آنها را مرتب کنیم؛ و از سوی دیگر، پذیرفتن یا رد کردن هر دسته از تبیین‌های مناقشه‌آمیز مستلزم مقید شدن به یک الگوی مفهومی متفاوتی از تبیین‌های ریاضیاتی است. این رابطه‌ی دو سویه بین انواع و نظریه‌ها نه فقط در بیان ماهیت تبیین‌ها بلکه درباره‌ی وجود آنها نیز برقرار است. یعنی اگر ما

دربارهٔ‌ی تبیین‌های ریاضیاتی به نظریه‌ی خطا، یا دیدگاه نیهلیستی، باور داشته باشیم، طبعاً قائل به هیچ نوع طبقه‌بندی ناظر به تبیین‌های ریاضیاتی نیز نخواهیم بود و برعکس.

من در اینجا تبیین را به معنای توسعه‌یافته‌تری از نظریه‌ی کاربردشناختی تبیین[۱] به کار می‌برم، تا به دلیل پیش‌فرض‌های متافیزیکی ضعیفی که دارد شامل بیشترین انواع تبیین‌های ریاضیاتی باشد و بیشترین سازگاری را با نظریه‌های فلسفی درباره‌ی ریاضیات، یعنی فلسفه‌های ریاضیات، داشته باشد. تبیین به این معنای عام عبارتست از پاسخی که به پرسش‌های چرایی می‌دهیم تا یک پدیده یا یک جمله‌ی نسبتاً معماآمیز را قابل فهم کنیم. همین هدف اصلی، یعنی «قابل فهم کردن»، حساب تبیین را از توجیه جدا می‌کند. چون توجیه‌ها نیز در پاسخ به چرایی‌ها ارائه می‌شوند، با این تفاوت که در آنجا هدف ما حمایت کردن از صدق یا سازگاری یک مدعا به‌وسیله شواهد و قرائن بدیهی‌تر یا پایه‌ای‌تر در یک نظام معرفتی یا منطقی است. اما در تبیین ما به دنبال معمازدایی از یک پدیده (یعنی رخداد یا خاصه یا مجموعه یا فرآیند یا نظایر آنها) یا نشانه هستیم. این امر معماآمیز را تبیین‌خواه و آنچه که خودش فهم‌پذیر است و از تبیین‌خواه معمازدایی می‌کند، تبیین‌گر نامیده می‌شود (بسیار شبیه به تعریف‌های تدقیقی که در آنها ما به دنبال ابهام‌زدایی از معنای یک لفظ هستیم و نه توجیه صدق یک گزاره یا باور. در آنجا نیز لفظ ابهام‌آمیز را تعریف‌خواه و الفاظ واضح و ابهام زدا را تعریف‌گر می‌نامیم). مثلاً:

- چرا گونه‌ای زیستی منقرض می‌شود؟

چون شکارگران آن گونه‌ی زیستی تا حد فراوانی افزایش می‌یابند.

- چرا کهکشان‌ها دارای سرعت چرخشی هستند؟

چون کهکشان‌ها، تحت تأثیر مادّه‌ی تاریک، شتاب زاویه‌ای می‌گیرند.

---

۱. نظریه‌ی کاربردشناختی تبیین به‌وسیله‌ی برومبرگر و سپس ون فراسن در فلسفه علم باب شد. من، در رساله دکتری، این نظریه را، با برخی تغییرات، به ریاضیات تعمیم داده و از آن با عنوان نظریه‌ی شرایط صدقی تبیین ریاضیاتی دفاع کرده‌ام.

در این دو مثال، به ترتیب، افزایش بیش از حد شکارگر و وجود ماده‌ی تاریک، تبیین‌گر دو رابطه معماآمیز، یعنی دو تبیین‌خواه، هستند. تبیین‌خواه‌ها در این دو مثال، به ترتیب، عبارتند از: انقراض برخی گونه‌های زیستی و سرعت چرخشی کهکشان‌ها.

اگر بخواهیم اندکی بیشتر از اینها دربارخِی ماهیّت تبیین تامّل و تعمّق کنیم، اختلاف نظرها آشکار می‌شود و افراد نظریه‌های گوناگونی را برای توضیح این مفهوم ارائه می‌دهند. یعنی مثلاً اگر بخواهیم به این پرسش پاسخ دهیم که چه چیزی موجب می‌شود که یک پدیده قابل فهم‌تر شود؟ پاسخ‌ها متفاوت خواهند بود: وجود یک رابطه‌ی علّی (نظریه‌ی ارسطو) یا مکانیزم علّی (نظریه‌ی سمن) یا رابطه‌ی منطقی (نظریه‌ی همپل) یا نوعی اندراج نظری (نظریه‌ی کیچر) بین تبیین‌خواه و تبیین‌گر، این پدیده را قابل فهم کرده است. البته تعابیر و نوع روابطی که فیلسوفان ریاضیات برای توضیح عامل فهم‌پذیری به کار برده‌اند متفاوت است. استینر به نوعی ویژگی شبه‌ذاتی به نام «وجه مشخّصه[۱]» یا «ویژگی تعیین‌کننده» متوسل می‌شود،[۲] مانکوز با تعمیم دیدگاه کیچر این عامل را توضیح می‌دهد، کولیوان به ربط معنایی یا منطق ربطی این کار را انجام می‌دهد.[۳] اما در هر حال، همان‌طور که کولیوان نیز تأکید دارد مطالعه درباره‌ی ماهیت تبیین ریاضیاتی، در مقایسه با تبیین علمی، در ابتدای راه است.[۴]

ما در این مقاله بدون آنکه خودمان را درگیر این اختلاف‌نظرها بکنیم «تبیین» را در کلی‌ترین معنا به کار می‌بریم. یعنی وقتی صحبت از تبیین‌های ریاضیاتی می‌شود،

1. Characterizing property
2. Steiner, M., "Mathematical Explanation", *Philosophical Studies*, 1978, p.143.
3. Colyvan, M., *An Introduction to the Philosophy of Mathematics* (*Cambridge Introductions to Philosophy*), University of Sydney Sydney, Australia NSW, 2011, p.94.
من این عامل را معین شدن شرایط صدق یا سازگاری می‌دانم، این همان نظریه‌ی شرایط صدقی تبیین است که در پانوشت قبلی به آن اشاره شد.
4. Colyvan, *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, p.96.

مرادمان هر توضیحی است که در ریاضیات یا با استفاده از ریاضیات ارائه می‌شود تا از یک پدیده یا نشانه‌ای معمازدایی شود، یا، به بیان ساده‌تر، هر توضیحی که ارائه می‌شود تا چیزی در ریاضیات یا با ریاضیات فهمیده شود.[۱]

حال بر اساس همین معنای عام از تبیین می‌توان پرسش اصلی این مقاله را مطرح کرد: چند نوع تبیین ریاضیاتی وجود دارد؟ برای پاسخ می‌توان گفت که آنچه قرار است به واسطه‌ی تبیین ریاضیاتی فهمیده شود خارج از دو حالت نیست: موضوعی بیرون از ریاضیات است یا موضوعی درون ریاضیات. پس از همین نکته می‌توان به اولین تمایز دست یافت.

تبیین‌های بیرونی و درونی

تقریباً همه‌ی نویسندگان، دو نوع عمده‌ی تبیین ریاضیاتی را از هم جدا می‌کنند.[۲] نوع اول تبیین‌های ریاضیاتی بیرونی[۳] هستند. تبیین‌هایی صوری که در واقع تبیین نهایی برخی پدیده‌های طبیعی به شمار می‌روند، یا دست‌کم، در مقایسه با تبیین‌های علمی ارائه شده درباره‌ی آن پدیده‌ها، بسیار عمیق‌تر و جهان‌شمول‌تر به نظر می‌رسند. برای درک این معنا از تبیین، ابتدا به پرسش‌های چرایی زیر توجه کنید:

۱. چرا دمای هوای متغیر بین a و b درجه، دست کم در یک لحظه مثل t برابر با $(a+b)/2$ درجه است؟

۱. به باور برخی فیلسوفان و ریاضیدانان ما در ریاضیات چیزی نمی‌فهمیم بلکه فقط برخی قواعد را به کار می‌گیریم. مثلاً جان فون نویمن (۱۹۰۳–۱۹۵۷) می‌گوید: «شما در ریاضیات چیزی نمی‌فهمید، بلکه فقط به چیزهایی عادت می‌کنید». اما اگر ما فهمیدن را به معنای عامی که گفتیم در نظر بگیریم، یعنی معمازدایی از امر معماآمیز، آنگاه به نظر می‌رسد که ما نه تنها در ریاضیات چیزهایی می‌فهمیم بلکه اساساً ریاضیات مثل هر برنامه‌ی پژوهشی دیگری، با فهمیدن برخی چیزها و طرح معماهای جدید به جلو می‌رود. معمازدایی و معمازایی، دم و بازدم هر پژوهش زنده‌ای هستند.

2. Colyvan, M., *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, p.88.
3. Extra Mathematical Explanations

۲. چرا دوره‌ی حیات نوعی حشره، به نام زنجِره، تابعی از اعداد اول ۱۳ و ۱۷ سال است؟

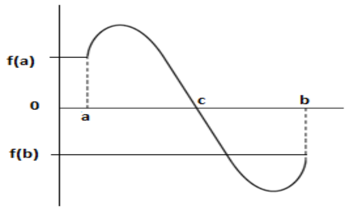
۳. چرا شانه‌های عسل که زنبورها می‌سازند ساختار شش ضلعی دارند؟

این پرسش‌های چرایی گرچه در علوم تجربی قابل طرح است اما پاسخ نهایی آنها تنها با توسل به قضیه یا نظریه‌ای در ریاضیات میسّر خواهد بود. یعنی ما برای تبیین این پدیده‌های طبیعی باید، به ترتیب، از قضیه‌ای اثبات شده در حسابان، نظریه‌ی اعداد و هندسه، استفاده کنیم. همان‌طور که کولیوان می‌گوید: «در این موارد به نظر می‌رسد که بار تبیینی[1] به دوش ریاضیات است».[2] مانکوز[3] نیز از این مثال‌ها در زیست‌شناسی و فیزیک که توسط خود او و بیکر و لیپتون و لیون ارائه شده است چند نمونه گزارش کرده است.[4] حال اجازه دهید عملاً ببینیم که چگونه بار تبیین یک پدیده طبیعی می‌تواد به دوش ریاضیات بیافتد.

دمای میانی هوا: فرض کنید دمای هوای تهران در ساعت ۶ صبح ۵- درجه سانتیگراد و در ۳ بعد از ظهر همان روز ۵+ درجه سانتیگراد باشد. روشن است که دست کم در یک لحظه بین ساعت ۶ صبح تا ۳ بعد از ظهر هوای تهران در همان روز صفر درجه بوده است. اما چرا؟ یعنی چرا وجود همچین لحظه ای با دمای صفر درجه قطعی است؟ روشن است که در اینجا نمی‌توان با تبیین علّی یا قانونی - قیاسی به این چرایی پاسخ داد. یعنی نمی‌توان «چرایی» را به معنای «به چه علّت» یا «بر اساس کدام قانون طبیعی» توضیح داد. اما پاسخ بر اساس یک تبیین ریاضیاتی ممکن است: زیرا پدیده دمای میانی تعبیر بسیار خاصی از قضیه بولتزانو است که قبلاً در ریاضیات اثبات شده است.

1. The explanatory load
2. Colyvan, M., *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, p.103.
3. Paolo Mancosu
4. Mancosu, P., “Explanation in Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2011.

قضیه بولتزانو: فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازه [a,b] در R باشد؛ به‌طوری‌که f(a) و f(b) ناهم‌علامت هستند، یعنی $f(a)f(b)< 0$، در این صورت دست‌کم یک نقطه مانند c در بازه باز (a,b) وجود دارد به‌طوری‌که $f(c)=0$.



تصویر۱: تبیین تصویری قضیه بولتزانو را می‌توان در این نمودار مشاهده کرد: اگر f یک تابع پیوسته در بازه بسته [a,b] باشد به‌طوری‌که مقدار f در a و b ناهم‌علامت باشند آنگاه نمودار آن مطابق شکل بگونه ای است که دست کم در یک نقطه مثل c محور xها را قطع می‌کند.

چرخه‌ی حیات زنجِره‌ها: در طی تحقیقات حشره‌شناختی کاشف به عمل آمده است که نوعی حشره، به نام زنجِره[1] (یا جیرجیرک دشتی)، چرخه‌ی حیات نامتعارفی دارد. به‌طوری‌که مرحله‌ی نوزادی‌شان را در زیر خاک به مدت طولانی، یعنی ۱۳ یا ۱۷ سال، به سر می‌برند و پس از این مدت طولانی مرحله بعدی شان، یعنی ظهور، آغاز شده و تنها در عرض چند روز به مرحله بلوغ می‌رسند. زنجیره‌های بالغ در طول همان چند روز ظاهر می‌شوند، جفت‌گیری می‌کنند، و چند هفته بعد می‌میرند و سپس این چرخه تکرار می‌شود. آلن بیکر[2] به این پرسش پرداخته است که چرا آنها دارای نوعی دوره‌ی حیاتی هستند که تابعی از اعداد اول است: ۱۳ و ۱۷ سال. چرا عدد این دوره‌ها

1. cicada
2. Alan Baker

اول است و مرکّب نیست؟[1] تبیین فرگشتی این پدیده روشن است: زنجره‌هایی که فصل مشترک دوره ظهور خود را با سایر گونه‌های زنجره‌ها و نیز با شکارگران[2] طبیعی خود به حداقل رسانده‌اند واجد مزیت فرگشتی شده و بقیه که چنین نکرده از میان رفته‌اند. اما چرا؟ یعنی چرا این مزیت فرگشتی تنها در دوره‌هایی با عدد اول میسر شده است؟ این پرسشی است که نه تبیین علّی و نه تبیین قیاسی - قانونی و نه تبیین فرگشتی نمی‌تواند آن را پاسخ دهد. پاسخ به این نوع چرایی تنها با تبیین‌های ریاضیاتی ممکن است: فرض کنید عدد چرخه‌های حیات یک گونه جانوری از نوع اعداد اول، مثل p، باشد و اعداد سایر چرخه‌های حیات مربوط به سایر گونه‌ها مثلاً a و b و c باشد، در این‌صورت p مضرب مشترک a و b و c نخواهد بود، مگر به حسب اتفاق. بنابراین کمترین اشتراک فصل چرخه‌ها اتفاق خواهد افتاد. در واقع، داشتن دوره‌ی زندگی به مدتی برابر با یک عدد اول و به اندازه کافی بزرگ، یک استراتژی خوب برای اجتناب از شکارگرها است. زیرا شکارگران با دوره‌های حیات مختلف بسیار به ندرت با مرحله‌ای از دوره حیات زنجره‌ها، که آسیب‌پذیرترین مرحله برای زنجره‌هاست، هم دوره می‌شود.[3]

شانه‌های عسل: نمونه معروف دیگر از زیست‌شناسی فرگشتی، به شکل هندسی شانه‌های عسل مربوط می‌شود: چرا شانه‌های عسل که زنبورها می‌سازند ساختار شش

1. Baker, A., “Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?”, *Mind*, 2005, p.223.
2. predator
۳. در این راهبرد، دو دوره مذکور، یعنی ۱۳ و ۱۷ سال، به تناوب تکرار می‌شود. به نظر می‌رسد که اعداد اول بزرگ‌تر مثل ۱۹ و ۲۳ و مانند آن به دلایل زیست‌شناختی غیر عملی باشند و دوره‌های کوتاه‌تر مثل ۵ و ۷ و ۱۱ سال نیز دست زنجره‌ها را پیش شکارگرهایی که دوره حیاتی آنها ضرایبی از ۵ است، مثل ۱۰ سال (یا ۱۵ و ۲۰ سال)، یا ضرایبی از ۷ است، مثل ۱۴ و ۲۱سال، و ضرایب ۱۱ سال است، مثل ۲۲ سال، رو می‌کند، یعنی دوره حیاتی آنها نیز با دوره ظهور و بروز زنجره‌ها مصادف می‌شود.

ضلعی دارند؟ همان‌طور که مانکوز توضیح می‌دهد، این پرسشی تقابلی[1] است.[2] یعنی متضمّن این مقایسه است که: چرا شش ضلعی، و نه اشکال منتظم دیگر یا ترکیبی از اشکال مختلف، این وضعیت را دارند؟ بخشی از تبیین به واقعیت‌های فرگشتی بستگی دارد. زنبورهایی که موم کمتری استفاده کنند انرژی کمتری مصرف خواهند کرد و شانس بهتری برای انتخاب طبیعی خواهند داشت. اما این تبیین زمانی تکمیل خواهد شد که چرایی ریاضیاتی این اتفاق را نیز خاطر نشان کنیم: برای تفکیک یک سطح به چند ناحیه با مساحت‌های مساوی، به‌طوری‌که محیط پیرامونی این سطح کمترین مقدار را داشته باشد، باید شانه‌ها به شکل شش ضلعی کاشی‌کاری شوند. بنابراین کاشی‌کاری به شکل شش ضلعی، به جهت قسمت‌بندی سطح به مساحت‌های مساوی و کمینه‌سازی محیط پیرامونی، در واقع یک کاشی‌کاری بهین است. این واقعیت به عنوان «حدس شان عسل[3]» توسط هالس در ۲۰۰۱ اثبات گردید.

مثال اول درباره‌ی یک واقعیت فیزیکی، و مثال‌های بعدی درباره‌ی واقعیت‌های زیست‌شناختی هستند. مثال اول با یک قضیه در حسابان و مثال دوم با یک قضیه در نظریه‌ی اعداد و مثال سوم با توسل به یک قضیه هندسی تبیین شدند. این تنوع نشان می‌دهد که قلمروهای مختلف ریاضیات می‌تواند بالقوه به طرق مختلف در تبیین پدیده‌های طبیعی و حتی اجتماعی مختلف دخیل باشند.

بنابراین دانشمند–ریاضی‌دانان برای تبیین عمیق‌تر یک پدیده‌ی طبیعی دست به ارائه یک تبیین ریاضیاتی می‌زنند و این تبیین ریاضیاتی در واقع بر یک یا چند قضیه‌ی ریاضیاتی استوار است. یعنی همان‌طور که گفتیم تبیین‌های ریاضیاتی گویا گاهی می‌توانند به عنوان تبیین نهایی یک پدیده‌ی طبیعی بکار روند. اما آیا خود این قضایای

1. contrastive
2. Mancosu, P. “Explanation in Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.*
3. honeycomb conjecture

ریاضیاتی نیز می‌توانند بر تبیینی عمیق‌تر در درون خود ریاضیات استوار باشند؟ اگر چنین تبیین‌هایی در کار باشند، در واقع تبیین‌هایی در درون ریاضیات و برای قابل فهم کردن روابطی در خود ریاضیات خواهند بود. از همین رو، اینها را تبیین‌های درونی[۱] می‌نامند. در اینجا این نوع تبیین‌ها را نیز از طریق واکاوی اثبات سه قضیه، در حسابان، هندسه و نظریه‌ی اعداد، توضیح می‌دهیم.

اثبات یک مدعای ریاضیاتی: ما برای تبیین چرایی دمای صفر درجه در یک لحظه مثل t از قضیه بولتزانو استفاده کردیم. ممکن است کسی بپرسد خود این قضیه چرا برقرار است؟ یعنی برای پاسخ به این پرسش که «چرا لزوماً لحظه‌ای از زمان بین ۶ صبح تا ۳ بعد از ظهر وجود دارد که دمای هوای تهران صفر درجه است؟» گفتیم چون «طبق قضیه مقدار میانی نقطه‌ای مانند c بین a و b وجود دارد که $f(c)=0$ و دمای ۶ درجه و ۳ درجه و ۰ درجه مورد خاصی از این رابطه کلی ریاضیاتی است». حال می‌پرسیم چرا این رابطه کلی ریاضیاتی برقرار است، یا چه عاملی موجب برقراری این رابطه یا قضیه در ریاضیات شده است؟[۲] بولتزانو به این «چرایی» این‌گونه پاسخ می‌دهد:

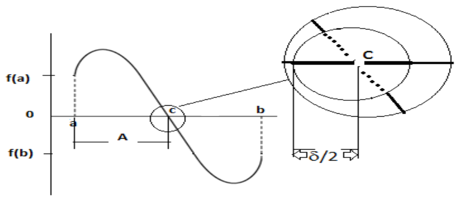
بدون آنکه چیزی از کلیت قضیه کاسته شود می‌توان فرض کرد که $f(a)>0$ و $f(b)<0$ و بازه‌ی A را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$A=\{x|f(x)\geq 0 \ \& \ x\in [a,b]\}$$

1. Intra Mathematical Explanations

۲. یک پاسخ کیهان‌شناختی ریاضیات مدارانه (Mathematica-centric) می‌تواند این باشد که آغاز و توسعه جهان بر اساس چنین ریاضیاتی و برای تحقق چنین ریاضیاتی است. اما چنین پاسخی مد نظر ما نیست.

در این صورت، A ناتهی است زیرا $a\in A$ و A از بالا به b کراندار است. بنابراین A یک سوپریموم (یعنی کوچک‌ترین کران بالا[1]) مثل c دارد: $c=\sup A$. در این صورت $a<c<b$. حال کافی است ثابت کنیم $f(c)=0$.



تصویر ۲

اگر $f(c)\neq 0$ ، یک گوی یک بعدی به مرکز c و قطر δ، مانند $B(c;\delta)$، وجود دارد به‌طوری‌که به ازای همه نقاط آن، مثل x، $f(x)$ با $f(c)$ هم‌علامت است. حال اگر $f(c)>0$ باشد نقاطی مانند $x>c$ وجود دارد که در آنها $f(x)>0$؛ بنابراین A دارای مقادیری خواهد بود که از c بزرگتر اند و این با تعریف c در تناقض است. هرگاه $f(c)<0$ آنگاه $c-\delta/2$ یک کران بالا برای A است، و این نیز با تعریف c در تناقض است. بنابراین باید $f(c)=0$.

تبیین (درونی) یک مدعای ریاضیاتی: پاسخی که بولتزانو در بالا به پرسش «چرا نقطه‌ای مانند c بین a و b وجود دارد که $f(c)=0$ ؟» داده است در واقع اثبات یک مدعای ریاضیاتی است. اثبات بولتزانو هر چه باشد آشکارا در اقناع مخاطبان برای پذیرش صدق قضیه‌ی فوق موفق است. اما این همه‌ی ماهیت اثبات بولتزانو نیست. ما بدون قضیه‌ی بولتزانو و با تکیه بر تجربه درونی (یعنی شهود حاصل از آزمایش فکری دمای میانی هوا) یا تجربه بیرونی (یعنی ادراک حسی دما، یا حتی دیدن نمودار ۱) نیز

۱. کوچک‌ترین عددی که همه مقادیر A از آن کوچک‌تراند.

می‌دانستیم که باید نقطه‌ای مانند c باید بین a و b موجود باشد که در آن f(c)=0 و برای این معرفت خود دلایل تجربی درونی و بیرونی خوبی می‌توانستیم ارائه دهیم اما بولتزانو با اثبات خود یک توجیه پیشینی و قیاسی برای صدق آن معرفی نمود و ما با اثبات بولتزانو اینک به صدق ضروری این قضیه معرفت داریم. اما باز هم این همه ماهیت اثبات بولتزانو نیست. بولتزانو نه تنها صدق ضروری رابطه فوق را توجیه کرده است بلکه با توسل به خاصیت تامیّت[1] پیوستار (مجموعه‌ی اعداد حقیقی R) و ابزار کارآمد تحلیل ریاضیاتی، مثل ابزار تحلیل اپسیلن – دلتایی همسایگی c، چرایی و چگونگی برقراری این رابطه را نیز تبیین کرده است. بنابراین ما اینک نه تنها می‌دانیم که چرا این رابطه برقرار است بلکه می‌فهمیم که چه عاملی موجب برقراری این رابطه یا قضیه در ریاضیات شده است.

نمونه‌ی دیگر، به قاعده‌ی ریسمان و مثلث مصری مربوط می‌شود. مهندسان از دوران مصر باستان ریسمانی به اندازه ۱۲ واحد را به سه قسمت ۳، ۴ و ۵ واحدی تقسیم می‌کردند و با خیال راحت زاویه مقابل ضلع ۵ واحدی را به عنوان زاویه‌ی قائمه به کار می‌بستند. آنها از این مثلث به عنوان گونیا و برای مساحی و محاسبات هندسی بسیار استفاده می‌کردند. امروزه اگر کسی از ما بپرسد چرا اضلاع مثلث قائم الزاویه با محیط ۱۲ باید ۳،۴،۵ باشد و نه مثلاً ۶،۴،۲، ما می‌توانیم بگوییم چون قضیه فیثاغورس برقرار است و این مثلث حالت خاصی از آن است. اما چرا خود این قضیه برقرار است؟ نخستین بار فیثاغورس تلاش کرده است تا به این پرسش پاسخ دهد.

۱. خاصیت تمامیت (completeness): هر زیر مجموعه‌ی ناتهی اعداد حقیقی که از بالا کران‌دار باشد دارای کوچک‌ترین کران بالاست. روشن است که بدون توسل به این عامل نمی‌توان وجود سوپریموم A را تضمین کرد و بنابراین اثبات ناممکن است.

فیثاغورس برای پاسخ به این پرسش که چرا اضلاع مثلث قائم الزاویه با محیط ۱۲ باید ۳،۴،۵ باشد و نه مثلاً ۲،۴،۶، متوجه شد که اگر سه مربع با اضلاعی به طول اضلاع مثلث مصری داشته باشیم، مساحت بزرگ‌ترین مربع حاصل جمع مساحت دو مربع دیگر خواهد بود، یعنی به بیان عددی و نمادگذاری امروزی $۳^{۲}+۴^{۲}=۵^{۲}$؛ و در بین همه مثلث‌های ممکن با محیط ۱۲، این ویژگی منحصر به مثلثی با اضلاع (۳،۴،۵) است.[1] اما اگر کسی در پاسخ به پرسش فوق بگوید «چون فقط بین ۳،۴،۵ رابطه $۳^{۲}+۴^{۲}=۵^{۲}$ برقرار است»، پاسخ او را قانع کننده و موجه نخواهیم یافت. زیرا بین قائم الزاویه بودن و آن ویژگی منحصر به فرد مثلث (۳،۴،۵) هیچ رابطه تبیینی[2] ملاحظه نمی‌شود. این پاسخ همان اندازه بی‌ربط است که بگوییم «چون فقط بین ۳،۴،۵ رابطه توالی برقرار است». در اینجا یافتن یک رابطه‌ی تبیینی همان و اثبات قضیه هم همان. ببینیم او به چه رابطه تبیینی دست یافته است.

قضیه‌ی فیثاغورس: مجذور طول وتر مثلث قائم الزاویه برابر است با مجموع مجذورهای طول دو ضلع دیگر.

اثبات: در شکل (آ) مثلث قائم الزاویه‌ی ۴ را با ابعاد b,a وc و مساحت (ab/2) در نظر بگیرید. می‌خواهیم ثابت کنیم:$a^2+b^2=c^2$. مطابق با این شکل، بر روی هر ضلع مثلث ۴، مربع‌هایی با مساحت‌های b^2,a^2 وc^2 قرار دارند. کافی است با افزودن مثلث‌های قائم الزاویه‌ی ۱،۲ و ۳، با مساحت‌های یکسان (ab/2)، مربعی بزرگ‌تر با اضلاع (a+b) و مساحت $(a+b)^2$ به دست می‌آید. از سوی دیگر، مساحت این مربع

۱ . اگر مسئله را محدود به اعداد طبیعی کنیم تعداد ۵۵ مثلث با محیط ۱۲ می‌توان ساخت که از این تعداد فقط ۱۲ مثلث غیر متشابه و غیر تکراری‌اند. پس منظور از مثلث (a,b,c) یک کلاس از مثلث‌های متشابه با این اضلاع است.

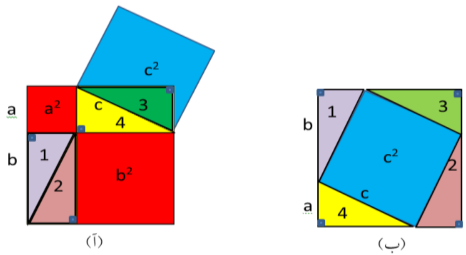
2. Explanatory relevance.

بزرگ‌تر حاصل جمع مساحت چهار مثلث ($4*ab/2=2ab$) و مساحت دو مربع کوچک‌تر b^2,a^2 نیز هست. بنابراین طبق (آ) داریم:

$$2ab+ a^2+b^2 = (a+b)^2 \quad (1)$$

حال، از بازچینی این چهار مثلث و مربع c^2، مربع بزرگ‌تری به مساحت c^2+2ab نتیجه می‌شود: شکل (ب). از سوی دیگر همین مربع بزرگ‌تر شکل (ب) دارای ابعاد $(a+b)$ است. بنابراین:

$$(a+b)^2= c^2+4ab/2=c^2+2ab \quad (2)$$



تصویر ۳

با مقایسه (1) و (2)، و قاعده تساوی‌های جبری، نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید و اثبات تمام است.

مشاهده می‌شود که اگر ما چهار مثلث و مربع c^2، در شکل (آ) را بصورت (ب) بازچینی نمی‌کردیم و به این رابطه‌ی ساختاری بین این (آ) و (ب) متوسل نمی‌شدیم رابطه‌ی بین a، b و c هم‌چنان معماآمیز باقی می‌ماند.[۱] پس آنچه که در اینجا به واسطه‌ی بازچینی و حل معادله جبری، بخصوص برابر قرار دادن (1) و (2)، انجام گرفت چیزی

۱. از نظر فیثاغورس مسائل اصیل همین معماهای ریاضیاتی هستند که با حل آنها حقایق ثابتی که در فراسوی مصادیق جزئی پنهان هستند آشکار می‌شوند. بنابراین می‌توان گفت که حکمت فیثاغوری یا سوفیا تبیین‌هایی هستند که ما را به این حقایق نائل می‌کنند و در نهایت فیلسوفیا یعنی دغدغه و طریقه‌ی کشف این تبیین‌ها.

جز فهم‌پذیر ساختن رابطه‌ی بین اضلاع مثلث قائم الزاویه نبود و این یعنی تبیین درونی این رابطه.

تبیین‌های درونی را در سایر نظریه‌های ریاضیاتی نیز می‌توان دید، مثلاً در اثبات این قضیه از نظریه‌ی اعداد:

قضیه‌ی بسته بودن زوجیت: جمع دو عدد زوج، مثل a وb، زوج است.

اثبات: طبق تعریف اگر a و b دو عدد زوج باشند آنگاه دو عدد طبیعی مثل k_1 و k_2 وجود دارند به نحوی که $a=2k_1$ و $b=2k_2$. از طرف دیگر روشن است که مجموع طرفین دو تساوی با هم‌دیگر مساویند. بنابراین $a+b = 2k_1+2k_2$، که بنابر قاعده‌ی توزیع‌پذیری داریم: $a+b= 2k_1+ 2k_2 = 2(k_1+k_2)= 2k_3$؛ یعنی عدد a+b زوج است و این همان نتیجه‌ی مطلوب است.

در این اثبات ما نه تنها توجیه ریاضیاتی برای برقراری قضیه ۱ داریم یعنی بر اساس آن می‌دانیم که چرا این مدعا در نظریه‌ی اعداد موجه است؛ بلکه می‌فهمیم که این قضیه چرا می‌تواند موجه باشد (یعنی به سبب وجود کدام ویژگی تعیین کننده، یا به خاطر قرار گرفتن در کدام الگوی استنتاجی کلی‌تر، یا به جهت برقراری کدام شرایط صدق یا سازگاری، قابلیت اثبات پذیرفته است).

در مثال فوق، ویژگی زوجیّت اعداد a و b دلخواه و نیز ویژگی توزیع‌پذیری عمل × روی + توزیع‌پذیری در نظریه‌ی اعداد طبیعی، یعنی میدان جبری $(N,+,\times)$، این امکان را فراهم می‌سازد که از $a+b = 2k_1+2k_2$ نتیجه بگیریم $a+b= 2k_1+ 2k_2 = 2(k_1+k_2)$ (یعنی از ۲ فاکتور بگیریم). اگر چنین ویژگی‌هایی مفروض نبود مدعای مطرح شده در قضیه ۱ اثبات نمی‌شد. بنابراین این یک نمونه از تبیین‌های ریاضیاتی درونی است.

تا اینجا روشن شد که تبیین‌های ریاضیاتی دارای دو نوع عمده‌ی درونی و بیرونی هستند. همان‌طور که اشاره شد این تمایز بر اساس نوع تبیین خواه ایجاد شده است. تمایز دیگری که بخصوص بعد از مداقه‌های فریدمن و استینر برجسته شده است بر

اساس راهبرد تبیین است. یعنی ما می‌توانیم تبیین‌های ریاضیاتی را به جهت نحوه‌ی معمازدایی به دو نوع عمده تقسیم کنیم: تبیین‌های فراگیر و موضعی.

تبیین‌های فراگیر و موضعی

دو راهبرد عمده برای تبیین ریاضیاتی وجود دارد. در راهبرد اول، یک امر ریاضیاتی معماآمیز را از طریق اندراج در یک الگوی گسترده‌تر یا مجردتر فهم‌پذیر می‌سازیم. بنابراین هرچه درجه‌ی گستردگی یا تجرّد یک الگوی استنتاجی یا مفهومی بیشتر باشد قدرت تبیینی آن نیز بیشتر است. اما در راهبرد دوم، تبیین ریاضیاتی با توسل به یک رابطه‌ی معین بین تبیین‌خواه و تبیین‌گر میسر می‌شود. بسیار شبیه به تبیین علّی در علوم تجربی که در آن فرض یک رابطه‌ی متافیزیکی بین علت و معلول، فهم یک پدیده را میسر می‌سازد. البته این شباهت فقط از نظر موضعی بودن است و نباید رابطه‌ی تبیینی بین پدیده‌های فیزیکی را با رابطه‌ی تبیینی بین امور مجرد، که نه قدرت علّی دارند و نه زمانی - مکانی‌اند، یکسان گرفت. این دو نوع تبیین را می‌توان، به ترتیب، کیچری و استینری نیز نامید. چون آنها پیش از دیگران به این دو نوع تبیین ریاضیاتی تصریحاً توجه کرده‌اند. آنها البته این دو نوع راهبرد را، به عنوان دو نظریه‌ی تبیین ریاضیاتی، رقیب و بدیل یکدیگر می‌دانند و در واقع به دنبال ارائه‌ی یک الگوی مفهومی بهتر برای مفهوم تبیین ریاضیاتی هستند. اما همان‌طور که گفتیم تلقی ما از تبیین در این مقاله کلی‌ترین معنای ممکن از تبیین است و بنابراین آنها را به عنوان دو نوع تبیین ریاضیاتی معرفی می‌کنیم که به جهت راهبرد تبیینی متفاوت از هم متمایز شده اند. برای درک بهتر این دو راهبرد تبیینی اجازه دهید ابتدا آنها را با تفصیل بیشتری معرفی کنم و سپس با ذکر مثال دو نوع تبیین فراگیر و موضعی را از هم جدا کنیم.

راهبرد تبیینی فراگیر یا کیچری: کیچر راهبرد تبیین علمی را «وحدت بخشی نظری[1]» می‌داند، اما می‌توان آن را به تبیین‌های ریاضیاتی نیز تعمیم داد. در واقع این از برتری‌های دیدگاه کیچر است که می‌توان آن را درباره‌ی تبیین‌های ریاضیاتی نیز تعمیم داد. سایر نظریه‌های تبیین علمی مستلزم قبول علیت یا قوانین طبیعت هستند، در حالی‌که پایبندی به این امور در ریاضیات قابل قبول نیست. کیچر خودش هیچ مقاله مستقلی به تبیین ریاضیاتی اختصاص نداد و موضع او تنها در مقالات اصلی او که درباره‌ی تبیین علمی بود باقی ماند. اما در واپسین کارهای خود، وحدت‌بخشی را به عنوان مدل فراگیر تبیین در علم و ریاضیات به کار برد و آن را دلیلی بر برتری دیدگاه خود درباره‌ی تبیین معرفی کرد: این واقعیت که رویکرد وحدت بخشی را می‌توان در ریاضیات نیز تکرار کرد بر اعتبار آن می‌افزاید.[2]

کیچر این راهبرد را از مایکل فریدمن (۱۹۷۴) الهام گرفته است. در واقع این ایده‌ی فریدمن بود که فهم علمی جهان را به معنای قرار دادن چند واقعیت ظاهراً بی‌ربط در ذیل یک مفهوم فراگیر معرفی کند. به عقیده‌ی فریدمن این ذات تبیین علمی است که فهم ما از جهان را به‌وسیله فروکاستن به پدیده‌های مستقلی که ما باید آنها را بپذیریم یا فرض کنیم ارتقاء می‌بخشد. به عبارت دیگر یک جهان با پدیده‌های مستقل کمتر قابل درک‌تر است از جهانی با پدیده‌های مستقل بیشتر.[3]

فریدمن سعی کرده بود نشان دهد فهم ما از جهان با درجه وحدت بخشی نظریه‌ی علمی ما رابطه مستقیم دارد. او قصد داشت جزئیات این کار را از طریق یک الگوی صوری نشان دهد اما عملاً موفق به انجام آن نشد. به همین دلیل کیچر با جزئیات کار فریدمن مخالف بود. اما فکر می‌کرد که شهود کلّی او درست است. او پیشنهاد فریدمن

1. Theoretical unification
2. Kitcher, P., "Explanatory Unification", *Philosophy of Science*, p.437.
3. Friedman, M., "Explanation and Scientific Understanding", *The Journal of Philosophy*, 1974, p.6.

را به‌وسیله تأکید بر آنچه که پشت وحدت بخشی خوابیده اصلاح کرد: آنچه که در پشت وحدت بخشی خوابیده است فروکاهش تعداد الگوهای استدلال به کار رفته در تبیین‌های ارائه شده است.

به عقیده کیچر یک راهبرد تبیینی باید دو کارکرد اساسی داشته باشد:

۱. یک نظریه‌ی تبیین باید چگونگی ارتقاء فهم ما از جهان توسط علم را توضیح دهد.

۲. یک نظریه‌ی تبیین باید بتواند در ارزیابی و فیصله بخشیدن[1] به مناقشه‌های درون علم به ما کمک کند.

او مدّعی است که هر دو معیار فوق در راهبرد وحدت بخشی رعایت شده است. بر اساس الگوی مذکور ما نباید علم را به عنوان مجموعه‌ای از استدلال‌های مستقل و بی‌ربط به هم تصور کنیم. بلکه باید آن را به‌مثابه یک نظام منسجم از استدلال‌های مرتبط با هم لحاظ کنیم، به‌طوری‌که گویا هر کدام از آنها نوع خاصی از یک الگوی استدلالی فراگیر است. کیچر در توضیح این الگوی استدلالی فراگیر از استعاره‌ی منبع تبیینی[2] استفاده می‌کند. زیرا با دست‌یابی به چنین الگویی گویا به یک منبع لایزالی از استدلال‌های تبیین‌گر دست یافته‌ایم. مثلاً وقتی نیوتن نظریه‌ی مکانیک خود را ارائه داد در ابتدا از آن تنها برای تبیین رابطه اجرام زمینی استفاده کرد اما پس از مدتی به حاصل‌خیزی و توانایی آن در تبیین اجرام سماوی، حرکت پرتابه‌ها، حرکت پاندولی، و حتی پدیده‌های اپتیک پی برد. به عقیده کیچر میزان وحدت‌بخشی نظریه‌ی نیوتن چیزی نیست جز همین گستردگی نمونه‌های استدلال. او دیدگاه و دلایل خود را به نحو فنی و با دقت بیشتری توضیح می‌دهد که در اینجا فرصت بازگویی آن نیست. آنچه در اینجا

1. evaluation and arbitration
2. explanatory store

اهمیت دارد فهم دیدگاه کلی او و تعمیم آن به ریاضیات است. مثلاً این رای روتا[۱] را در پرتو نظریه‌ی کیچر می‌توان فهمید:

ارزش و اهمیت اثبات آخرین قضیه فرما در گشودن امکانات جدید برای ریاضیات است. وایلز و همکارانش ... ایمان ما به نقش محوری نظریه‌ی توابع بیضوی در ریاضیات را زنده کردند. آنها گروهی از تکنیک‌های جدید را که منجر به برقراری ارتباط بیشتر بین نظریه‌ی اعداد و هندسه جبری می‌شدند را توسعه دادند. ریاضی‌دانان آینده استفاده‌های فراوانی از الگوی وایلز خواهند برد. ... ارزش اثبات وایلز نه در آن ادعایی است که اثبات کرده بلکه در راهی است که گشوده و کاری است که امکان‌پذیراش ساخته است.[۲]

به نظر می‌رسد که دیدگاه کسانی مانند ففرمن[۳] را نیز باید در ذیل همین راهبرد قرار داد. بر اساس دیدگاه او، اثبات‌های تبیینی، استدلال‌هایی هستند که، به طور مطلق یا نسبی، متضمّن نوعی تعمیم[٤] یا تجرید[٥] اند.

راهبرد تبیینی موضعی یا استینری: استینر برای معرفی راهبرد خود ابتدا برخی از معیارهای تبیینی بودن را، که در نخستین نگاه، درست به نظر می‌رسند، مورد بررسی قرار داده سپس همه آنها را رد می‌کند. مثلاً درجه بالای تجرید (انتزاع) یا گستردگی یک اثبات، قابلیت تصویری‌سازی اثبات، و جنبه تکوین اثبات که باعث کشف نتیجه می‌شود. در مقابل، او این ایده را مطرح می‌سازد که برای تبیین رفتار یک هستومند باید

---

۱. جیان کارلو روتا (Gian-Carlo Rota)، ریاضی‌دان و فیلسوف آمریکایی و ایتالیایی الاصل (۱۹۳۲-۱۹۹۹).

2. Rota, G.C., *The Phenomenology of Mathematical*, Proof. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997, p.191.

3. Solomon Feferman

4. Generality

5. Abstraction

به‌توان آن رفتار را از یک امر ذاتی یا ماهیّت آن هستومند استنتاج کرد. استینر به منظور اجتناب از برخی مشکلات، به مفاهیمی مثل ذات، خاصّه، امر ذاتی (یا ضروری)، و نظایر آن متوسل نمی‌شود. افزون بر این، به نظر نمی‌رسد که این مفاهیم در متون ریاضیاتی مفید باشند. زیرا همه حقائق ریاضیاتی ضروری است. بنابراین استینر مفهوم «وجه مشخصه[1]» را معرفی می‌کند.

خود استینر بیان صریح و آشکاری درباره‌ی اصطلاح «وجه مشخصه» ندارد. اما مانکوز منظور او را از این مفهوم مهم این‌گونه توضیح می‌دهد: وجه مشخّصه عبارتست از خاصّه مخصوص به یک هستومند مفروضی یا مخصوص به یک ساختاری که یک خانواده از هستومندها دارند یا مخصوص به قلمروی است که این هستومندها یا ساختارها متعلق به آن قلمرو هستند؛ که در آن مفهوم خانواده به عنوان یک مفهوم تعریف نشده در نظر گرفته شده است. بنابراین آنچه که یک اثبات تبیینی را از ناتبیینی جدا می‌کند این است که اثبات تبیینی متضمّن وجود چنین خاصّه‌های تشخص بخشی است.[2]

به بیان استینر «یک اثبات تبیینی، ناظر به یک وجه مشخصه یک هستومند یا ساختاری است که در قضیه به آن اشاره شده است، به‌طوری‌که اثبات گواهی می‌دهد نتیجه بر آن خاصّه وابسته است».[3] افزون بر این، یک اثبات تبیینی باید به این معنا قابل تعمیم هم باشد. تغییر دادن ویژگی مذکور و (بنابراین یک وجه مشخصه خاص) در یک اثبات منجر به آرایه‌ای از قضایای متناظر شود. قضایایی که در واقع به‌وسیله یک آرایه از

---

1. characterizing Property
2. Mancosu, "Explanation in Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
3. Steiner, "Mathematical Explanation", *Philosophical Studies*, p.143.

«تغییر شکل دادن‌ها[1]» اثبات اصلی اثبات شده و بنابراین تبیین هم بشوند. بنابراین استینر دو عیار برای اثبات‌های تبیینی به دست می‌دهد:[2]

۱. وابستگی به وجه مشخصه

۲. تعمیم پذیری از راه تغییر دادن آن خاصّه

عامل فهم‌پذیرسازی تبیین‌خواه، در تبیین موضعی، وجود یک مفهوم کلی شبه‌علّی یا شبه‌قانونی است: وجه مشخصه. از این جهت، تبیین موضعی بسیار شبیه به تبیین علّی و قیاسی- قانونی است.

حال اجازه دهید ببینیم عملاً منظور از راهبرد کیچری و استینری در تبیین‌های ریاضیاتی چیست. برای این کار یک بار دیگر اثبات قضیه بسته بودن زوجیت را در نظر بگیرید:

چرا مجموع دو عدد زوج، زوج است؟ (یعنی چرا عمل جمع روی اعداد طبیعی زوج بسته است؟)

پاسخ: چون اگر دو عدد a و b زوج باشند آن‌گاه دو عدد طبیعی مثل k_1 و k_2 وجود دارند به نحوی که $a=2k_1$ و $b=2k_2$. و بنابرین $a+b = 2k_1+2k_2$.

از سوی دیگر ویژگی توزیع‌پذیری در اعداد طبیعی این امکان را فراهم می‌سازد که از $a+b = 2k_1+2k_2$ نتیجه بگیریم $a+b= 2k_1+ 2k_2 = 2(k_1+k_2)$. (یعنی از ۲ فاکتور بگیریم)

بنابراین اگر a و b دو عدد زوج باشند آن‌گاه $a+b$ زوج است.

1. deformations

۲. راهبرد تبیینی استینری توسط رزنیک و کوشنر ۱۹۸۷ مورد نقد قرار گرفت. آنها این تمایز مطلق بین اثبات‌های تبیینی و غیر تبیینی را زیر سوال بردند و مدّعی شدند که چنین تمایزی تنها به نحو بافتاری درست است. آنها هم‌چنین مثال‌های نقضی بر معیاری که استینر ارائه داده بود ارائه کردند. اما ما در اینجا تنها به معرفی این راهبرد توجه داریم و قصد بررسی و نقد بیشتر آن را نداریم.

طبق راهبرد فراگیر، فهم‌پذیر شدن تبیین‌خواه به موجب قرار گرفتن آن در ذیل یک ساختار کلی‌تر یعنی میدان جبری $(N,+,\times)$ میسّر شده است. به بیان دیگر، اثبات قضیه‌ی فوق متضمن نوعی تعمیم یا تجرید است و اساساً قدرت اقناعی و توجیهی خود را به موجب همین تعمیم و تجرید به دست آورده است. اثباتی که برای قضیه‌ی مذکور به کار برده‌ایم نه تنها متضمن تعمیم و تجرید مفهومی است، بلکه بر اساس یک الگوی استنتاجی حاصل‌خیز به دست آمده است. اما طبق راهبرد موضعی آنچه که استدلال فوق را قانع‌کننده و مدعا را موجه می‌کند حضور یک یا چند «وجه مشخصه» در برخی هستومندهای مفروض در آن است. این وجه مشخصه‌ها عبارتند از زوجیّت اعداد a و b دل‌خواه و نیز توزیع‌پذیری عمل × روی +. زیرا بدون آنها نمی‌توان زوج بودن a+b را از زوج بودن a و b نتیجه گرفت و اثبات قضیه ناممکن می‌شود (هم‌چنان‌که در تبیین‌های علمی، مثلاً بدون قانون فتوسنتز و مناسبت تبیینی نور و رنگ باختن برگ‌ها، خشک شدن یک گیاه در سایه را تبیین کرد). گویا زوجیت a+b ذاتاً معلول خاصه‌ی زوجیت به عنوان وجه مشخصه‌ی a و b، و نیز خاصیت توزیع‌پذیری به عنوان وجه مشخصه‌ی عمل × روی + است.

تاکنون چهار نوع تبیین ریاضیاتی را از هم متمایز کرده و مثال‌هایی را برای هر کدام از آنها بیان کرده‌ایم. اگر این مثال‌ها را مقایسه کنیم متوجه خواهیم شد که با وجود تفاوت‌هایی که به لحاظ نوع تبیین خواه و راهبرد تبیینی دارند در یک چیز مشترک‌اند و آن اینکه همگی آنها در راستای مستدل ساختن یا موجه ساختن یک مدعا به کار رفته‌اند. این تبیین‌ها را می‌توان تبیین برهانی نامید. اما مشارکت در مستدل ساختن یا موجه کردن مدعیات تنها کاربرد تبیین‌های ریاضیاتی نیست. آنها را می‌توان برای تجرید یا ایده‌ال‌سازی و مدل‌سازی یا نظریه‌پردازی ریاضیاتی نیز به کار برد. بنابراین به نظر می‌رسد تبیین‌های ریاضیاتی از این جهت نیز به دو نوع عمده قابل تقسیم‌اند.

تبیین‌های برهانی و غیربرهانی

تبیین‌های برهانی[1] ممکن است درونی یا بیرونی باشند. مثلاً تبیین‌هایی که درباره‌ی دمای میانی هوا و دوره حیات زنجره‌ها و شانه‌های عسل گفته شد در خدمت اثبات یک قضیه‌ی ناظر به پدیده‌ی طبیعی بودند. اما تبیین‌هایی که در راستای اثبات قضایای بولتزانو و فیثاغورس و قضیه بسته بودن زوجیت ارائه شدند، برهانی درونی هستند. در مقابل، نوع دیگری از تبیین‌های ریاضیاتی هستند که بهتر است آنها را غیربرهانی[2] بنامیم چون نه در درون یک استدلال یا اثبات خاص بلکه به منظور تبیین روابط انتزاعی یک نظریه‌ی علمی یا ریاضیاتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تبیین‌های غیر برهانی نیز می‌تواند درونی یا بیرونی باشند. نویسندگان مختلف به طور جدا گانه یکی از این دو نوع تبیین ریاضیاتی را مورد توجه قرار داده‌اند. مثلاً مانکوز تنها به تبیین‌های غیربرهانی بیرونی توجه می‌کند و نقش تبیینی ریاضیات هنگام الگوپردازی[3] و ایده‌آلسازی در نظریه‌های علمی را برجسته می‌کند، اما از نوع تبیین‌های غیربرهانی درونی غفلت می‌کند.[4] در عوض کولیوان که به تبیین‌های ریاضیاتی غیربرهانی درونی توجه دارد، تبیین‌های ریاضیاتی غیربرهانی بیرونی را از قلم می‌اندازد:

تاکنون اغلب بحث‌های تبیین درون ریاضیاتی بر روی اثبات‌ها معطوف بود. اما اثبات‌ها فقط چنین جایگاهی در تبیین ندارند. اگر تلقی وحدت بخشی از تبیین درست باشد ما باید انتظار داشته باشیم ببینیم تبیین‌ها چه جایگاهی در فروکاستن یک نظریه به نظریه‌ی دیگر دارند و نیز چه نقشی در تعمیم‌های مختلف یک نظریه دارند.[5]

1. demonstrative mathematical explanations
2. Non-demonstrative
3. modeling
4. Mancosu, P., “Explanation in Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
5. Colyvan, *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, p.97.

- تبیین ریاضیاتی
  - بیرونی
    - برهانی: مثل تبیین ریاضیاتی بهینه بودن شانه‌های شش ضلعی عسل در اثبات هالس
    - غیربرهانی: استفاده از ریاضیات برای الگوسازی و ایده ال سازی در نظریهٔ مکانیک گالیله برای حرکت پرتابه.
  - درونی
    - برهانی: مثل تبیین ریاضیاتی زوج بودن جمع اعداد زوج در اثبات قضیه‌ی بسته بودن زوجیت،
    - غیر برهانی: استفاده از یک نظریه ریاضیاتی برای تبیین یک نظریه دیگر ریاضیاتی، مثل استفاده از نظریه مجموعه‌ها برای تبیین مفهوم عدد.

تصویر ٤: هر کدام از ٤ حالت فوق را می‌توان با دو راهبرد موضعی و فراگیر توضیح داد. بنابراین اگر بخواهیم تمایز راهبردها را نیز لحاظ کنیم جمعاً ۸ حالت قابل تصور است. در این که کدام یک از این دو راهبرد می‌تواند انواع تبیین، به لحاظ تبیین‌خواه و به لحاظ کارکرد شناختی، را بهتر توضیح دهد موضعی نگرفته‌ایم.

بنابراین، تا اینجا، می‌توان حساب شش نوع تبیین ریاضیاتی را از هم جدا کرد.

توجه به تبیین برهانی را می‌توان دست‌کم تا ارسطو پیگیری کرد. اما توجه به تبیین ریاضیاتی غیربرهانی قدمت کمتری دارد. شاید نخستین کسی که به این معنا از تبیین مستقیماً توجه کرده است گالیله باشد. البته پیش از او بسیاری از دانشمندان مثل ارشمیدس عملاً تبیین‌های ریاضیاتی غیربرهانی را به کار برده‌اند و اساساً ایده‌آل‌سازی از طریق تبیین‌های ریاضیاتی از مهم‌ترین مشخصه‌های علم یونانی و به‌طور کلی از استلزامات نظریه‌های علمی و فلسفی است. اما به نظر می‌رسد که نخستین بار گالیله مستقیماً این نکته را مورد بحث فلسفی قرار داده است. او درباره‌ی نقش تجرید و ایده‌آل‌سازی در علم می‌گوید:

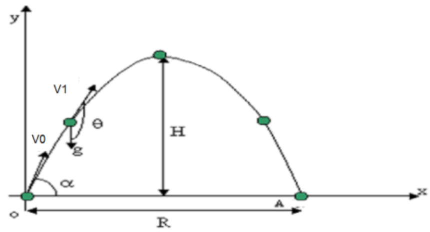
درست همان‌طورکه اگر تاجری بخواهد به موجودیِ شکر، ابریشم و پشم خود رسیدگی کند می‌باید ابتدا وزن جعبه‌ها، عِدل‌ها و سایر بسته‌بندی‌ها را کم کند، به همین قیاس یک دانشمند ریاضیدان نیز وقتی می‌خواهد آثاری را که در فکر خود و به‌طور انتزاعی اثبات کرده در عمل و به طور انضمامی مورد بررسی قرار دهد، می‌باید موانع مادی را کنار بزند؛ و اگر او قادر به انجام چنین کاری باشد، در آن صورت من به شما اطمینان می‌دهم که امور، در توافق و مطابقت، دست کمی از محاسبات ریاضی ندارند. در این حال، خطاها نه ناشی از انتزاعی بودن یا انضمامی بودن هستند و نه ناشی از هندسه یا فیزیک؛ بلکه مسئولیت‌شان به گردن مُحاسبی است که نمی‌داند چگونه یک حسابرسی حقیقی را به انجام رساند.[۱]

گالیله خود عملاً همین کار را درباره‌ی حرکت پرتابه‌ها، سقوط آزاد در خلأ، آونگ ایده آل و حرکت در سطح شیب دار انجام داد و برای آنها تبیین‌های ریاضیاتی ارائه کرد. برای درک بهتر مقصود او اجازه دهید یکی از این کارهای او را مرور کنیم.

تبیین حرکت پرتابه‌ها: توپ‌چی‌ها پیش از گالیله به این نکته واقف بودند که حداکثر بُرد یک توپ تحت زاویه ٤٥ درجه است. «اما کار ارزنده گالیله تبیین ریاضیاتی این واقعیت بود»[۲] گالیله در کتاب دو علم مدرن از مدل مجردی که برای حرکت سهمی شکل پرتابه‌ها ارائه کرده بود، این قاعده را استنتاج کرد که برای زوایای پرتابی که در فاصله مساوی از زاویه ٤٥ درجه قرار دارند، مثل زوایای ٤٠ درجه و ٥٠ درجه، بُرد یکسانی به دست می‌آید (تصویر٥). «او ادعا کرد که این نکته بر توپ‌چی‌ها مکشوف

۱. به نقل از جان لازی، درآمدی تاریخی به فلسفه‌ی علم، ترجمه علی پایا، سمت، ۱۳۷۷ش، ص٦٨.
۲. همان، ص ٦٤.

نبوده است و از این فرصت برای ستودن برتری تبیین ریاضی بر تجربه خام و حساب نشده استفاده کرد».[1]



تصویر۵: گالیله برای تجریدِ حرکتِ یک پرتابه‌ی فیزیکی، مثل یک توپ، فرض کرد که نقطه‌ای همگن در یک فضای ایده‌آل بدون جریان هوا در صفحه‌ای به شکل فوق در حرکت است. این صفحه در دو جهت امتداد دارد: محور x که در راستای افق و محورy که در راستای g است. بنابراین حرکت پرتابه را به صورت ترکیب دو حرکت افقی و عمودی می‌توان تحلیل کرد و به این نتیجه رسید که اگر زاویه پرتاب α و سرعت اولیه پرتابه v_0 باشد، معادله حرکت پرتابه در لحظه‌ی t به صورت زیر خواهد بود:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t$$

باید توجه کنید که در اینجا گالیله ابتدائاً برای مستدل ساختن یک مدعای فیزیکی دست به تبیین ریاضیاتی آن نمی‌زند. بلکه برای برای تجرید یک پدیده فیزیکی آن را تبیین ریاضیاتی می‌کند. اما در عین حال پس از آنکه قدرت این تبیین، به واسطه آزمایش‌ها و پیش‌بین‌های موفق، و بخصوص در رقابت با تبیین‌های بدیل، آشکار شد می‌تواند مانند مواردی که پیش از این هم شمردیم، در خدمت توجیه یا مستدل ساختن مدعیات ناظر به طبیعت هم قرار گیرد.

---

۱. همان، ص۶۳.

تبیین (درونی) اعداد طبیعی به‌وسیله‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها: برای درک تبیین‌های غیربرهانی درونی نیز اجازه دهید مثالی را که کولیوان از نظریه‌ی مجموعه‌ها ارائه داده است با هم مرور کنیم. مدت‌ها گمان می‌شد که نظریه‌ی مجموعه‌ها مبانی سایر بخش‌های ریاضیات است، به این معنا که آن انتزاعی‌ترین نظریه‌های ریاضیاتی است و سایر نظریه‌های ریاضیاتی را می‌توان به عنوان مدلی از نظریه‌ی مجموعه‌ها در نظر گرفت. مثلاً ما یاد گرفتیم که می‌توان اعداد طبیعی را بر اساس اوردینال‌های فون نویمان چنین تعریف کرد:

$$0=\varnothing\,;\;\; 1=\{\varnothing\}\,;\;\; 2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\};\quad 3=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\quad \ldots$$

که در اینجا رابطه مابعدی $S(x)$ به بیان ساده عبارت است از: $x\cup\{x\}$. بنابراین هر زوج مرتب از اعداد طبیعی مثل (a,b) می‌تواند مدلی باشد از مجموع‌های که در نظریه‌ی مجموعه‌ها بصورت $\{\{a\},\{a,b\}\}$ بیان می‌شود. و چون اعدا گویا نیز دقیقاً چیزی جز (کلاس‌های هم ارزی) زوج‌های مرتبی از اعداد طبیعی نیستند ما می‌توانیم آنها را از روی فرآیند ساخت فوق «بسازیم». اعداد حقیقی نیز به نحو تکنیکی کمی پیچیده‌تر است چون در آن هویت هر عدد حقیقی با یک دنباله از اعداد گویا معیّن[1] می‌شود، اما هر چه هست این اعداد را هم می‌توان بر اساس نظریه‌ی مجموعه‌ها مدل کرد. از اینها هم می‌توان اعداد مختلط را به عنوان زوج‌های مرتبی از اعداد حقیقی رسید، در اینجا توابعی با مقادیر حقیقی به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب هستند یا اعداد حقیقی و قس علی هذا. کولیوان تأکید می‌کند که منظورش بدیهی بودن یا ساده بودن این فرایندها نیست و نیز منظورش این نیست که بگوید نظریه‌ی مجموعه‌ها برای ریاضیات کافی است و آنالیز حقیقی یا مختلط و امثالهم مهم نیستند. شکل نمادی مجموعه نگریک[2] دال بر یک عدد ساده مثل ۷ بسیار طولانی و پیچیده است؛ چه رسد به اینکه

1. Identifying
2. Set theoretic

بخواهیم مثلاً یک تابع با مقادیر حقیقی ساده مثل سهمی را در نظام نظریه‌ی مجموعه‌ها بیان کنیم. هم‌چنین نکته مهم در این فروکاهش‌ها دور ریختن هرچیزی غیر از نظریه‌ی مجموعه‌ها نیست. پس نکته کجاست؟ او در ادامه توضیح می‌دهد که ما شاید بهتر باشد در بیان این نکته به استعاره‌ی تیغ اوکام متوسل شویم و چنین استدلال کنیم که فروکاهش مذکور نشان می‌دهد که همه‌ی ریاضیات در واقع چیزی جز نظریه‌ی مجموعه‌ها نیست. ما هم‌چنان شکل نمادی نامجموعه نگریک را به صرف قرارداد مجاز می‌دانیم. در این دیدگاه ما ساخت‌های مورد نظر را برای حمایت از یک نوع فروکاهش هستی‌شناختی به نظریه‌ی مجموعه‌ها در نظر می‌گیریم. کواین به عنوان مثال چنین دیدگاهی دارد. اما این برای ما کافی نیست. بخصوص حالا که جذابیت‌های حال حاضر تبیین ریاضیاتی فراوان است ما بهتر است به این بیاندیشیم که این نکته درباره‌ی واقعیت‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها خیلی مهم و جالب است که می‌تواند از این طریق بخش باقی مانده ریاضیات را مدل کند. ما این ساخت مورد نظر را برای برتابیدن شعاع نور بر رابطه بین نظریه‌ی مجموعه‌ها و سایر بخش‌های ریاضیات در نظر می‌گیریم به همان معنایی که در مدل رایانشی یک نظام فیزیکی مفروض است، یعنی تاباندن شعاع نور فهم بر آن نظام فیزیکی هدف (و گاهی تاباندن نور فهم بر خود آن مدل رایانشی). اما این چندان واضح نیست که چنین ساختی چگونه فهم بهتری از اعداد طبیعی رابه ما ارزانی می‌کند. از سوی دیگر ما فهم نسبتاً خوبی از مثلاً عدد ۳ داریم. به هر حال، ظاهر امر نشان می‌دهد که لحاظ ۳ به صورت $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ و مابعد $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ هیچ بصیرت بیشتری عاید ما نمی‌کند. کولیوان در نهایت این مثالش را این‌گونه تمام می‌کند که «من فکر می‌کنم نوعی تبیین در چنین بازنمایی‌ها وجود دارد اما می‌پذیرم که مناقشه‌آمیز است».[1]

آنچه که کولیوان درباره‌ی بازنمایی اعداد طبیعی بیان می‌کند از منظر نشانه شناختی نیز حائز اهمیت است. نکته‌ای که به نظر می‌رسد تاکنون نه کولیوان و نه کسی دیگر مورد

1. Colyvan, *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, p.98.

توجه قرار نداده است. از منظر نشانه شناختی ما می‌توانیم بین دست‌کم سه نوع نشانه[1] تمایز قایل شویم: نماد[2]، تصویر[3] (تمثال)، نمایه.[4] در هر سه نوع نشانه همواره یک دلالت[5] بین دال[6] و مدلول[7] برقرار است با این تفاوت که دلالت در این سه نشانه، به ترتیب، به موجب قرارداد محض، مشابهت تصویری یا ساختاری کافی و رابطه علّی میسر می‌شود. مثلاً دلالت واژه‌ی «دست» بر دست، 🖐 بر دست، و رد به جا مانده بر روی برف بر یک دست، به ترتیب، دلالت نمادی، تصویری و نمایه ای هستند. تمایز دو نوع اول از نشانه‌ها در ریاضیات مهم تراست. مثلاً دلالت «دایره» و O بر شکل هندسی دایره، به ترتیب، دلالت نمادی و تصویری ریاضیاتی هستند. اما در اینجا، با یک نگاه کلی‌تر، نوع اول را در مقابل دو نوع دوم قرار می‌دهیم: دلالتی که صرفاً بر قرارداد استوار است و دلالتی که صرفاً برقرارداد استوار نیست و عوامل دیگری مثل رابطه علّی و ساختاری نیز در این دلالت دخیل‌اند. این دو دلالت را به ترتیب نمادی و غیر نمادی (تصویری و نمایه‌ای) می‌نامیم. بر اساس این تمایز نشانه‌شناختی می‌توان دو نوع تبیین ریاضیاتی را نیز از هم متمایز کرد.

تبیین‌های نمادی و غیرنمادی

آنچه که بولتزانو در اثبات وجود مقدار میانی صفر برای توابع پیوسته مثل f در بازه‌ی [a,b] و مقادیر مرزی ناهم‌علامت ($f(a)f(b)< 0$) ارائه داد، متضمن تبیینی بود که بر نمادهایی هم‌چون f، [a,b]، $B(c;\delta)$ و نظایر آنها استوار بود. چنین تبیینی را که در آن بارِ

1. sign
2. symbol
3. icon
4. index
5. referring
6. designator
7. referent

تبیینی بر دوش نمادها است تبیین نمادی[1] می‌نامیم. اما تبیین همان مدعا، یعنی مدعای بولتزانو، طبق تصویر ۱ یا ۲ تبیین‌هایی غیرنمادی[2] هستند. زیرا در آنها بارِ تبیینی بر دوش تصاویر است. برای توضیح تبیین‌های غیرنمادی اجازه دهید کمی دلالت غیرنمادی تصویری را بیشتر توضیح دهم.

دلالت غیرنمادی تصویری لزوما به خاطر شباهت ظاهری برقرار نیست و ممکن است به جهت نوعی مشابهت ساختاری بین دال و مدلول برقرار باشد. یعنی شبیه به آنچه که درباره‌ی همریختی[3] بین نمادهای ریاضیاتی گفته می‌شود، در اینجا نیز می‌توان از همساختاری بین آیکون و مدلول سخن گفت. مثلاً نمودار تابع f در شکل یک با دمای هوا از یک سو و نمادهای بیانگر تابع f از سوی دیگر همساختار هستند. تصویر ۱، در واقع یک دال غیرنمادی بر مدلول خود، یعنی تغییر دمای هوا، است و به نظر می‌رسد که این تصویر می‌تواند نقش تبیینی مؤثر و خوبی را، دست کم به همان اندازه‌ای که در علوم تجربی کافی است، برای قابل فهم ساختن قطعیت لحظه‌ی t باد دمای 0 درجه ایفا کند. زیرا ما می‌توانیم از آن به عنوان یک قرینه‌ی حسّی قانع کننده استفاده کنیم و باورمان را درباره‌ی موضوع به اندازه کافی موجه سازیم. براون در تحلیل فلسفی اثبات بولتزانو، تمایز مشابهی بین دو نوع پیوستگی، و در واقع دو نوع نمایش پیوستگی برقرار می‌کند:

ما عملاً با دو مفهوم از پیوستگی مواجه هستیم: اولی که تقریباً بولتزانو باب کرد، مفهوم ε-δ ای[4] پیوستگی است، و دیگری که مفهومی هندسی است و میتوان آن را پیوستگی مدادی[5] نامید. گرچه این تا حدودی درست است که ما در اینجا با دو مفهوم متفاوت از پیوستگی سر و کار داریم، اما نباید از این تمایز نتیجه بگیریم که اثبات‌های

1. symbolic mathematical explanations
2. Non-symbolic
3. homomorphism
4. the ε-δ concept
5. pencil continuity

مبتنی بر این دو مفهوم قیاس‌ناپذیرند. [...] حتی اگر تصویر در اینجا فقط نقش روان‌شناختی داشته باشد، باز هم برای تحقق این نقش باید یک ارتباط عمیق بین این دو مفهوم از پیوستگی در کار باشد. اگر این دو کاملاً با یکدیگر بی‌ارتباط هستند پس تصویر اساساً چه نقشی می‌تواند ایفا کند؟ استفاده از تصاویر بدون باور به این ارتباط، مثل آن است که در یک لغتنامه، توصیفی لفظی از سیب ارائه شود و آن‌را با تصویر یک موز توضیح دهند.[۱]

تبیین پیوستگی بر اساس مفهوم ε-δ ای، یک تبیین نمادی، و تبیین پیوستگی بر اساس مفهوم مدادی، یک تبیین غیرنمادی است. همانطور که براون نیز تأکید دارد این دو مفهوم گرچه متمایزند اما قیاس‌پذیرند. به نظر می‌رسد آنچه که این دو مفهوم را قیاس‌پذیر ساخته شباهت ساختاری آنهاست. پیوستگی مدادی از یک سو با پیوستگی نمادی یا ε-δ ای همساختار است و از سوی دیگر با حقایق طبیعی پیوسته مثل سرعت متوسط هواپیما یا تغییر دما.

تصویر۳ نیز یک تبیین غیرنمادی برای مدعای فیثاغورس به شمار می‌رود. این تصویر می‌تواند نقش تبیینی مؤثر و خوبی را برای قابل فهم ساختن رابطه‌ی فیثاغورس ایفا کند، زیرا ما می‌توانیم از آن به عنوان یک قرینه‌ی حسی قانع کننده استفاده کنیم و باورمان را درباره‌ی موضوع به اندازه کافی موجه سازیم. طبق تمایز نشانه‌شناختی که در بالا انجام دادیم مثلث‌ها و مربع‌ها در تصویر مذکور دلالت غیرنمادی (تصویری) دارند. اما در عین حال، برای اثبات قضیه فیثاغورس از نمادها نیز استفاده شده است. نه تنها نماد $a^2+b^2=c^2$ و تصویر مربعهای سوار بر اضلاع مثلث ۴، با یکدیگر همساختار هستند بلکه اساساً گذر از تصویر بازچینی شده‌ی این مربع‌ها (یعنی تصویر۳ ب) به رابطه‌ی جبری $a^2+b^2=c^2$ جز با فرض این هم‌ساختاری منطقی و معقول نخواهد بود.

1. Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, 2008, p.30.

گذر از تصویر ۳ ب به رابطه‌ی مذکور یکی از گام‌های اصلی اثبات است و بنابراین تصویر مذکور اجتناب‌ناپذیر است. در حالی‌که تصویر ۱ و ۲ چنین جایگاهی در اثبات قضیه‌ی بولتزانو نداشتند. این تفاوت به قدری مهم است که ما را به تمایز پنجم بین تبیین‌ها رهنمون می‌سازد.

تبیین‌های اجتناب‌پذیر و اجتناب‌ناپذیر

همان‌طور که اشاره شد، تصاویر ۱ و ۲ تفاوت مهمی، به لحاظ نقش تبیینی، با تصویر ۳ دارند. تبیینی که بر تصاویر ۱ و ۲ استوارند در اعتبار اثبات بولتزانو هیچ تأثیری ندارند. به‌طوری‌که با حذف یا نادیده گرفتن آنها نیز می‌توان استدلال او را درباره‌ی وجود قطعی مقدار میانی صفر در آن شرایط پذیرفت. اگر بخواهیم از تمثیلی که براون در نقل قول بالا درباره نقش تصاویر در لغتنامه‌ها گفت استفاده کنیم، در واقع با حذف تصویر سیب از کنار توصیف لفظی این واژه خللی به تعریف آن وارد نمی‌شود. اما گویا درج تصاویر گاهی اجتناب‌ناپذیر است یا دست کم حذف برخی تصاویر از لغتنامه‌ها انتقال معانی را ناممکن، و نه صرفاً دشوار، می‌سازد. وقتی که تعریف معنای یک واژه متضمن ارجاع به تصویر باشد. مثلاً فرض کنید کسی در توضیح معنای «گره پروانه» بنویسد «گرهی که به منظور انتقال اشیاء سنگین استفاده می‌شود و مطابق تصویر به گونه‌ای بسته می‌شود که سنگینی شیئ در طرفین گره توزیع شود». نقش تصویر در این تعریف اجتناب‌ناپذیر است. مخصوصاً اگر بدانیم برای انتقال اشیاء سنگین بیش از یک نوع گره وجود دارد. در اثباتی که برای قضیه فیثاغورس آوردیم نیز به یک تصویری ارجاع شده است که اولاً نقش تبیینی دارد و ثانیاً اجتناب‌ناپذیر است. گرچه در این اثبات نیز نمادها واجد قدرت تبیینی‌اند اما به نظر می‌رسد دست کم در یکی از گام‌ها، یعنی در بازچینی قطعات، بار تبیینی بر دوش تصویر می‌افتد. اما در اثباتی که برای قضیه بولتزانو ارائه دادیم، گرچه افزون بر تبیین نمادی استوار بر اپسیلن دلتا، دو تبیین غیرنمادی نیز به آن منضم کردیم

(یعنی تصاویر ۱ و ۲) اما بار تبیینی اثبات بولتزانو بر دوش این تصاویر نیست و می‌توان آنها را کنار گذاشت.

می‌توان گفت که پیش از همه، باروایز و اچمندی به این دو نوع اخیر از تبیین‌های ریاضیاتی تلویحاً اشاره کرده‌اند. آنها در مقاله‌ی مشترکی به نام «اطلاعات تصویری و استدلال معتبر» بر اساس چند موردپژوهی استدلال می‌کنند که نقش تصاویر در اثبات برخی قضایا اساسی و اجتناب‌ناپذیر است. اتفاقاً آنها در ذیل مورد سوم مقاله‌ی خودشان به اثبات قضیه فیثاغورس می‌پردازند.[۱] به بیان آنها اولاً استدلال با روش بازچینی، یک اثبات آشکارا مقبول برای قضیه فیثاغورس است. ثانیاً این اثبات ترکیبی است از چیره-دستی[۲] هندسی تصاویر و چیره‌دستی جبری نمادها. ثالثاً تصاویر نقش سرنوشت‌سازی[۳] در این اثبات ایفا می‌کنند.[٤]

معمولاً در مخالفت با نقش اساسی تصاویر در اثبات‌های ریاضیاتی دو ایراد وارد می‌شود: تصاویر فریب دهنده‌اند و تصاویر پدیده‌های جزئی هستند. در مقابل باروایز و اچمندی با ارائه نمونه‌هایی نشان می‌دهند که اولاً فریب دهندگی و خطاآمیز بودن مختص تصاویر نیست و نمادهای ریاضیاتی نیز می‌توانند فریب دهنده باشند و ثانیاً اثبات‌های تصویری به ویژگی‌های جوهری و نه عرضی[٥] تصاویر تکیه می‌کنند.

---

1. Barwise, J. & J. Etchmendy, “Visual information and Valid Reasoning, in Visualization in Teaching and Learning Mathematics”, W. Zimmermann and S. Cunningham(eds.), *Mathematical Association of America*, Washington, DC, 1991, p.12.
2. manipulation
3. crucial role
4. Barwise, J. & J. Etchmendy, “Visual information and Valid Reasoning, in Visualization in Teaching and Learning Mathematics”, p.13.
5. accidental features

انواع بیشتر

تاکنون ده نوع تمایز برای تبیین‌های ریاضیاتی را بر شمردیم اما تنوع تبیین‌های ریاضیاتی بیش از اینها است. یعنی چه مستقیماً به سراغ ریاضیات برویم و چه به واکاوی آثار فیلسوفان ریاضیات بپردازیم با انواع بیشتری از تبیین‌ها مواجه خواهیم شد. مثلاً تبیینی بودن می‌تواند به دو معنای مطلق و نسبی نیز به کار رود. بر اساس معنای مطلق یک فرآیند اثبات یا ایده‌آل‌سازی را می‌توان به دو نوع عمده‌ی تبیینی و غیر تبیینی تقسیم کرد. اما در معنای نسبی، تبیینی بودن یک فرآیند تنها به معنای «تبیینی‌تر» بودن آن نسبت به یک فرآیند تبیینی دیگر است. مطلق بودن تبیین ریاضیاتی تمایز مهمی است که بسیاری از افراد در نظریات خود آن‌را لحاظ کرده‌اند. مثلاً ففرمن تبیین برهانی درونی را بر اساس دو مؤلفه‌ی تجرید[1] و تعمیم[2] توضیح می‌دهد اما در عین حال بر اساس این مؤلفه‌ها اثبات‌ها را به دو نوع ساده‌ی تبیینی و غیر تبیینی تقسیم نمی‌کند بلکه، با لحاظ نسبی بودن یا نبودن آنها، به انواع متنوع‌تری اشاره می‌کند. استینر در تقریر دیدگاه ففرمن در این باره، معتقد است دست کم سه نوع تبیینی بودن را برای اثبات‌ها می‌توان از هم متمایز ساخت: ۱. اثبات فی‌نفسه تبیینی (یک اثبات فی نفسه[3] تبیینی است هرگاه، به یک معنای مطلق[4] که نقداً معیّن است، مجرّد یا عام باشد)؛ ۲. اثبات فی‌نفسه نسبتاً تبیینی (یک اثبات فی نفسه نسبتاً تبیینی است هرگاه، نسبت به آنچه که اثبات می‌کند، مجرّدتر یا عام‌تر باشد)؛ ۳. اثبات نسبتاً تبیینی (از میان دو اثبات برای یک قضیه‌ی واحد، یکی نسبت به دیگری تبیینی‌تر است هرگاه مجردتر یا عام‌تر از آن باشد).[5]

---

1. abstraction
2. generalization
3. Per se
4. In some absolute sense
5. Steiner, “Mathematical Explanation”, *Philosophical Studies*, p.136.

با این حال، به نظر می‌رسد ده تمایزی که در این مقاله توضیح داده شد مهم‌ترین انواع تبیین‌های ریاضیاتی را شامل می‌شود. به‌طوری‌که ارزیابی هر مدعایی درباره وجود و ماهیت تبیین ریاضیاتی بدون لحاظ این تمایزها قابل دفاع به نظر نمی‌رسد.

نتیجه

«تبیین ریاضیاتی» در عام‌ترین معنا عبارتست از هر نوع توضیحی که ارائه می‌شود تا چیزی در ریاضیات یا با ریاضیات فهمیده شود. بنابراین با تدقیق بیشتر در انواع تبیین‌های ریاضیاتی، درک بهتر و کامل‌تری از این مفهوم به دست خواهیم آورد. از جهت‌های مختلفی می‌توان انواع مختلف تبیین ریاضیاتی را از هم متمایز کرد. ما در این مقاله از پنج جهت، آنها را از هم متمایز ساختیم و با ذکر توضیحات و مثال‌هایی ماهیت آنها را روشن کردیم. با لحاظ هر کدام از این جهت‌ها یک تمایز دوگانه شکل می‌گیرد، بنابراین مجموعاً می‌توان دست کم از ده نوع تبیین ریاضیاتی سخن گفت:

۱. به جهت نوع تبیین‌خواه: تبیین‌های درونی و بیرونی. تبیین‌خواه در این دو نوع تبیین، به ترتیب، پدیده‌های طبیعی و ریاضیاتی است. این تمایز و این دو نوع تبیین، از تمایزها و انواع دیگر معروف‌تر است.

۲. به جهت راهبرد تبیینی: تبیین‌های فراگیر و موضعی. در راهبرد اول، یک امر ریاضیاتی معماآمیز را از طریق اندراج در یک الگوی گسترده‌تر یا مجردتر فهم‌پذیر می‌سازیم. اما در راهبرد دوم، تبیین ریاضیاتی با توسّل به یک رابطه‌ی معین بین تبیین‌خواه و تبیین‌گر میسّر می‌شود. این دو نوع تبیین را می‌توان، به ترتیب، کیچری و استینری نیز نامید. آنها این دو نوع تبیین را بیشتر به عنوان دو نظریه رقیب معرفی می‌کنند. بنابراین این تمایز، بر خلاف سایر موارد، از یک منظر مرتبه دوم انجام می‌پذیرد. در هر حال، اگر ما تبیین را به معنای عامی که در بالا گفتیم به کار بریم این

دو نوعِ رقیب، به جهت کارکرد مشترک فهم‌پذیرسازی، قسیم همدیگر می‌شوند و به جهت تفاوت در راهبرد فهم‌پذیرسازی از هم تفکیک می‌شوند.

۳. به جهت نقش شناختی و نظری: تبیین‌های ریاضیاتی برهانی و غیربرهانی. این دو نوع تبیین، به ترتیب، در فرآیند اثبات و فرآیندهایی مثل ایده‌آل‌سازی و نظریه پردازی ریاضیاتی ارائه می‌شوند. گرچه هر دو نوع تبیین برای فهم‌پذیر ساختن تبیین‌خواه به کار می‌روند اما این فهم‌پذیری در تبیین‌های برهانی در خدمت مستدل کردن یا اقناع‌پذیری مدعیات است، درحالی‌که تبیین‌های غیربرهانی برای تحقق اهداف دیگر، مثل تجرید پدیده‌ها، وحدت بخشی به امور ظاهراً بی‌ربط، پیش‌بینی امور و حل مسئله‌ها، به کار می‌روند.

۴. به جهت نوع دلالت تبیینی: تبیین‌های نمادی و غیرنمادی. تبیینی را که در آن بارِ تبیینی بر دوش نمادهاست تبیین نمادی می‌نامیم. نمادها نشانه‌هایی هستند که دلالت‌گری آنها صرفاً بر قرارداد زبانی استوار است. در مقابل، تصاویر و نمایه‌ها، نشانه‌هایی هستند که نوعی رابطه‌ی غیرقراردادی، بخصوص رابطه‌ی همساختاری، در دلالت‌گری آنها دخیل است. تبیینی که در آن بارِ تبیینی بر دوش نشانه‌های غیر نمادی، مثل تصاویر باشد، غیرنمادی نامیده می‌شود.

۵. به جهت میزان تعیین‌کنندگی: تبیین‌های اجتناب‌پذیر و اجتناب‌ناپذیر. بعضی از تبیین‌ها را می‌توان از فرآیند یک استدلال یا ایده‌آل‌سازی حذف کرد، بدون آنکه خللی به آن فرآیندها وارد آید. این نوع تبیین‌ها صرفاً با اهداف عمل‌گرایانه یا آموزشی ارائه می‌شوند. اما برخی دیگر به گونه‌ای هستند که بار اصلی تبیین بر دوش آنهاست یعنی در فرآیند استدلال یا ایده‌آل‌سازی تعیین کننده و اجتناب‌ناپذیرند.

منابع

همپل، کارل، فلسفه‌ی علوم طبیعی، ترجمه حسین معصومی همدانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰ش.

لازی، جان، درآمدی تاریخی به فلسفه‌ی علم، ترجمه علی پایا، سمت، ۱۳۷۷ش.

بنتون، تد، و یان کرایب، فلسفه‌ی علوم اجتماعی، ترجمه شهناز مسمی پرست و محمود متحد، آگه، ۱۳۸۹ش.

فروند، ژولین، نظریه‌های مربوط به علوم انسانی، ترجمه علی محمد کاردان، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷ش.

Baker, A., “Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?”, *Mind*, 2005.

Barwise, J. & J. Etchmendy, “Visual Information and Valid Reasoning, in Visualization in Teaching and Learning Mathematics”, *Mathematical Association of America*, W. Zimmermann and S. Cunningham(eds.), Washington, DC, 1991.

Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledege, 2008.

Colyvan, M., *An Introduction to the Philosophy of Mathematics* (*Cambridge Introductions to Philosophy*), University of Sydney, Sydney, Australia NSW, 2011.

Friedman, M., “Explanation and Scientific Understanding”, *The Journal of Philosophy*, 1974.

Kitcher, P., “Explanatory Unification”, *Philosophy of Science*, 1981.

Mancosu, P. “Explanation in Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008.

http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/

Rota, G.C., *The Phenomenology of Mathematical*, Proof. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.

Steiner, M., “Mathematical Explanation”, *Philosophical Studies*, 1978.

Zelcer, M., “Against Mathematical Explanation”, *Journal for General Philosophy of Science*, 2013, Volume 44.