بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های بازه ای در تحلیل پوششی داده ها

مهدی فلاح جلودار

گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحدآیت الله آملی، آمل، ایران

پست الکترونیکی: mehdi.fallah_jelodar@yahoo.com ,

چکیده

مدلهای اساسی تحلیل پوششی داده ها به گونه ای طراحی شده اند که مقادیر شاخص های ورودی و خروجی باید در آنها مشخص و معلوم باشند. به عبارت دیگر این مدلها برای در نظر گرفتن دادهای نادقیق، بازه ای، فازی، قضاوتی و ... مورد استفاده قرار نمی گیرند. در این مقاله قصد بر آن است تا ضمن مروری بر تحقیقات گذشته در تعیین کارایی واحدهایی که دارای داده های بازه ای هستند و بیان نقاط ضعف و قوت آنها، روشی برای تعیین بازده به مقیاس واحدهای بازه ای ارایه نماییم.

واژه های کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، داده های بازه ای، بازده به مقیاس

مقدمه

امروزه تحلیل پوششی داده ها [1] (DEA) بعنوان ابزاری مناسب و موثر در مدیریت و تئوری تصمیم گیری ، اولین بار توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) معرفی گردید و تا کنون بطور شگفت انگیزی در مبانی نظری و مدل سازی و همچنین توسعه آن در مباحث کاربردی پیشرفت زیادی داشته است .

مدل های اساسی DEAهمچون CCR [2]و BCC [3]و نظایر آن با داده های نا دقیق کار نمی کنند . در حقیقت در تمام این مدل ها فرض بر این است که همه ورودی ها و خروجی ها به طور دقیق و قطعی معین و مشخص هستند . به هر جهت این موضوع در مسائل حقیقی و کاربردی جهان پیرامون ما نمی تواند درست باشد . از مواردی که در آن داده های نا مشخص به کار می‌روند ، می‌توان به DEA با داده های نا دقیق به خصوص زمانی که مجموعه ای از واحد های تصمیم گیرنده[4] (DMU) مسایل داده های از دست رفته ، داده های قضاوتی ، داده های پیشگویانه یا اطلاعات وصفی اشاره نمود . در حالت کلی داده های نا مشخص و داده های نا دقیق را می‌توان در زمره اعداد بازه ای یا اعداد فازی قرار داد . بنابراین چگونگی ارزیابی و مدیریت مجموعه ای از واحد های تصمیم گیرنده با اطلاعات بازه ای یا فازی از مسایل و مباحث سنگین تحقیقاتی می‌باشد . همه این موارد نشانگر لزوم توسعه مدل‌های DEA در زمینه مبانی نظری و کاربرد های واقعی آن می‌باشد .

کوپر[5] و همکاران (۱۹۹۹ و ۲۰۰۱) بر طبق شواهد ، قراین و مستنداتی که در اختیار ماست ، اولین محققینی بودند که در مورد داده های نا دقیق مانند داده های کراندار ، داده های وصفی و داده های کراندار نسبی در DEA تحقیق نموده اند . مدل DEA به دست آمده، مدل DEA نا دقیق یا IDEA نامیده شد . مدل مذکور حاصل تبدیل یک مساله برنامه ریزی غیر خطی به یک مساله برنامه ریزی خطی با بهره جستن از یک سری تبدیل مقیاس و تغییر متغیر می‌باشد . نمره کارایی نهایی هر DMU به طرز رضایت بخشی کوچکتر یا مساوی یک تعیین گردید .

کیم [6] و همکاران نیز (۱۹۹۹) از تبدیل مقیاس و تغییر متغیر مشابهی برای این کار استفاده نمودند . ولی آن داده های بازه ای را به حالت قابل شمارش تبدیل نمودند . لی [7] و همکاران (۲۰۰۲) ایده IDEA را مدل جمعی توسعه دادند . آنها ادعا کردند که مدل

پیشنهادی توسط کوپر و همکاران مدل های DEA را پیچیده می‌کنند و دلیل آن تعداد زیادی تبدیل مقیاس و تغییر متغیر در مدل آنها بود . بعبارت دیگر تغییر متغیر پیشنهادی توسط کوپر و همکاران تعداد متغیر های تصمیم مساله را بطور تامل برانگیزی از $m + s$ به $(m + s)\times n$ افزایش می‌دهد که در m , s و n به ترتیب تعداد ورودی ها ، خروجی ها و DMU ها می‌باشد . هم چنین تغییر و تبدیل مقیاس صورت گرفته در مدل کوپر و همکاران داده های واقعی و نیز داده های نا دقیق شامل داده های ترجیحی و داده های بازه ای (داده های کراندار) را به قید تبدیل می‌کند . که این موضوع باعث افزایش مضاعف در میزان محاسبات خواهد شد.

[1] Data Envelopment Analysis
[2] Charnes , Cooper and Rohdes
[3] Banher , Charnes and Cooper
[4] Decis ion Making Unit
[5] Cooper
[6] Kim
[7] Lie

دسپوتیز و اسمیرلیس[۱] (۲۰۰۲) نیز در مطالعه IDEA اثر گذار بودند . آنها روش جایگزینی برای در نظر گرفتن داده های نا دقیق ارایه نمودند . ایده آنها مبتنی بر تبدیل یک مدل DEA غیر خطی به یک مساله برنامه ریزی خطی معادل با اضافه نمودن فقط تبدیلات مربوط به متغیر ها بود . نمره کارایی بدست آمده به صورت بازه ای در نظر گرفته شد . بر اساس تحقیقات آنها ، حقیقت و خرم (۲۰۰۴) مساله حداقل و حداکثر تعداد واحد های DEA کارا را مطالعه نمودند . هم چنین جهانشاه لو و همکاران (c و ۲۰۰۴a) در مورد مسایل مرتبط مانند بازده به مقیاس[۲]، تحلیل حساسیت و پایداری[۳] و نیز کارایی FDH [۴] مطالعه نمودند . ولی همانگونه که در قسمت بعدی به طور مفصل به آن خواهیم پرداخت مدل های استفاده شده توسط آنها از امکان تولید های متغیر و متفاوت استفاده می‌نماید . بعبارت دیگر مجموعه های متفاوتی از قیود برای ارزیابی نمره کارایی DMU ها بکار می‌رود که این امر مقایسه نسبی واحد ها را بی معنی می‌کند .

انتانی[۵] و همکاران (۲۰۰۲) یک مدل DEA بر اساس اساس بهترین و بدترین شرایط در کارایی بازه ای معرفی نمودند . مدل آنها ابتدا برای داده های ثابت طراحی شده بود ولی سپس به حالت داده های بازه ای و داده های فازی توسعه داده شد . در حالت تئوری به نظر می‌رسید که مدل آنها مدل مناسبی برای در نظر گرفتن داده های بازه ای و داده های فازی باشد . بعد ها مشخص شد که مدل پیشنهادی دارای نقاط ضعف نیز هست . از جمله نقاط ضعف و ابهامات موجود در این مدل آن است که آنها از میان بازه ورودی و خروجی فقط یک ورودی و خروجی را انتخاب نماید که این موضوع باعث شد تا مقدار زیادی از اطلاعات واحد تحت ارزیابی از دست بروند . البته لازم به ذکر است که آنها هم چنان بر نظریه قبلی یعنی استفاده از امکان تولید های مختلف (قیود متفاوت) باقی ماندند. شایان ذکر است که مدل پیشنهادی توسط انتانی و همکاران دارای تفاوت هایی باسایر مدل های DEA بازه ای دارد .

از آن جمله که در مدل های پیشنهادی آنها از بدترین نمره کارایی که بر اساس نا مطلوب ترین نقطه بازده ورودی و خروجی بدست آمده است به عنوان نمره کارایی کل بازه استفاده نمودند . (منظور از نا مطلوب ترین نقطه بازه زمانی است که DMU مورد نظر دارای بیشترین ورودی و کمترین خروجی باشد .) در حالی که سایر مدل های DEA بازه ای از بهترین نمره کارایی در نامطلوب ترین نقطه بازه به عنوان کران پایین کارایی بعنوان معیاری برای ارزیابی استفاده نمودند . مدل های پیشنهادی دارای معانی و تفاسیر و کاربردهای متفاوتی هستند . مدل انتانی قابلیت استفاده در حالتی که داده ها ثابت ، بازه ای و یا فازی هستند را داراست ولی سایر مدل های DEA بازه ای فقط از داده های بازه ای استفاده می‌کنند و نمی توانند از داده های ثابت استفاده کنند .

وانگ [۱] و همکاران (۲۰۰۵) استفاده از امکان تولید های متفاوت و قیود مختلف در ارزیابی را یک نقطه ضعف عمده مدل های DEA بازه ای معرفی کردند . در این راستا با استفاده از داده های بازه ای و فازی امکان تولید ثابتی برای ارزیابی همگن همه واحد های تحت ارزیابی معرفی کرده اند . نقاط قوت و ضعف هر یک از روشها در بخش آینده به تفصیل بحث خواهد شد .

---
۱ Despotis and Smirlis
۲ Return to Scule
۳ Sensitivity and Stability Analysis
۴ Free Disposality Hull
۵ Entani

در نهایت توجه به این نکته ضروری است که قرار داشتن ورودی ها و خروجی ها در یک بازه به معنی مجهول و متغیر بودن آنها نمی باشد ، بلکه به این مفهوم است که محدوده تغییر ورودی ها و خروجی ها مشخص است ولی از مقدار دقیق آنها اطلاع نداریم . با این تفاصیل به معرفی مدل های DEA می‌پردازیم .

مدل های DEA بازه ای

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده برای ارزیابی در اختیار هستند . هر DMU از m ورودی متفاوت برای تولید s خروجی متفاوت استفاده می‌نماید . بعبارت دیگر DMU_j که در آن j=۱,...,n از ورودی های $X_j = (x_{ij}, i = 1, \dots, m)$ برای تولید خروجی های $Y_j = (y_{rj}, r = 1, \dots, s)$ برای ارزیابی DMU_p که $p \in \{1, \dots, n\}$ از مدل زیر استفاده می‌شود :

$$Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}$$

$$S.t \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j=۱,\dots,n \qquad (۱)$$

$$u_r \ge 0, r = 1, \dots, s$$

$$v_i \ge 0, i = 1, \dots, m$$

بدون اینکه به کلیت موضوع خللی وارد شود فرض کنید داده های ورودی و خروجی نتوانند بصورت دقیق معرفی شوند . دلیل این موضوع عدم وجود اطمینان در معرفی داده های مربوط می‌باشد . فقط می‌دانیم این داده ها توسط کران های بالا و پایین بوسیله بازه های زیر تعریف می‌شوند :

$$x_{ij} \in [x_{ij}^{l}, x_{ij}^{u}], j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$$

$$y_{rj} \in [y_{rj}^{l}, y_{rj}^{u}], j = 1, \dots, n, r = 1, \dots, s$$

(۲)

همچنین در بازه فوق $x_{ij}^{l} > 0$ و $y_{rj}^{l} > 0$ به ازای هر r,j,i .

استفاده از مدل (۱) برای چنین داده هایی نا ممکن است. دسپوتی و همکاران (۲۰۰۲)، ابتدا ورودی هاو خروجی های نا دقیق را به صورت زیر تعریف نمودند :

$$x_{ij} = x_{ij}^{l} + S_{ij}(x_{ij}^{u} - x_{ij}^{l}), \ 0 \le S_{ij} \le 1, \forall_i, \forall_j$$

$$y_{rj} = y_{rj}^{l} + t_{rj}(y_{rj}^{u} - y_{rj}^{l}), 0 \le t_{rj} \le 1, \forall_r, \forall_j$$

(۳)

با اضافه نمودن تبدیلات (۳) در مدل (۱) این مدل به یک مدل برنامه ریزی غیر خطی تبدیل خواهد شد . برای تبدیل آن به

یک مساله برنامه ریزی خطی تغییر متغیر زیر اعمال می‌شود.

$$q_{ij} = S_{ij} . v_i \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$p_{rj} = t_{rj} . u_r \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad r = 1, \dots, s$$

(۴)

بنابراین مدل غیر خطی به مساله برنامه ریزی خطی زیر تبدیل می‌گردد :

$$\text{Max} \sum_{r=1}^{s} (u_r y_{rp}^{l} + (y_{rp}^{u} - y_{rp}^{l}) P_{rp})$$

$$\text{S.t} : \sum_{i=1}^{m} (v_i x_{ip}^{l} + (x_{ip}^{u} - x_{ip}^{l}) q_{ip}) = ۱$$

$$\sum_{r=1}^{s} (u_r y_{rj}^{l} + (y_{rj}^{u} - y_{rj}^{l}) P_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} (v_i x_{ij}^{l} + (x_{ij}^{u} - x_{ij}^{l}) q_{ij}) \le$$

$$j=۱,\dots n \qquad (۵)$$

$$q_{ij} - v_i \le 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$P_{rj} - u_r \le 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$v_i \ge 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s$$

$$q_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$P_{rj} \geq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

در مدل فوق اگر $q_{ij} = P_{rj} = 0$ باشد به ازای تمام j, r, i، در این صورت تمام داده ها مشخص و ثابت هستند . همه مدل های فوق را براحتی می‌توان به مدل BCC نیز تعمیم داد . به عبارت دیگر با کسر u_0 از تابع هدف و دسته قیود دوم این مهم حاصل خواهد شد

دسپوتی و همکاران (۲۰۰۶)، برای سهولت در امر ارزیابی و استفاده از مدل های بازه ای ، جفت مسایل برنامه ریزی خطی زیر را معرفی نمودند . توجه به این نکته ضروری است که ایده مورد استفاده در مدل های پیشنهادی همان ایده بکار رفته در مدل(۵) می‌باشد :

$$\text{Max}\theta_p^u = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}^u$$

$$\text{S.t}: \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}^l = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}^u - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}^l \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^u \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad j \neq p$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \qquad (۶)$$

و مدل :

$$\text{Max} \quad \theta_p^l = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}^l$$

$$\text{S.t}: \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}^u = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}^l - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}^u \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^l \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad j \neq p \qquad (۷)$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

در مدل های فوق θ_p^u و θ_p^l به ترتیب بهترین کارایی نسبی ممکن برای مطلوب ترین و نا مطلوب ترین وضعیت DMU_p تحت ارزیابی است . مدل (۶) در حالتی است که DMU_p در مطلوب ترین شرایط خود می‌باشد و سایر واحد ها در نا مطلوب ترین شرایط خود به سر می‌برند . هم چنین در مدل (۷) وضعیت برعکس است . یعنی DMU_p (واحد تحت ارزیابی) در نا مطلوب ترین شرایط وضعیت خود و سایر واحد ها در مطلوب ترین وضعیت خود می‌باشند . منظور از مطلوب ترین شرایط زمانی است که واحد های مورد نظر در بازه های ورودی خودکمترین مقدار و در بازه های خروجی خود بیشترین مقدار را اخذ نموده باشند .منظور از نامطلوبترین شرایط زمانی است که واحد مورد نظر در بازه های ورودی بیشترین مقدار و در بازه های خروجی خود کمترین مقداررا اخذ نموده باشد .حال به بررسی کارایی مدل های DEA بازه ای می‌پردازیم . در این راستا تعریف ۳ مجموعه در دستور کار قرار میگیرد :

۱)E^{++} : مجموعه تمام واحد هایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی خود کارا باشد . اگر بخواهیم مفهوم E^{++} را با استفاده از مدل های (۶) و (۷) بیان کنیم این مجموعه مسایل تمام اعضایی است که $\theta_j^{*l}=1$ و بالتبع $\theta_j^{*u}=1$ بعبارت دیگر :

$$E^{++} = \{ j : \theta_j^{*l} = 1 \}$$

۱) E^{+} : مجموعه تمام واحد هایی است که در بهترین شرایط خود کارا هستند . با استفاده از

مدل های (۶) و (۷) ، E^{+} مجموعه تمام واحد هایی است $\theta_j^{+l} \geq 1$ و $\theta_j^{+u} = 1$

۲) E^{-} : مجموعه تمام واحد هایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی خود نا کاراست . بعبارت دیگر مجموعه تمام واحد هایی است که $\theta_j^{+u} \geq 1$ وبالتبع $\theta_j^{+l} \geq 1$.

به تمام واحد هایی که در E^{++} قرار می‌گیرد واحد های fully efficient گفته می‌شود .

از مهم ترین ایراداتی که به مدل های پیشین وارد می‌گردد آن است که در این مدل ها از امکان تولید های متفاوت برای ارزیابی استفاده می‌شود . بعبارت دیگر مجموعه امکان تولید هر واحد تصمیم گیرنده با واحد های دیگر فرق می‌کند و این موضوع ارزیابی همگن و نسبی واحد های تحت ارزیابی را زیر سوال می‌برد . به بیان واضح تر اگر n تعداد واحد های تحت ارزیابی باشد در این صورت به تعداد ۲n مجموعه امکان تولید وجود خواهد داشت . وانگ[۱] و همکاران (۲۰۰۵) موضوع را بصورت زیر بررسی کردند . با توجه به تعریف کارایی می‌دانیم :

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \quad , j=1,\dots,n \qquad (۸)$$

که θ_j کارایی DMU_j است با توجه به حساب بازه ای روابط زیر را داریم :

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r [y_{rj}^{l}, y_{rj}^{u}]}{\sum_{i=1}^{m} v_i [x_{ij}^{l}, x_{ij}^{u}]} = \frac{[\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{l} , \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{u}]}{[\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l} , \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u}]} = \left[\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{l}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u}} , \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{u}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l}} \right] , \quad j=1,\dots,n$$

(۹)

از روابط (۹) مشخص است که θ_j باید یک عدد بازه ای باشد که آن را بصورت $[\theta_j^{l}, \theta_j^{u}], j = 1,\dots,n$ می‌نامیم حال فرض کنید :

$$\theta_j = [\theta_j^{l}, \theta_j^{u}] = \left[\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{l}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u}} , \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{u}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l}} \right] \subseteq [0,1] , \quad j=1,\dots,n$$

(۱۰)

بنابراین داریم :

$$\theta_j^{u} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{u}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l}} \leq 1 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$\theta_j^{l} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{l}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u}} > 0 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

(۱۱)

لذا برای بدست آوردن کران بالا و کران پایین نمرات کارایی مسایل برنامه ریزی کسری زیر پیشنهاد می‌گردد :

$$\text{Max } \theta_p^{u} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}^{u}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}^{l}}$$

$$\text{S.t } \theta_j^{u} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{u}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l}} \leq 1$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1,\dots,s \quad (۱۲)$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,\dots,m$$

و نیز

$$\text{Max } \theta_p^{l} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}^{l}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}^{u}}$$

$$\text{S.t } \theta_j^{u} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{u}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l}} \leq 1 , \ j=1,\dots,n$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1,\dots,s \quad (۱۳)$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,\dots,m$$

[۱] Wang

در نهایت با اعمال تبدیلات چانز-کوپر[۱] (۱۹۶۲) مسایل برنامه ریزی خطی برای تعیین کران بالا و پایین نمرات کارایی بدست می‌آیند :

$$\text{Max } \theta_p^u = \sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rp}^u$$
$$\text{S.t } \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ip}^l = 1$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj}^u - \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij}^l \le 0$$
, j=۱,... n
$$u_r \ge 0,\ v_i \ge 0,\ \forall i, r \qquad (۱۴)$$

$$\text{Max } \theta_p^l = \sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rp}^l$$
$$\text{S.t } \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ip}^u = 1$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj}^u - \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij}^l \le 0$$
, j=۱,... n
$$u_r \ge 0,\ v_i \ge 0,\ \forall i, r \qquad (۱۵)$$

البته روش پیشنهادی نیز دارای ایرادات اساسی است . از مهمترین آنها می‌توان به استفاده از کران بالا و پایین ورودی ها و خروجی ها در مدل (۱۵) نام برد که با نفس ارزیابی در تناقض است .

در بخش آینده بازده به مقیاس واحد های تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های بازه ای را مورد مطالعه قرار خواهیم داد . با توجه به ساختار مدل های پیشنهادی در این فصل ، مطالعات بعدی بر اساس مدل های پیشنهادی دسپوتی و همکاران (۲۰۰۲) معطوف می‌داریم .

بازده به مقیاس واحد های تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های بازه ای

همانگونه که دربخش قبل به آن اشاره شده ، پس از ارزیابی واحد های تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های بازه ای با استفاده از مدل پیشنهادی دسپوتی و همکاران (۲۰۰۲) واحد های تحت ارزیابی به سه دسته E^{++} و E^{+} و E^{-} تقسیم شدند . در حقیقت E^{++} مجموعه تمام DMU هایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی هایشان کارا هستند . در این نوشتار چنین واحد هایی را کاملا کارا می‌نامیم . E^{+} مجموعه DMU هایی است که در بهترین شرایط کارا هستند ولی در برخی سطوح داده هایشان کارا نمی باشند . در نهایت E^{-} مجموعه تمام واحد هایی است که در هر حالت نا کارا هستند . در این فصل قصد بر آن است تا مفهوم بازده به مقیاس (آن چنان که در فصل دوم به آن پرداخته شد) برای چنین واحد هایی توسعه داده شود .

برای این منظور مجددا فرم مضربی مدل BCC در ماهیت خروجی را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } \sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rp} - u_0$$
s.t :
$$\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \le 0,$$
j=۱,... n
$$\sum_{i=1}^{p} v_i\, x_{ip} = 1$$
$$v_i \ge \varepsilon,\ i = 1, \dots, m \qquad (۱۶)$$
$$u_r \ge \varepsilon,\ r = 1, \dots, s$$

حال فرض کنید $\bar{u}_0$ و $\underline{u}_0$ سوپریموم و اینفیموم u_0 بر روی ناحیه شدنی مساله (۱۶) باشند . در این صورت :

[۱] Charnes – Cooper Transformation

۱- اگر $\bar{u}_0 < 0$ در این صورت DMU_P دارای بازده به مقیاس صعودی است .

۲-اگر $\underline{u}_0 > 0$ در این صورت DMU_P دارای بازده به مقیاس نزولی است .

۳-اگر $\bar{u}_0 . \underline{u}_0 \leq 0$. این بدان معناست که واحد تحت ارزیابی دارای بازده به مقیاس ثابت می‌باشد

.

بازده به مقیاس بازه‌ای

حال با این مقایسه قصد داریم تا مفهوم بازده به مقیاس را برای حالتی که داده ها بصورت بازه ای می‌باشند تعمیم دهیم . برای این منظور مجددا تعاریف ارایه شده در فصل قبل را در نظر بگیرید . مدل BCC بازه ای را بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\text{Max} \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}^l + (y_{r_0}^u - y_{r_0}^l) P_{r_0} - u_0$$

$$\text{s.t:} -(\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^l + (x_{ij}^u - x_{ij}^l) q_{ij}) + \sum (u_r y_{rj}^l + (y_{rj}^u - y_{rj}^l) P_{rj} - u_0 \leq 0$$

, j=۱,… n

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^l + (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l) q_{i_0} = ۱$$

$$q_{ij} - v_i < 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$P_{rj} - u_r \leq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

(۱۷)

$$, i = 1, \dots, m v_i \geq \varepsilon$$

$$, r = 1, \dots, s u_r \geq \varepsilon$$

$$P_{rj}, q_{ij} \geq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

برای بررسی بازده به مقیاس جهانشاهلو و همکاران [۱۰] مدل زیر را پیشنهاد نمودند :

$$\text{Max } u_0$$

S . t :

$$-(\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^l - (x_{ij}^u - x_{ij}^l) q_{ij}) + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^l + (y_{rj}^u - y_{rj}^l) P_{rj} - u_0 < 0$$

, j=۱,… n , $j \neq 0$

$$-(\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^l + (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l) q_{i_0}) + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}^l + (y_{r_0}^u - y_{r_0}^l) P_{r_0} - u_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^l + (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l) q_{i_0} = ۱$$

$$q_{ij} - v_i \leq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

(۱۸)

$$P_{rj} - u_r \leq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$, i = 1, \dots, m v_i \geq \varepsilon$$

$$r = 1, \dots, s \; u_r \geq \varepsilon ,$$

مدل فوق تمام سطوح داده ها را در بر می‌گیرد . دومین قید از مجموعه قیود تضمین کننده آن است که .DMU تحت ارزیابی در زمره مجموعه E^{++} قرار دارد . مقدار بهین تابع هدف مساله (۱۸) را با u_0^u نمایش می‌دهیم که سوپریموم مقادیر مختلفu_0 در ناحیه شدنی مساله (۱۸) است . اگر نوع تابع هدف مساله (۳ – ۴) به Min تبدیل شود مقدار u_0^l بدست می‌آید که همان اینفیموم u_0 ها روی ناحیه شدنی مساله است . به وضوح $u_0^l \leq u_0^u$ و این مقادیر حدود تغییرات u_0 را بدست می‌دهد . توجه به نکته ضروری است که مدل (۱۸) شدنی است و مقدار بهین تابع هدف می‌تواند بی کران باشد . جهانشاهلو و همکاران برای تعیین بازده به مقیاس واحد تمام کارا (E^{++}) تعاریف زیر را بیان نمودند :

۱- اگر $u_0^u < 0$ در این صورت *.DMU* تحت ارزیابی دارای بازده به مقیاس افزایشی است به اصطلاح می‌گویند *.DMU* یک *IRS* است .

۲- اگر $u_0^l > 0$ در اینصورت *.DMU* تحت ارزیابی دارای بازده به مقیاس کاهشی است و با یک *DRS* به حساب می‌آید .

۳- اگر $u_0^l . u_0^u \leq 0$ در این صورت سطحی از ورودی – خروجی وجود دارد که واحد تحت ارزیابی یک *MPSS* می‌باشد .

یکی از مهمترین مشکلات مدل فوق آن است که این روش فقط بازده به مقیاس واحد های عضو E^{++} و آن هم فقط در بهترین شرایط را مورد ارزیابی قرار می‌دهد . در حقیقت روش فوق الذکر هیچ راهکاری برای تعیین بازده به مقیاس واحد ها در تمام سطوح داده ها ارائه نمی کند . هم چنین با توجه به مشکلات یاد شده این روش هیچ پیشنهادی برای تعیین بازده به مقیاس کلی یک واحد با ورودیها و خروجی های بازه ای در اختیار نمی گذارد .

در این قسمت بر آن هستیم تا با استفاده از ایده اولیه مدل های بازه ای بتوانیم بازده به مقیاس واحد های بازه ای را بدست آوریم . برای این منظور مدل های بازه ای *BCC* زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Max } \theta_0^u = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}^u - u_0$$

$$\text{S.t}: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^l = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}^u - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^l - u_0 \leq 0$$

(۱۹)

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^u - u_0 \leq 0, \quad j=1,\dots n,\ j \neq 0$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad ; \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m$$

و همچنین

$$\text{Max } \theta_0^l = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}^l - u_0$$

$$\text{S.t}: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^u = 1$$

(۲۰)

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^l - u_0 \leq 0, \quad j=1,\dots n,\ j \neq 0$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad ; \quad r = 1,\dots,s; \quad i = 1,\dots,m$$

با حل مدل های (۱۹) و (۲۰) کارایی بازه ای واحد های تحت ارزیابی محاسبه می‌شوند . به وضوح E^{++} مجموعه واحد هایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی کارا هستند . بعبارت دیگر E^{++} مجموعه واحد هایی چون DMU_j است که ۱= θ_j^{*l} همچنین E^{+} مجموعه واحد هایی چون DMU_j است که ۱= θ_j^{u*} و ۱> θ_j^{*l} . در نهایت E^{-} مجموعه تمام واحد هایی است که ۱> θ_j^{u+} .

یکی از مشکلات اساسی روش جهانشاهلو و همکاران این است که در روش ارائه شده توسط آنها فقط بهترین شرایط واحد های تمام کارا (E^{++}) در نظر گرفته شده است و در مورد بدترین نقطه و در نهایت در مورد بازده به مقیاس کلی واحد های تحت ارزیابی هیچ گفته نشده است . برای پاسخگویی به مشکل فوق و در نهایت برای بدست آوردن نوع بازده به به مقیاس واحد های E^{++} در بهترین و بدترین شرایط از مدل های (۱۹) و (۲۰) استفاده می‌نماییم . برای تعیین بازده به مقیاس چنین واحد هایی مدل های زیر را حل می‌کنیم :

$$\text{Max } u_0$$

$$\text{S.t}: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^l = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^u - u_0 \leq 0, \quad j=1,\dots n,\ j \neq 0 \qquad \textbf{(۲۱)}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}^l - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^l - u_0 = 0$$

$v_i , u_r \geq \varepsilon \quad ; \qquad r = 1, \dots, s \qquad ; \quad i = 1, \dots, m$

و همچنین :

$$\text{Max } u_0$$

$$\text{S.t}: \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^{u} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{u} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l} - u_0 \leq 0, \quad j=1,\dots n, j \neq 0 \qquad (۲۲)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r_0}^{l} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i_0}^{u} - u_0 = 0$$

$$r = 1, \dots, s ; v_i , u_r \geq \varepsilon \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

فرض کنید u_0^b و u_0^w به ترتیب جوابهای بهین مسایل (۲۱) و (۲۲) باشند . در این صورت تعریف زیر را می‌پذیریم :

تعریف – بازده به مقیاس واحد های E^{++} بصورت زیر تعریف می‌شود :

۱- اگر $u_0^w < 0$ و $u_0^b < 0$ در این صورت DMU_0 را یک واحد IRS (بازده به مقیاس افزایشی) تعریف می‌کنیم .
۲- اگر $u_0^w > 0$ و $u_0^b > 0$ در این صورت DMU_0 یک واحد DRS (بازده به مقیاس کاهشی) تعریف می‌کنیم .
۳- اگر $u_0^w = 0$ و $u_0^b = 0$ در این صورت DMU_0 یک واحد CRS (بازده به مقیاس ثابت) تعریف می‌کنیم .

مساله مهم در تعریف فوق زمانی است که علامت u_0^b و u_0^w یکسان نباشد . در چنین حالتی بازده به مقیاس واحد تحت ارزیابی را با توجه به نوع علامت u_0 ها تعریف می‌کنیم . یعنی اگر مثلا $u_0^w > 0$ و $u_0^b < 0$ باشد در این صورت بازده به مقیاس این واحد را بصورت $DRS \rightarrow IRS$ تعریف می‌کنیم . سایر حالات مشابه به همین صورت قابل تعبیر هستند .

مثال کاربردی

در این بخش قصد بر آن است تا با اجرای تعریف فوق بر روی یک مجموعه داده ها این روش را بیازماییم . هم چنین بر آن هستیم تا نتایج حاصله را با نتایج بدست آمده از روش جهانشاهلو و همکاران مقایسه کنیم . در این راستا مجموعه واحد های زیر را با یک ورودی بازه ای و یک خروجی بازه ای در نظر بگیرید :

جدول ۱ : داده های بازه ای و کلاس آنها

DMU	ورودی		خروجی		کلاس DMU
	x_j^l	x_j^u	y_j^l	y_j^u	
۱	۱/۵	۲/۵	۳	۴	E^{++}
۲	۲/۸	۳/۱	۷/۵	۸	E^{++}
۳	۵	۶	۱۰/۵	۱۱	E^{++}
۴	۱۰	۱۲	۱۱	۱۳	E^{++}
۵	۸/۵	۱۱	۸/۵	۹/۵	E^{-}

همانگونه که از جدول (۱) مشخص است واحد های ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ در مجموعه E^{++} قرار می‌گیرند و واحد ۵ در زمره E^{-} می‌باشد . می‌خواهیم نوع بازده به مقیاس واحد های E^{++} را بررسی کنیم . با استفاده از مدل های (۶ – ۴) و (۷ – ۴) و هم چنین روش جهانشاهلو و همکاران بازده به مقیاس واحد های E^{++} در جدول زیر خلاصه شده است :

جدول ۲ : نتایج بازده مقیاس

DMU	روش جهانشاهلو			روش پیشنهادی		
	u_0^l	u_0^u	RTS	u_0^w	u_0^b	RTS
۱	-۱	۰/۲۱۹	$S \to DRS$	-۰/۷۲۶	-۰/۴۰۶	IRS
۲	-۰/۸۲۷	۲/۶۵۷	$S \to DRS$	۲/۰۸۱	۰/۴۲۵	DRS
۳	۰/۱۹۴	$+\infty$	DRS	۲۰	۴/۵	DRS
۴	۱/۰۷	$+\infty$	DRS	$+\infty$	$+\infty$	DRS

همانگونه که از روش فوق بر می‌آید ، در روش ارائه شده توسط جهانشاهلو و همکاران فقط بازده به مقیاس واحد های E^{++} در بهترین شرایط محاسبه شده است . مشاهده می‌شود که واحد های ۱ و ۲ در این شرایط دارای بازده به مقیاس مشخصی نیستند .

ولی در روش پیشنهادی این چنین نیست . به جای u_0^l و u_0^u در مدل جهانشاهلو و همکاران که در بهترین شرایط محاسبه شده است از u_0^w و u_0^b یعنی بازده به مقیاس در بدترین شرایط و بهترین شرایط بهره برده ایم . در روش قبل نمی توانستیم بازده به مقیاس کل واحد را تعیین کنیم ولی در روش جدید پیشنهاد شده واحد ۱ دارای بازده به مقیاس افزایشی(IRS) و سایر واحد ها دارای بازده به مقیاس کاهشی (DRS) می‌باشند.

نتیجه گیری

در این طرح مقاله واحد های تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های بازه ای مورد بررسی قرار گرفته اند . یکی از سوالات مهمی که در این راستا مطرح بود ، تعیین بازده به مقیاس واحد های بازه ای می‌باشد . محققین مشهوری همچون پروفسور غلامرضا جهانشاهلو و همکاران در این قسمت گام هایی را بر داشته اند . یکی از اساسی ترین ایراداتی که به روش ایشان وارد است این است که آنها فقط بازده به مقیاس واحد ها را در بهترین شرایط محاسبه کرده اند که آن هم منحصر به فرد نیست . برای برطرف کردن این مشکل از مدل های اساسی DEA بازه ای استفاده شده است . در حقیقت قصد ما بر آن بود تا بتوانیم نوع بازده به مقیاس واحد های تحت ارزیابی را در طول کل بازه مورد سنجش قرار دهیم .

اصولا تمام روش های موجود در DEA بازه ای از نظر منطقی دچار مشکل هستند . هم چنان که در فصل سوم به آن اشاره شد ، اصولا در DEA بازه ای هیچ مفهومی به نام مجموعه امکان تولید وجود ندارد که بخواهیم مقایسه نسبی انجام دهیم . البته این مشکل ناشی از ماهیت بازه ای و نا معلوم بودن داده ها می‌باشد . بررسی این موضوع می‌تواند در مطالعات آتی مورد توجه قرار گیرد .

هم چنین در این مقاله از بازده به مقیاس واحد های E^+ و E^- صحبتی به میان نیامد . به نظر می‌رسد با تعریف مجدد برخی مفاهیم DEA در این قسمت بتوان با دسته بندی واحد ها ، نوع بازده به مقیاس چنین واحد هایی را مشخص نمود . که این خود از کارهای مهم مطالعاتی آینده است . در حقیقت توسعه مفهوم الگو یابی در DEA بازه ای می‌تواند راهگشای این مهم باشد.

منابع و مراجع:

۱. Charnes, A., Cooper, W.W., ۱۹۶۲. Programming with linear fractional functionals. Naval research logistic quarterly. Vol ۹, ۱۸۱-۱۸۵.

۲. A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research ۲ (۱۹۷۸) ۴۲۹–۴۴۴.

۳. W.W. Cooper, K.S. Park, G. Yu, IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA, Management Sci. ۴۵ (۱۹۹۹) ۵۹۷–۶۰۷.

۴. W.W. Cooper, K.S. Park, G. Yu, An illustrative application ofIDEA (imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile telecommunication company, Oper. Res. ۴۹ (۲۰۰۱) ۸۰۷–۸۲۰.

۵. W.W. Cooper, K.S. Park, G. Yu, IDEA (imprecise data envelopment analysis) with CMDs (column maximum decision making units), J. Oper. Res. Soc. ۵۲ (۲۰۰۱) ۱۷۶–۱۸۱.

۶. D.K. Despotis, Y.G. Smirlis, Data envelopment analysis with imprecise data, European J. Oper. Res. ۱۴۰ (۲۰۰۲) ۲۴–۳۶.

۷. T. Entani, Y. Macada, H. Tanaka, Dual models of interval DEA and its extension to interval data, European Journal of Operational Research ۱۳۶ (۲۰۰۲) ۳۲–۴۵.

۸. M.S. Haghighat, E. Khorram, The maximum and minimum number ofef ficient units in DEA with interval data, Appl. Math. Comput. (۲۰۰۴), in press.

۹. G.R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lofti, M. Moradi, Sensitivity and stability analysis in DEA with interval data, Appl Math. Comput. ۱۵۶ (۲۰۰۴a) ۴۶۳–۴۷۷.

۱۰. G.R. Jahanshahloo, R.K. Matin, A.H. Vencheh, On return to scale off ully efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data, Appl. Math. Comput. ۱۵۴ (۲۰۰۴b) ۳۱–۴۰.

۱۱. G.R. Jahanshahloo, R.K. Matin, A.H. Vencheh, On return to scale off ully efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data, Appl. Math. Comput. ۱۵۴ (۲۰۰۴c) ۳۱–۴۰.

۱۲. S.H. Kim, C.G. Park, K.S. Park, An application ofdata envelopment analysis in telephone offices evaluation with partial data, Comput. Oper. Res. ۲۶ (۱۹۹۹) ۵۹–۷۲.

۱۳. Y.K. Lee, K.S. Park, S.H. Kim, Identification ofinef ficiencies in an additive model based IDEA (imprecise data envelopment analysis), Comput. Operat. Res. ۲۹ (۲۰۰۲) ۱۶۶۱–۱۶۷۶.

۱۴. Ying-Ming Wang, Richard Greatbanks, Jian-Bo Yang; Interval efficiency assessment using data envelopment analysis; Fuzzy Sets and Systems ۱۵۳ (۲۰۰۵) ۳۴۷–۳۷۰