

# محاسبه انرژی کازمیر با منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها در فضای خمیده

مددعلی ولوئیان\*

استادیار، گروه علوم پایه (فیزیک)، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

\* سمنان، صندوق پستی ۱۷۹ - ۳۵۱۴۵، [m-valuyan@sbu.ac.ir](mailto:m-valuyan@sbu.ac.ir)

## چکیده

در این مقاله انرژی کازمیر مربوط به میدان اسکالر جرم دار روی یک سطح کره با شرط مرزی نوسانی و با استفاده از روش منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها محاسبه شده است. محاسبه این انرژی در دیگر مقالات گذشته با کم کردن انرژی نقطه صفر فضای مینکوفسکی از انرژی نقطه صفری که با در نظر گرفتن شرط مرزی محاسبه می‌شد انجام شده است. اما آنچه که در این مقاله بر آن تأکید گردیده است استفاده از روش منظم‌سازی جعبه‌ها در انجام محاسبات کازمیر است. این روش در گذشته بر روی ساختارهای تعریف شده در فضای تخت تست شده و البته در کلیه موارد نیز دارای موفقیت خوبی بوده است. اما در این مقاله سعی شده است تا برای اولین بار انجام این روش در یک فضای خمیده مورد ارزیابی قرار گیرد و در واقع مساله ذکر شده تنها بهانه‌ای است تا جوانب متفاوت روش کم کردن جعبه‌ها در فضای خمیده شناخته شود. در پایان در این مقاله با ترسیم و نمایش رابطه انرژی کازمیر بدست آمده و بررسی شرایط حدی در خصوص سازگاری مناسب و منطقی بین جوابهای بدست آمده در این مقاله در مقایسه با آنچه در کتب و مقالات گذشته بدست آمده بود، بحث خواهد شد.

## کلیدواژگان

انرژی کازمیر، کم کردن جعبه‌ها، فضای خمیده، ارتعاشات، فرکانس

## Casimir Energy Calculation with Box Subtraction Scheme in Curved Space

Madad Ali Valuyan\*

Department of Mechanical Engineering, Semnan Branch, Islamic Azad University, Semnan, Iran

\* P.O.B. 35145-179, Semnan, Iran, [m-valuyan@sbu.ac.ir](mailto:m-valuyan@sbu.ac.ir)

### Abstract:

In this paper we investigate the Casimir energy for systems with Periodic Boundary Conditions (PBCs) on a two dimensional sphere ( $S^2$ ) by Box Subtraction Scheme (BSS). The BSS is a slight modification of Boyer's subtraction method to remove divergences from expressions in the Casimir energy calculation. The BSS have been used in many calculations of the Casimir energy for configurations which all designed in a flat space-time. However, in this paper we first use this method for a problem in a curved space-time. For more simplicity we purpose a system with PBCs on a sphere with radius  $a$  and its scalar curvature  $\mathcal{R} = 2a^{-2}$ . Usually, in the BSS to remove divergences from zero point energy expressions, two comparable configurations have been designed and then the zero point energies of these two configurations are subtracted from each other. This setup for configurations made us an ability to divide divergences clearly and it would be to show all divergences are removed without resorting to any other techniques such as analytic continuation techniques. In final we compare our results with those reported in the literature, which are obtained from other regularization techniques.

### Keywords:

Casimir Energy, Box Subtraction Scheme, Curved Space, Vacuum Polarization, Frequency

## ۱- مقدمه

با توجه به اینکه اثر کازمیر بعدها به عنوان اثر منحصر به فرد و بسیار جالب از قطبش (ارتعاشات) خلاء شناخته شد لذا جوانب و کاربرد های فراوانی برای آن پدیدار گشته است. این اثر، نقش مهمی در حوزه‌های متعدد فیزیک، نظیر QFT<sup>۱</sup> [۴-۹]، فیزیک ماده چگال [۱۰-۱۳]، فیزیک اتمی-ملکولی، گرانش، کیهان‌شناسی [۱۴-۱۵] و ریاضی فیزیک [۱۶] ایفا می‌کند. بررسی اثرات کوانتومی روی جهان شامه ها<sup>۲</sup> یکی از موارد جالب اثرات پدیده شناختی اثر کازمیر به شمار می‌رود. در مسائلی مربوط به جهان شامه ها و میدانهای فعال روی این شامه ها است، بررسی انرژی کازمیر در بررسی پایداری و یا عدم پایداری جهان شامه ها بسیار مورد توجه بوده است. همچنین سناریوی نقش اثرات کوانتومی در تشکیل جهان شامه ها و خود سازگاری این جهان شامه ها و ثابت کیهان‌شناسی آنان در مقالات زیادی در گذشته مورد توجه بوده است [۲]. محاسبه انرژی کازمیر همیشه مستلزم کم

همانطور که می‌دانیم انرژی کازمیر از اختلاف بین دو انرژی خلأ<sup>۱</sup> در صورت حضور شرط مرزی غیر بديهی<sup>۲</sup> و عدم حضور شرط مرزی حاصل می‌شود. با محاسبه گرادیان این انرژی نسبت به ابعاد شرایط مرزی و یا ساختار موجود می‌توان نیروی کازمیر وارد بر آن ساختار را بدست آورد. این اثر در سال ۱۹۴۸ توسط هندریک کازمیر<sup>۳</sup> پیش بینی و محاسبه گردید. او میزان جاذبه بین دو صفحه رسانا بدون بار موازی را که در خلأ هستند برای قطبش های میدان الکترومغناطیس توضیح می‌دهد [۱-۲]. اولین تلاش برای مشاهده این پدیده نیز تقریباً ده سال بعد توسط اسپارنای<sup>۴</sup> در سال ۱۹۵۸ انجام پذیرفت [۳] و بعدها نیز اندازه گیری های دقیقتری بر درستی پیش بینی کازمیر صحه گذاشتند.

1 Zero point energy  
2. Non-trivial boundary condition  
3 H.B.G. Casimir  
4. M. J. Sparnaay

5. Quantum Field Theory  
6. Braneworld

تانسور مذکور بین حالت‌های خلا انرژی نقطه صفر میدان را محاسبه نمود. در ادامه نیز با استفاده از روش کم کردن جعبه ها و با در نظر گرفتن ساختارهای مشابه سعی در حذف واگرایی ها و استخراج مقدار انرژی کازمیر خواهیم داشت. در بخش بعد پس از بدست آوردن انرژی کازمیر برای میدان جرم دار مساله را برای حالت‌های خاصی چون میدان بدون جرم و یا میدانی با جرم سنگین نیز محاسبه خواهیم کرد و در نهایت نیز نتایج حاصله را با نتایج انرژی کازمیر که در گذشته بدست آمده است مقایسه خواهد شد.

## ۲- محاسبه انرژی نقطه صفر

در ابتدا لازم است رویه ای که میدان اسکالر بر روی آن تعریف شده است را مشخص کنیم. لذا برای منیفلد<sup>۸</sup> خود ژئودزی(متریک)<sup>۹</sup> زیر را می نویسیم. این متریک رویه ی یک کره به شعاع  $a$  را توصیف می کند:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

که در آن  $c$  سرعت نور و  $a$  شعاع کره می باشد. همانطور که می دانیم معادله موج برای میدان اسکالر با جرم  $m$  روی یک فضای خمیده  $(N + 1)$  بعدی را می توان به صورت زیر نوشت:<sup>[۲۸-۲۹]</sup>

$$\left( \nabla_k \nabla^k + \xi \mathcal{R} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = 0 \quad (2)$$

که در آن  $\nabla^k$  مشتق هموردا<sup>۱۰</sup> و  $\mathcal{R}$  ضریب انحنای اسکالر<sup>۱۱</sup> فضا و  $\xi = (N - 1)/4N$  می باشد. همچنین منظور از مختصه  $x$  نیز کلیه مولفه های فضا یعنی  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$  می باشد و  $\Phi(x)$  تابع میدان اسکالر می باشد. معمولاً به معادله (۲) «معادله با ضریب جفت شدگی همدیس<sup>۱۲</sup>» گویند.

برای رویه‌ی خمیده مورد بحث در این مساله یعنی فضای خمیده روی یک کره ( $S^2$ ) مقدار ابعاد فضا یعنی  $N$  برابر 2 بوده فلذا براساس متریک معادله (۱) ضریب جفت شدگی  $\xi = \frac{1}{8}$  و ضریب انحنای اسکالر فضا نیز  $\mathcal{R} = 2a^{-2}$  بدست می آید. با جایگذاری ضرایب مذکور در معادله (۲) داریم:

$$\frac{a^2}{c^2} \partial_t^2 \Phi(x) - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Phi(x)) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \Phi(x) + \left( \frac{1}{4} + \frac{m^2 c^2 a^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = 0 \quad (3)$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق می توان مجموعه جواب های متعامد و یکه زیر را برای آن بدست آورد:

$$\Phi_{\ell M}^{(+)}(t, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{c}}{a\sqrt{2\omega_\ell}} e^{i\omega_\ell t} Y_{\ell M}(\theta, \varphi) \quad (4)$$

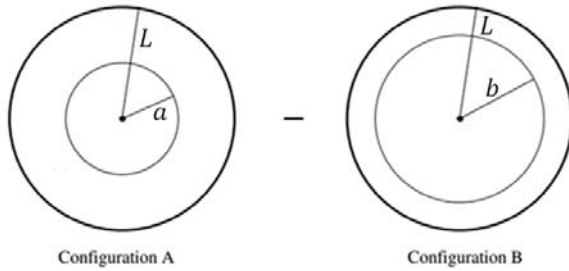
که در آن  $Y_{\ell M}(\theta, \varphi)$  تابع هماهنگ های کروی<sup>۱۳</sup> می باشد. همچنین برای پاسخ الحاقی مختلط<sup>۱۴</sup> داریم:

$$\Phi_{\ell M}^{(-)}(t, \theta, \varphi) = \left( \Phi_{\ell M}^{(+)}(t, \theta, \varphi) \right)^* \quad (5)$$

کردن دو عبارت بینهایت از یکدیگر است که این امر همیشه به سادگی انجام نمی پذیرد. در واقع در راستای انجام این امر نیاز به روشهای متفاوت منظم سازی و یا بازهنجارش<sup>۱</sup> می باشد<sup>[۱۷]</sup>. روشهای متفاوتی برای محاسبه انرژی کازمیر اعم از منظم سازی و بازهنجارش طراحی شده است و بسته به نوع مساله و چگونگی واگرایی های موجود در مساله هریک از این بازهنجارش ها و یا منظم سازی ها اهمیت فوق العاده ای پیدا خواهد کرد. لذا لزوم محاسبه انرژی کازمیر خود بهانه ای برای تدوین روشها و تکنیکهای متفاوت منظم سازی<sup>۲</sup> در جهت حذف واگرایی ها گردید و به سرعت تکنیک های بسیار زیادی در این راستا معرفی شده است که از آن جمله می توان به تکنیک منظم سازی تابع زتا<sup>[۱۸،۱۹]</sup>، منظم سازی تابع گرین<sup>[۲۰]</sup>، منظم سازی بسط چند جمله ای پراکندگی<sup>[۲۱]</sup>، منظم سازی کم کردن جعبه ها<sup>[۲۲]</sup> و... اشاره نمود. در خصوص هریک از این منظم سازی ها و مزیت ها و یا معایب احتمالی آنها در کتب و مقالات گذشته مطالب فراوانی یافت می شود<sup>[۲۳-۲۵]</sup> که با توجه به اینکه در این مقاله از روش کم کردن جعبه ها استفاده می شود لازم است چند نکته در خصوص مزیت های روش مذکور نسبت به دیگر روشها ذکر شود. روش کم کردن جعبه ها در گذشته و می توان گفت برای اولین بار توسط بویر مطرح گردید و برای محاسبه انرژی کازمیر یک کره سه بعدی با میدان الکترومغناطیس بکارگیری شده است و پس از آن نیز در مقالات زیادی اعم از<sup>[۲۲، ۲۶-۲۷]</sup> استفاده شده است. نکته مهم و بارز در این روش کم کردن دو بینهایت (واگرایی) همسان است که خود باعث می شود بسیاری از مشکلات دیگر روشها که انرژی نقطه صفر فضای مینکوفسکی را از انرژی نقطه صفر غیر بدیهی کم می کنند بروز و ظهور نیابد. همچنین هیچ تمدید تحلیلی نیز در انجام این محاسبات استفاده نمی شود و بنابراین کلیه ابهامات و پیچیدگی هایی که منتج از تمدید تحلیلی است در محاسبات مساله وارد نخواهد شد. از دیگر مزیت های اثبات شده این منظم سازی بکارگیری موفق آن در مرتبه های بالاتر تصحیح تابشی انرژی کازمیر<sup>[۲۳]</sup> بوده است که منجر به دست یابی به پاسخی همگرا و سازگار گردیده است و این در حالی است که در دیگر روشهای منظم سازی علاوه بر استفاده از تمدید تحلیلی پاسخ انرژی کازمیر نیز واگرا به دست آمده است. نکته قابل توجه اینکه این روش تاکنون برای محاسبه انرژی کازمیر روی رویه های تخت و با شرایط مرزی های متفاوت انجام پذیرفته است. در این مقاله و برای اولین بار سعی شده است تا با استفاده از این روش برای یک ساختار که در فضای خمیده طراحی شده باشد انرژی کازمیر مورد محاسبه قرار گیرد. در این مقاله انرژی کازمیر مربوط به میدان نرده ای جرم دار با شرط مرزی نوسانی<sup>۳</sup> روی یک رویه خمیده (یک کره) با استفاده از روش کم کردن جعبه ها محاسبه خواهد شد. برای انجام این کار و در بخش بعد فرض می کنیم کره ای به شعاع  $a$  در اختیار داریم که میدان اسکالر با جرم  $m$  تنها روی این کره تعریف شده است. همانطور که از ساختار نیز بر می آید میدانی که روی کره زیست می کند دارای شرط مرزی نوسانی است. با استفاده از حل معادله حرکت و با توجه به شرایط مرزی مذکور میدان اسکالر مورد نظر مساله استخراج می گردد و با توجه به روش لاگرانژ - همیلتونی تانسور انرژی-تکانه<sup>۴</sup> مربوط به این میدان نیز نوشته شده و در نهایت می توان با سانویچ کردن

8. Manifold  
9. Metric  
10. Covariant derivative  
11. Scalar curvature  
12. Equation with conformal coupling  
13. Spherical harmonics Function  
14. Complex Conjugate solution

1. Renormalization  
2. Regularization techniques  
3. Zeta function regularization  
4. Green's function regularization  
5. Box subtraction scheme  
6. Periodic boundary condition  
7. Energy-Momentum Tensor



Configuration A

Configuration B

شکل ۱: در این شکل چگونگی در نظر گرفتن ساختارها در روش کم کردن جعبه ها نمایش داده شده است. ساختار سمت راست را ساختار B و ساختار سمت چپ را ساختار A گوئیم.

### ۳- انرژی کازمیر

برای پیاده سازی روش منظم سازی جعبه در این مساله همانند شکل (۱) دو ساختار مجزا را در نظر می گیریم. در شکل (۱) به ساختار سمت چپ ساختار A و به ساختار سمت راست ساختار B گوئیم. در پیاده سازی روش کم کردن جعبه ها اگر فرض کنیم هر دو نقطه ای روی کره که شرایط مرزی بین آنها برقرار شده دارای فاصله ای مثلا  $X$  باشد می توان این فاصله را به صورت  $X_a = a\theta$  نوشت. با افزایش شعاع دایره طول این کمان ( $X_a$ ) نیز به مانند طول یک خط رسم شده روی یک بادکنک افزایش می یابد و بنابراین اگر ناحیه مربوط به طول اولیه کمان  $X_a$  را  $a1$  بنامیم می توان میزان اختلاف افزایش یافته جدید را ناحیه  $a2$  نامید. توجه شود در حالتی که اصطلاحاً بادکنک ما باد شده است شعاع آن از  $a$  به  $L$  رسیده است. دقیقاً مشابه با چنین ساختاری را برای ساختار B هم در نظر می گیریم. حال تعریف انرژی کازمیر با توجه به جعبه های در نظر گرفته شده به صورت زیر می باشد: [۳۰]

$$E_{Cas.} = \lim_{b/a \rightarrow \infty} \left[ \lim_{L/b \rightarrow \infty} [E_A^{(0)} - E_B^{(0)}] \right] \quad (10)$$

که در آن  $E_B^{(0)} = E_{b1}^{(0)} + 2E_{b2}^{(0)}$  و  $E_A^{(0)} = E_{a1}^{(0)} + 2E_{a2}^{(0)}$  انرژی نقطه صفر مربوط به ساختار A و B می باشد. با در نظر گرفتن معادله (۹) برای ناحیه  $a1$  می توان چگالی انرژی نقطه صفر را به صورت زیر ساده نمود:

$$E_{a1}^{(0)} = \frac{\hbar}{4\pi a^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \left[ \frac{c}{a} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

رابطه (۱۱) را می توان با جایگذاری فاصله هر ناحیه به جای  $a$  انرژی نقطه صفر مربوط به آن ناحیه را ساخت. در نهایت با جایگذاری  $E_{a1}^{(0)}$  و  $E_{b1}^{(0)}$  و  $E_{a2}^{(0)}$  و  $E_{b2}^{(0)}$  در معادله (۱۰) داریم:

و فرکانسهای مجاز  $\omega_{\ell}$  براساس شرط مرزی نوسانی ذکر شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega_{\ell} = \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \frac{c^2}{a^2} \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad \mathcal{M} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell \quad (6)$$

برای کوانتس دوم و دستیابی به انرژی نقطه صفر لازم است میدان  $\Phi(t, \theta, \varphi)$  را براساس کلیه جواب های بدست آمده متعامد مطابق عبارت زیر بسط دهیم:

$$\Phi(t, \theta, \varphi) = \sum_{\ell, \mathcal{M}} [\Phi_{\ell \mathcal{M}}^{(-)}(t, \theta, \varphi) a_{\ell \mathcal{M}} + \Phi_{\ell \mathcal{M}}^{(+)}(t, \theta, \varphi) a_{\ell \mathcal{M}}^{\dagger}] \quad (7)$$

که در آن  $a_{\ell \mathcal{M}}$  و  $a_{\ell \mathcal{M}}^{\dagger}$  به ترتیب عملگرهای نابود گر و خلق ذرات مربوط به این میدان اسکالر روی این رویه می باشند و اندیس  $\ell$  و  $\mathcal{M}$  نیز میزان تکانه و در نتیجه انرژی این ذرات را نشان می دهد. حال برای اینکه بتوانیم انرژی نقطه صفر خلا را برای این میدان روی این رویه محاسبه کنیم لازم است مقداری انتظاری مولفه  $T_{00}$  از تانسور انرژی تکانه محاسبه گردد برای اینکار داریم:

$$T_{00} = \hbar c \left\{ (1 - 2\xi) \partial_0 \Phi \partial_0 \Phi + \left( 2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{00} \partial_k \Phi \partial^k \Phi - \xi (\Phi \nabla_0 \nabla_0 \Phi + \nabla_0 \nabla_0 \Phi \Phi) + \left[ \left( \frac{1}{2} - 2\xi \right) \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} g_{00} - \xi G_{00} - 2\xi^2 \mathcal{R} g_{00} \right] \Phi^2 \right\} \quad (8)$$

که در آن  $G_{00} = \mathcal{R}_{00} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{00}$  تانسور اینشتین می باشد و  $\mathcal{R}_{00}$  نیز تانسور ریچی است. با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۸) و با استفاده از رابطه زیر مقدار انتظاری تانسور انرژی-تکانه به صورت زیر بدست می آید:

$$E^{(0)} = \langle 0 | T_{00}(x) | 0 \rangle = \frac{\hbar}{4\pi a^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \omega_{\ell} \quad (9)$$

که در آن  $\omega_{\ell}$  کلیه فرکانسهای مجاز بدست آمده از رابطه (۶) می باشد. همانطور که از عبارت (۹) نیز مشخص است چگالی انرژی نقطه صفر بدست آمده یک عبارت واگرا بوده و لازم است در مراحل انجام محاسبات انرژی کازمیر این نوع از عبارات واگرا نوعی منظم سازی شده تا حذف واگرایی ها به صورت دقیقتری صورت پذیرد. با توجه به مقدماتی که در بخش قبل در خصوص منظم سازی واگرایی ها و مزیت ها و مضرات آن بیان شد برای بدست آوردن انرژی کازمیر در این مساله از روش منظم سازی کم کردن جعبه ها استفاده خواهد شد.

1. Second quantization
2. Annihilation operator
3. Creation operator
4. Einstein tensor
5. Ricci tensor
6. Divergent

عنوان نمونه یکی از عبارات برنچکات رابطه (۱۲) را (به عنوان مثال ناحیه  $a1$ ) را محاسبه می کنیم لذا داریم:

$$\frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} + 1} = \frac{it \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + e^{i\pi} \left[ \frac{c}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} + it \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + e^{-i\pi} \left[ \frac{c}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} + 1}$$

$$= \frac{2it \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} - \left[ \frac{c}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} + 1} \quad 0 \leq t \leq \mu \left( = \frac{mca}{\hbar} \right) \quad (16)$$

با استفاده از عبارت بدست آمده در رابطه (۱۶) برای جمله برنچکات ناحیه  $a1$  داریم:

$$B(a) = 2 \int_0^{\frac{mca}{\hbar}} t \frac{\left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} - \left[ \frac{c}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} + 1} dt \quad (17)$$

متأسفانه انتگرال فوق به صورت تحلیلی قابل محاسبه نبوده و دارای فرم بسته نمی باشد لذا برای محاسبه آن مخرج کسر را با استفاده از رابطه زیر را به صورت یک عبارت جمع می نویسیم:

$$\frac{1}{e^{2\pi t} + 1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} e^{-2\pi t j} \quad (18)$$

لذا با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$B(a) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \int_0^{\frac{mca}{\hbar}} 2t \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} - \left[ \frac{c}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi t j} dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \mu^2 c}{6ja} [4\mu j - 3I_2(2\pi\mu j) + 3L_2(2\pi\mu j)] \quad (19)$$

که در آن  $\mu = \frac{mca}{\hbar}$  و تابع  $I_2(2\pi\mu j)$  تابع اصلاح شده بسل  $I_n(x)$  و تابع استروا<sup>۳</sup> می باشد. با جایگذاری  $b = \frac{L-a}{2}$  و  $a = \frac{L+b}{2}$  بجای  $a$  در رابطه (۱۹) به ترتیب می توان بخش برنچکات مربوط به هریک از ناحیه های  $a2$  و  $b1$  و  $b2$  را محاسبه نمود. با جایگذاری جملات برنچکات بدست آمده و استفاده از رابطه (۱۰) داریم:

$$E_{Cas.} = \lim_{b/a \rightarrow \infty} \left[ \lim_{L/b \rightarrow \infty} \left[ \frac{\hbar}{4\pi a^2} B(a) + \frac{2\hbar}{\pi(L-a)^2} B\left(\frac{L-a}{2}\right) - \frac{\hbar}{4\pi b^2} B(b) - \frac{2\hbar}{\pi(L-b)^2} B\left(\frac{L-b}{2}\right) \right] \right] \quad (20)$$

حال با توجه به خواصی که از تابع اصلاح شده بسل  $I_n(x)$  می شناسیم می توان حد های مربوط به ابعاد جعبه را محاسبه نمود. با محاسبه حد اول مشاهده می شود که جمله دوم و چهارم داخل کروشه به سمت صفر رفته و هیچ تاثیری در انرژی کازمیر باقی نخواهد گذاشت. با محاسبه حد  $b/a \rightarrow \infty$  جمله سوم نیز صفر خواهد شد و بنابراین رابطه انرژی کازمیر میدان اسکالر جرم دار بین دو نقطه در یک فضای یک بعدی با شرط مرزی نوسانی به صورت زیر می باشد:

$$E_{Cas.} = \hbar \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \mu^2}{24\pi c a j} [4\mu j - 3I_2(2\pi\mu j) + 3L_2(2\pi\mu j)] \quad (21)$$

$$E_A^{(0)} - E_B^{(0)} = \frac{\hbar}{4\pi a^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \left[ \frac{c}{a} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{2\hbar}{\pi(L-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \times \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \left[ \frac{2c}{L-a} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{\hbar}{4\pi b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \left[ \frac{c}{b} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{2\hbar}{\pi(L-b)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \times \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \left[ \frac{2c}{L-b} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

توضیح اینکه کلیه عبارات نوشته شده در رابطه (۱۲) بدون محاسبه حد ها بوده و محاسبه حد های مندرج در رابطه (۱۰) را در آخرین مرحله از محاسبات انجام خواهیم داد. با اعمال رابطه ایبل-پلانا به فرمت زیر روی هریک از عبارت های جمع فوق می توان روابط مربوطه را به انتگرال تبدیل نمود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} f(x) dx - i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt \quad (13)$$

در واقع با تبدیل کلیه جملات جمع به انتگرال منظم سازی دیگری به عبارات اضافه خواهد شد. اعمال رابطه فوق روی هریک از عبارت های جمع موجود در رابطه (۱۲) هریک از جمع ها (سیگما ها) را به دو جمله تبدیل می کند که در اینجا نام جمله اول در طرف راست رابطه ایبل پلانا را «جمله انتگرالی» و نام جمله دوم را «جمله برنچکات»<sup>۱</sup> می نامیم. اگر در کلیه جملات انتگرالی حاصل شده از اعمال رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲) تغییر متغیر  $z = \frac{cx}{a}$  را بکار ببریم در آن صورت کلیه جملات انتگرالی به صورت زیر بدست می آید:

$$I = \frac{\hbar}{4\pi a^2} \left( \frac{a}{c} \right)^2 \int_0^{\infty} z \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + z^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$+ \frac{2\hbar}{\pi(L-a)^2} \left( \frac{L-a}{2c} \right)^2 \int_0^{\infty} z \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + z^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$- \frac{\hbar}{4\pi b^2} \left( \frac{b}{c} \right)^2 \int_0^{\infty} z \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + z^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz$$

$$- \frac{2\hbar}{\pi(L-b)^2} \left( \frac{L-b}{2c} \right)^2 \int_0^{\infty} z \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + z^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz \quad (14)$$

همانطور که از روابط انتگرالی مشخص است همه انتگرال ها واگرا هستند اما با فاکتور گیری از انتگرال ها مشخص می شود در مجموع ضرایب این انتگرال ها صفر است لذا مجموع کلیه جملات انتگرالی قبل از محاسبه حد رابطه (۱۰) به صورت تحلیلی و به ازاء هر مقدار از  $a$ ،  $b$  و  $L$  به صورت خودبخودی صفر می شود.

$$I = \left( \frac{\hbar}{4\pi c^2} + \frac{2\hbar}{4\pi c^2} - \frac{\hbar}{4\pi c^2} - \frac{2\hbar}{4\pi c^2} \right) \int_0^{\infty} z \left[ \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + z^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz = 0 \quad (15)$$

بنابراین آنچه از رابطه (۱۲) باقی خواهد ماند تنها جملات برنچکات از ایبل پلانا است. برای اینکه از تکرار بعضی محاسبات مشابه جلوگیری گردد به

2. Modified Bessel function  
3. Struve function

1. Branch-cut term

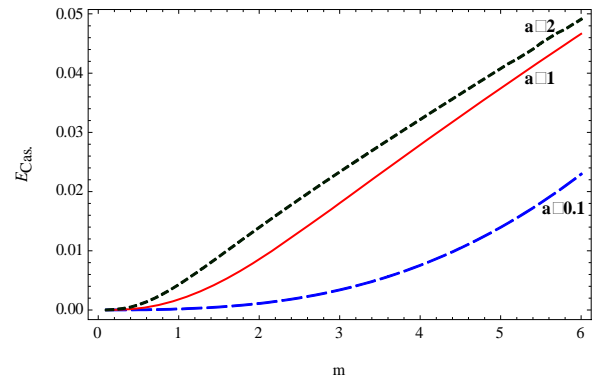
وجود داشته [۲۹] که این امر خود موید بر توانمندی روش کم کردن جعبه ها در امر منظم سازی واگرایی ها است. همانطور که از متن محاسبات نیز روشن است از هیچیک از تکنیک های تمدید تحلیلی و مانند آن در محاسبه این انرژی استفاده نشده است و پاسخ (۲۱) بدون هیچگونه ابهامی بدست آمده است. موضوع این مقاله برای دیگر شرایط مرزی از جمله شرایط مرزی دیریکله، نیومن و ... نیز می توان تعمیم داد که البته این محاسبات توسط نگارنده در حال انجام می باشد.

#### ۴- مراجع

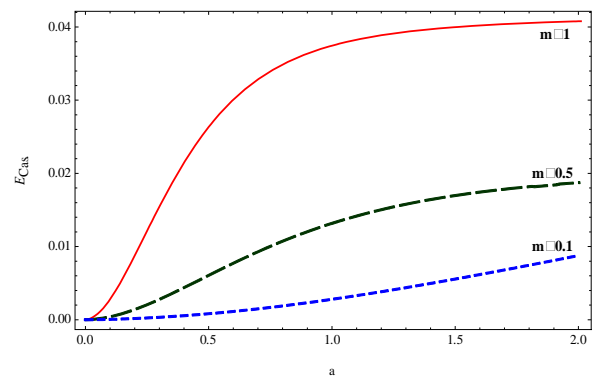
- [1] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., vol. 51, p. 793, 1948.
- [2] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, world Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [3] M. J. Sparnaay, *Measurements of attractive forces between flat plates*, Physica, vol. 24, p. 751, 1958.
- [4] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. Weisskopf, Phys. Rev. D, vol. 9, p. 3471, 1974.
- [5] R. K. Bhaduri, *Models of the Nucleon* (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1988).
- [6] Kimball A. Milton, Phys. Rev. D, vol. 22, p. 1444, 1980.
- [7] Kimball A. Milton, Phys. Rev. D, vol. 22, p. 1441, 1980.
- [8] A. Romeo, Phys. Rev. D, vol. 52, p. 7308, 1995.
- [9] M. Bordag, E. Elizalde, and K. Kirsten, J. Math. Phys. Vol. 37, p. 895, 1996.
- [10] F. De Martini, M. Marrocco, and P. Mataloni, Phys. Rev. A 43, 2480, 1991.
- [11] M. Krech, and S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. Vol. 66, p. 345, 1991.
- [12] M. Krech, and S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. Vol. 67, p. 1055, 1991.
- [13] F. De Martini and G. Jacobovitz, Phys. Rev. Lett. Vol. 60, p.1711 (1988).
- [14] E. Elizalde, Phys. Lett. B, vol. 516, p. 143 (2001).
- [15] F. Bauer, M. Lindner, and G. Seidl, JHEP, vol. 05, p. 026 (2004).
- [16] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975.
- [17] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *New Developments in the Casimir Effect*, Phys. rep., vol. 353, p. 1, 2001.
- [18] V. V. Nesterenko and I. G. Pirozhenko, *Spectral Zeta Functions for a Cylinder and a Circle*, J. Math. Phys., vol. 41, p. 4521, 2000.
- [19] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytesenko and S. Zebri, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, Singapore: World Scientific, 1994.
- [20] K. A. Milton, L. L. Deraad and S. J., *Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 115, p. 388, 1978.
- [21] R. Balian, and B. Duplantier, *Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 112, p. 165, 1978.
- [22] M. A. Valuyan, R. Moazzemi, and S. S. Gousheh, *A direct approach to the electromagnetic Casimir energy in a rectangular waveguide*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., vol. 41, p. 145502, 2008.
- [23] S.S. Gousheh, R. Moazzemi, M.A. Valuyan, Radiative correction to the Dirichlet Casimir energy for  $\phi^4$  theory in two spatial dimensions, Phys. Lett. B, vol. 681, p. 477-483, 2009.
- [24] F. A. Barone, R. M. Cavalcanti and C. Farina, hep-th/0306011.
- [25] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975.
- [26] M. A. Valuyan and S.S. Gousheh, *Dirichlet Casimir Energy For A Scalar Field in a Sphere: An Alternative Method*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 25, No. 6, p. 1165, 2010.
- [27] Reza Moazzemi; Siamak S. Gousheh, A new renormalization approach to the Dirichlet Casimir effect for  $\phi^4$  theory in 1+1 dimensions, Phys. Lett. B, vol. 658, pp. 255-265, 2008.
- [28] N.D. Berrel and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.
- [29] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, *New Developments in The Casimir effect*, Physics Reports, Vol. 353, p. 1, 2001.

حد بدون جرم میدان و همچنین جرم های سنگین برای پاسخ مذکور به صورت مستقیم از معادله (۹) استخراج می شود و نتیجه این محاسبه نیز به عبارات زیر منتهی می شود:

$$E_{Cas.} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} mc^2 \mu^2 & as\ m \rightarrow 0 \\ mc^2 \left(1 - \frac{7}{40\mu^2}\right) & as\ m \gg 1 \end{cases} \quad (22)$$



شکل ۲: در این نمودار میزان انرژی کازمیر برحسب تغییرات جرم به ازاء شعاع های متفاوت کره  $a = 1, 2, 0.1$  رسم شده است. روند این نمودار نشان می دهد انرژی کازمیر میدان بدون جرم برابر صفر بوده که این امر با حد بدست آمده از رابطه (۲۲) تطابق دارد.



شکل ۳: در این نمودار میزان انرژی کازمیر به ازاء سه جرم مشخص  $m = 1, 0.5, 0.1$  برحسب تغییرات شعاع رسم شده است. این نمودار بوضوح نشان می دهد که اولاً میزان انرژی کازمیر مثبت است و هر چه میزان جرم میدان کمتر باشد میزان انرژی کازمیر آن برای فواصل یکسان از شرایط مرزی کمتر خواهد بود.

میزان این انرژی بر خلاف مقدار آن در شرایط مشابه در فضای تخت یک مقدار مثبت بدست آمده و نشان از دافعه بودن نیروی کازمیر موجود روی رویه می باشد. این موضوع نشان می دهد وجود یک پس زمینه و یا یک فضای خمیده تا چه حد می تواند در میزان و حتی علامت نیروی کازمیر تاثیر گذار باشد. با توجه به نمودار شکل (۳) و همچنین رابطه بدست آمده (۲۲) هر چقدر ذره ای که روی رویه وجود دارد کوچکتر باشد مقدار انرژی کازمیر مرتبط با آن نیز کوچکتر بوده و برای ذره بدون جرم میزان انرژی کازمیر برابر صفر است. نکته ای که توضیح آن در این مقاله ضروری است این است که برای انرژی کازمیر میدان جرم دار روی یک کره با شرط مرزی نوسانی پاسخ بدست آمده با آنچه در این مورد در مقالات گذشته آمده است همخوانی کامل