فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر-برنولی بر روی بستر الاستیک غیرخطی تحت تأثیر بار محوری فشاری

احمد مامندی[1*]، محمدحسین کارگرنوین[2]

* a.mamandi@piau.ac.ir

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات تیر اویلر- برنولی با در نظر گرفتن بستر الاستیک غیرخطی، بررسی شده است. تیر تحت بارگذاری محوری فشاری بوده و شرایط تکیه‌گاهی، مفصلی- غلطکی می‌باشد. تحلیل ارتعاشات بر اساس مدهای نرمال غیرخطی در وضعیت رزونانس داخلی سه به یک (۳:۱) انجام می‌گیرد. معادله‌ی دیفرانسیلی غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر استخراج شده و به کمک روش چند مقیاس زمانی، تحلیل شده است. در وضعیت رزونانس داخلی ۳:۱ بر اساس مدهای نرمال غیرخطی در حالت پایا، پایداری پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی تیر مطالعه شده، سپس تأثیر تغییر پارامترهای مختلف بر روی نتایج تحلیل دینامیکی و تحلیل پایداری پاسخ فرکانسی ارتعاشات غیرخطی تیر بررسی شده‌است.

واژه‌های کلیدی

ارتعاشات غیرخطی، تیر اویلر- برنولی، بستر الاستیک غیرخطی، رزونانس داخلی سه به یک، تحلیل پایداری حالت پایا.

۱ - استادیار، دکترای مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲ - استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۱- مقدمه

در مورد تحلیل دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی سیستم‌های گسسته با تعداد درجات آزادی محدود و یا سیستم‌های پیوسته‌ی ساکن و یا چرخان تحت تأثیر بارهای محوری فشاری و یا کششی تا کنون تحقیقات مختلفی انجام شده‌است که در زیر به تعدادی از آنها اشاره می‌شود.

مسئله رزونانس‌های داخلی سه به یک (۳:۱) و یک به یک (۱:۱) در ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای دوسر گیردار توسط نایفه و همکارانش [۱] مطالعه شده‌است. در این تحقیق با بهره‌گیری از مفهوم مدهای نرمال غیرخطی[1] مستقیماً روش چند مقیاس زمانی[2] برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای[3] حاکم بر حرکت و همینطور شرایط مرزی تیر بکارگرفته شد. سانتی و گانکالوس [۲] ارتعاشات غیرخطی و ناپایداری یک تیر الاستیک که بر روی بستر الاستیک غیرخطی قرار دارد را با استفاده از روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی به کمک تئوری اغتشاشات بررسی نموده‌اند. مسئله دینامیک غیرخطی تیرهای با مقاطع غیریکنواخت که بر روی بستر الاستیک غیرخطی از درجه سوم، بستر الاستیک وینکلر غیرخطی و بستر الاستیک خطی از نوع پسترناک قرار دارند توسط تسیاتاس [۳] مطالعه شده‌است که حل آن با استفاده از روش معادلات قیاسی کاستیکادلیس[4] بدست آمده‌است. کو و لی [۴] با استفاده از روش اغتشاشات، معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم بر یک تیر الاستیک با مقطع غیریکنواخت را بررسی نموده‌اند. تیر در بستر الاستیک غیرخطی احاطه شده و بارهای محوری و جانبی به آن اعمال می‌شود. با بکارگیری روش DQM تحلیل دینامیکی تیرهای با مقاطع غیریکنواخت که بر روی بستر الاستیک غیرخطی قرار دارند توسط هسو [۵] بررسی شده‌است. اوز و همکارانش [۶] معادلات انتگرالی-دیفرانسیلی حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر خمیده با مفصل‌های غیرقابل حرکت در دو انتهای آن که بر روی بستر الاستیک خطی قرار دارد را با استفاده از روش چند مقیاس زمانی حل کرده‌اند. پلیکانو و ماسترودی [۷] معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک غیرخطی یک تیر دوسر مفصل که بر روی یک بستر غیرخطی که با فنرهایی با سختی از مرتبه‌ی سوم مدل شده‌است را مورد تحلیل قرار داده‌اند. معادلات بدست آمده، توسط روش گالرکین گسسته شده و رفتار دینامیکی غیرخطی آن با استفاده از روش فرم‌های نرمال[5] مورد مطالعه قرار گرفته‌است. بالکایا و همکارانش [۸] روش DTM را برای پیش‌بینی ارتعاشات ایجاد شده در خطوط لوله‌ی انتقال سیالات بکار گرفته‌اند. در این تحقیق، لوله بر اساس تئوری‌های اویلر- برنولی و تیموشنکو مدلسازی شده و خاک، یک بستر الاستیک در نظر گرفته شده است. بیرمان [۹] تأثیرات بستر الاستیک غیرخطی در ارتعاشات آزاد تیرها را مطالعه نمود. روش مدهای نرمال غیرخطی که بر مبنای محاسبه‌ی انرژی سیستم است بر روی دسته‌ای از معادلات کانونیکال توسط کینگ و واکاکیس [۱۰] اعمال شده‌است. در این تحقیق رزونانس‌های ۳:۱ در یک مدل دو درجه آزادی و رزونانس ۳:۱ در یک تیر با شرایط مرزی مفصلی-گیردار مطالعه شده‌اند. کینگ و واکاکیس [۱۱] یک تیر دوسر مفصل با هندسه غیرخطی بر روی بستر الاستیک غیرخطی و یک تیر یکسر گیردار که در آن هندسه غیرخطی برای تیر درنظر گرفته شده را مورد مطالعه قرار داده‌اند. واکاکیس [۱۲] از مدهای نرمال غیرخطی برای مطالعه‌ی ارتعاشات سیستم‌های پیوسته با طول محدود و نامحدود استفاده نمود. همچنین اعمال مد غیرخطی بر ارتعاش و جداسازی شوکی سازه‌های انعطاف پذیر پریودیک مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌است. پلیکانو و واکاکیس [۱۳] از مدهای نرمال غیرخطی برای تحلیل تیر نازکی که بر روی بستر الاستیک غیرخطی تحت بار محوری کششی می‌باشد، استفاده نمودند. جیانگ و همکارانش [۱۴] یک روش عددی بر مبنای روش منیفلد نامتغیر برای ساختن مدهای نرمال غیرخطی برای سیستم‌هایی با رزونانس‌های داخلی ارائه کرده‌اند. مازیلی و

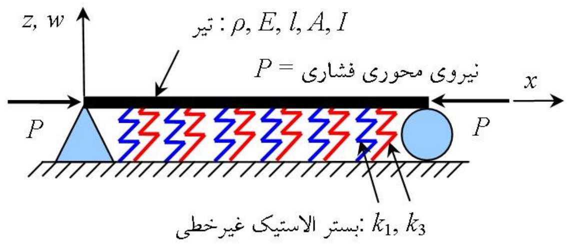
1- Nonlinear Normal Modes (NNMs)
2- Multiple Time Scales (MTS)
3- Partial Differential Equations (PDEs)
4- Kastikadelis
5- Normal Forms (NFs)

همکارانش [۱۵] معادلات غیرخطی حاکم بر دینامیک یک تیر تحت اثر بار محوری را استخراج و مطالعه نموده‌اند.

هدف اصلی در این پژوهش استخراج معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر ارتعاش تیر می‌باشد که در حل آن مفهوم مدهای نرمال غیرخطی بکار گرفته می‌شود. سپس معادلات بدست آمده برای سیستم مورد مطالعه مورد تحلیل قرار گرفته و با استفاده از روش تحلیلی-تقریبی چند مقیاس زمانی حل شده‌اند. در این پژوهش اثر تغییر پارامترهای مختلف فیزیکی و هندسی مدل ریاضی بر روی پاسخ غیرخطی تیر ارزیابی می‌گردد. ارتباط بین فرکانس‌های غیرخطی و دامنه ارتعاشات بدست آمده، همچنین تأثیر تغییر مقادیر سختی بخش‌های خطی و غیرخطی مرتبه سوم بستر الاستیک و مقدار بار محوری فشاری بر پاسخ دینامیکی غیرخطی تیر مطالعه شده‌است.

۲- تعریف مسئله و مدل‌سازی ریاضی

در شکل (۱)، یک تیر اویلر- برنولی به طول l با تکیه‌گاه‌های ساده‌ی مفصلی-غلطکی نشان داده شده است. تیر بر روی بستر الاستیک خطی در نظر گرفته شده است.



شکل(۱) تیر دوسر مفصل تحت بار محوری فشاری بر روی بستر الاستیک غیرخطی

همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، تیر تحت تأثیر نیروی محوری فشاری P در دو انتهای تکیه‌گاه‌های مفصلی و غلطکی خود قرار دارد. معاله دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی حاکم بر حرکت تیر عبارت است از [۱۳]

$$\rho A w_{,tt} + EI w_{,xxxx} + P w_{,xx} + k_1 w + k_3 w^3 = 0 \qquad (۱)$$

که در آن w تغییر مکان عرضی بوده و وابسته به زمان می‌باشد. در این معادله ρ جرم حجمی ماده‌ی تیر، A سطح مقطع تیر، I ممان اینرسی دوم سطح مقطع تیر و E مدول الاستیسیته است. همچنین، $k1$ و $k3$ بترتیب ضرایب مربوط به سختی خطی و غیرخطی بستر الاستیک تیر می‌باشند [۱۳].

شرایط مرزی در دو انتهای تیر عبارتند از

$$\text{at } x = 0 \text{ and } x = l \quad w = w_{,xx} = 0 \qquad (۲)$$

برای سادگی هرچه بیشتر در تحلیل‌های بعدی، متغیرهای بی‌بعد زیر تعریف می‌گردند

$$x^* = \frac{x}{l},\ t^* = \frac{r_g}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}t,\ w^* = \frac{w}{l},\ r^* = \frac{r_g}{l},$$
$$P^* = \frac{Pl^2}{{r_g}^2 EA},\ k_1^* = \frac{k_1 l^4}{{r_g}^2 EA},\ k_3^* = \frac{k_3 l^6}{{r_g}^2 EA} \qquad (۳)$$

که در آن r_g شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر می‌باشد. با جایگذاری این کمیت‌های بی‌بعد در معادلات (۱) و (۲)

$$w^*_{,t^*t^*} + w^*_{,x^*x^*x^*x^*} + P^* w^*_{,x^*x^*} + k_1^* w^* + k_3^* w^{*3} = 0 \qquad (۴)$$

$$\text{at } x^* = 0 \text{ and } x^* = 1 \quad w^* = w^*_{,x^*x^*} = 0 \qquad (۵)$$

با حذف علامت بالانویس * در معادلات (۴) و (۵) این معادلات به صورت زیر بازنویسی می‌شوند

$$w_{,tt} + w_{,xxxx} + P w_{,xx} + k_1 w + k_3 w^3 = 0 \qquad (۶)$$

$$\text{at } x = 0 \text{ and } x = 1 \quad w = w_{,xx} = 0 \qquad (۷)$$

برای مطالعه‌ی اثر سختی غیرخطی بستر الاستیک k_3 در پاسخ سیستم، پارامتر بی‌بعد ε به عنوان ضریب در معادله‌ی (۶) معرفی می‌گردد [۱۳]. واضح است که دلیل درنظر گرفتن این ضریب به عنوان پارامتر حضور سختی غیرخطی بستر الاستیک در بررسی رفتار دینامیکی سیستم می‌باشد.

$$w_{,tt} + w_{,xxxx} + P w_{,xx} + k_1 w + \varepsilon k_3 w^3 = 0 \qquad (۸)$$

اگر $\varepsilon = 0$ باشد، رفتار سیستم خطی بوده و $\varepsilon = 1$ بیانگر سیستم غیر خطی می‌باشد. درادامه معادله (۸) با شرایط مرزی آن در رابطه (۷) با استفاده از روش مدهای نرمال غیرخطی حل می‌گردد. در ادامه و در بخش‌های بعدی در ابتدا پاسخ دینامیکی تیر اویلر- برنولی دو سر مفصل واقع بر بستر الاستیک غیرخطی تحت بار محوری فشاری در دو انتهای آن برای حالت بدون رزونانس سه به یک با استفاده از روش چند مقیاس زمانی و بهره‌گیری از مفهوم مدهای نرمال غیرخطی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. سپس در حالت رزونانس داخلی سه به یک به تحلیل پایداری حالت پایای ارتعاشات غیرخطی تیر پرداخته می‌شود.

۳- پاسخ دینامیکی تیر در حالت بدون رزونانس داخلی ۳:۱

برای انجام تحلیل دینامیکی ارتعاشات غیرخطی تیر از روش چند مقیاس زمانی بهره گرفته می‌شود [۱۶].

۳-۱- روش حل چند مقیاس زمانی

در این روش حل، بسطی شامل دوجمله با دو مقیاس زمانی برای حل معادلات (۷) و (۸) جستجو می گردد.

$$w(x,t;\varepsilon)=w_0(x,T_0,T_1)+\varepsilon w_1(x,T_0,T_1)+O(\varepsilon^2) \quad (۹)$$

که در آن $T_0=t$ و $T_1=\varepsilon t$ و $T_n=\varepsilon^n t$ (n = 0, 1, …) زمان‌های بی‌بعد مختلف چند مقیاسی می‌باشند. همچنین مشتقات اول و دوم زمانی به شکل بی‌بعد عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+....\equiv D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2 D_2+...\\&\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}+....\equiv\\&{D_0}^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2(2D_0D_1+{D_1}^2)+...\end{aligned} \quad (۱۰)$$

که در آن $D_n=\dfrac{\partial}{\partial T_n}$ با … ,n = 0, 1. با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در روابط (۷) و (۸) و سپس مساوی هم قرار دادن ضرایب جملات هم درجه از ε، معادلات دیفرانسیلی زیر بدست می‌آید:

Order ε_0:

$$D_0^2w_0+w_0^{iv}+Pw_0''+k_1w_0=0 \quad (۱۱)$$

at x = 0 and x = 1 $w_0=w_0''=0$ (۱۲)

و

Order ε_1:

$$D_0^2w_1+w_1^{iv}+Pw_1''+k_1w_1=-2D_0D_1w_0-k_3w_0^3 \quad (۱۳)$$

at x = 0 and x = 1 $w_1=w_1''=0$ (۱۴)

که در آن علامت پرایم بالای هر کمیت نشانگر مشتق آن کمیت نسبت به پارامتر بی‌بعد x در مرتبه ظاهر شده برای آن می‌باشد. برای حصول به جواب مرتبط با مد غیرخطی، حلی خطی برای مد خطی mام با قرار دادن ε = 0 بدست می‌آید. در این گام، حل مسئله‌ی خطی از مرتبه صفر (ε_0) عبارت است از:

$$\begin{aligned}&w_0(x,T_0,T_1)=\\&\sqrt{2}\left[A_m(T_1)e^{i\omega_mT_0}+\bar{A}_m(T_1)e^{-i\omega_mT_0}\right]\sin(m\pi x)\end{aligned} \quad (۱۵)$$

بطوریکه در آن $i=\sqrt{-1}$ $A_m(T_1)$ و $\bar{A}_m(T_1)$ دوثابت مزدوج مختلط بوده و همچنین $\sqrt{2}\sin(m\pi x)$ شکل مد ارتعاشات خطی تیر دوسر ساده می‌باشد. همچنین فرکانس دایروی خطی مربوط به این شکل مد عبارت است از:

with m = 1, 2, 3, … $\omega_m^2=k_1+m^4\pi^4-Pm^2\pi^2$ (۱۶)

با جایگذاری رابطه (۱۵) در معادله‌ی مرتبه اول (۱۳):

$$\begin{aligned}&D_0^2w_1+w_1^{iv}+Pw_1''+k_1w_1=\\&-2\sqrt{2}i\omega_mA_m'(T_1)e^{i\omega_mT_0}\sin(m\pi x)\\&-2\sqrt{2}k_3\left[A_m^3(T_1)e^{3i\omega_mT_0}+3A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i\omega_mT_0}\right]\\&\times\sin^3(m\pi x)+C.C.\end{aligned} \quad (۱۷)$$

که *C.C.* به معنای جمله مزدوج مختلط[1] برای آن دسته از جمله‌های نشان داده شده در رابطه (۱۷) است. علاوه بر این، علامت پرایم برای هر کمیت در سمت راست معادلات (۱۷) نشاندهنده مشتق آن کمیت نسبت به T_1 است. با درنظر گرفتن جوابی به شکل زیر برای تعیین جواب حالت مرتبه اول (ε_1) مسئله:

$$\begin{aligned}&w_1(x,T_0,T_1)=\\&\quad g_1(x,T_1)e^{3i\omega_mT_0}+g_2(x,T_1)e^{i\omega_mT_0}+C.C.\end{aligned} \quad (۱۸)$$

و با جایگذاری معادله‌ی (۱۸) در رابطه‌ی (۱۷) و مساوی هم قرار دادن ضرایب جمله‌های هم توان $exp(3i\omega_mT_0)$ و $exp(i\omega_mT_0)$، معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم زیر بدست می‌آیند:

ضریب exp(3iωmT0):

$$\begin{aligned}&g_1^{iv}+Pg_1''+(k_1-9\omega_m^2)g_1=\\&-2\sqrt{2}k_3A_m^3(T_1)\sin^3(m\pi x)\end{aligned} \quad (۱۹)$$

at x = 0 and x = 1 $g_1=g_1''=0$ (۲۰)

و ضریب exp(iωmT0):

$$\begin{aligned}&g_2^{iv}+Pg_2''+(k_1-\omega_m^2)g_2=\\&\quad-2\sqrt{2}i\omega_mA_m'(T_1)\sin(m\pi x)\\&\quad-6\sqrt{2}k_3A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)\sin^3(m\pi x)\end{aligned} \quad (۲۱)$$

at x = 0 and x = 1 $g_2=g_2''=0$ (۲۲)

جواب معادلات (۱۹) و (۲۰) عبارت است از:

1- Complex Conjugate

$$g_1(x,T_1)=\frac{3\sqrt{2}k_3}{16\omega_m^2}A_m^3(T_1)\sin(m\pi x)+\frac{\sqrt{2}k_3}{16(9m^4\pi^4-k_1)}A_m^3(T_1)\sin(3m\pi x) \qquad (۲۳)$$

واضح است که بخش‌های همگن معادلات (۲۱) و (۲۲) دارای جواب غیربدیهی می‌باشد. به عبارت دیگر حل خصوصی معادلات (۲۱) و (۲۲) تنها در شرایطی وجود دارد که شرط حل‌پذیری مسئله ارضا شود. در این حالت شرط حل‌پذیری دیکته می‌کند که سمت راست معادله (۲۱) نسبت به $\sin(m\pi x)$ که جواب مسئله همگن است متعامد باشد. بنابراین شرط حل‌پذیری عبارت است از

$$2i\omega_m A_m'(T_1)=-\frac{9}{2}k_3A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1) \qquad (۲۴)$$

که در آن دامنه $A_m(T_1)$ به شکل قطبی عبارت است از

$$A_m(T_1)=\frac{1}{2}a_m(T_1)e^{i\beta_m(T_1)} \qquad (۲۵)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۲۴) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی بدست می‌آید که

$$a_m(T_1)=\text{const.}$$

$$\beta_m(T_1)=\frac{9k_3}{16\omega_m}a_m^2(T_1)T_1 \qquad (۲۶)$$

and

with m = 1, 2, …, n

سپس جواب نهایی معادلات (۲۱) و (۲۲) عبارت است از

$$g_2(x,T_1)=\frac{3\sqrt{2}k_3}{16(10m^4\pi^4-Pm^2\pi^2)}A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)\sin(3m\pi x) \qquad (۲۷)$$

با جایگذاری g_1 و g_2 در رابطه‌ی (۱۸) جوابی برای w_1 بدست می‌آید. با در دست داشتن جواب w_0 و w_1 و با جایگذاری آنها در رابطه‌ی (۹) و سپس با قراردادن $\varepsilon = 1$، عبارت حاکم بر ارتعاشات جانبی تیر تا حل مرتبه‌ی دوم بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}w(x,t)&=\sqrt{2}A_m(T_1)\sin(m\pi x)e^{i\omega_m t}\\&+\frac{3\sqrt{2}k_3}{16(10m^4\pi^4-Pm^2\pi^2)}\\&\times A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)\sin(3m\pi x)e^{i\omega_m t}\\&+\frac{\sqrt{2}k_3}{16}\left(\frac{3}{\omega_m^2}\sin(m\pi x)+\frac{1}{9m^4\pi^4-k_1}\sin(3m\pi x)\right)\\&\times A_m^3(T_1)e^{3i\omega_m t}+C.C.+\ldots\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

از روابط (۲۴) و (۲۶) نتیجه گرفته می‌شود که فرکانس طبیعی ارتعاشات غیرخطی $(\omega_{nl})_m$ تیر در مد غیرخطی mام از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$(\omega_{nl})_m=\omega_m\left(1+\frac{9k_3}{16\omega_m^2}a_m^2\right)+\ldots \qquad (۲۹)$$

آشکار است که اگر مخرج جمله‌ی دوم در سمت راست رابطه حاکم بر $w(x,t)$ در رابطه‌ی (۲۸) به سمت صفر میل کند یعنی $w(x,t)\rightarrow\infty$ در این صورت بار بحرانی محوری فشاری از رابطه $P_{cr}=10m^2\pi^2$ که در آن $m=1,2,\ldots,n$ است تعیین می‌شود. همچنین اگر مخرج جمله‌ی چهارم در سمت راست رابطه حاکم برخیز جانبی تیر $w(x,t)$ به سمت صفر میل کندیعنی اگر $9m^4\pi^4-k_1\rightarrow 0$ و یا $k_1=9m^4\pi^4$ که در آن $m=1, 2, \ldots, n$، این وضعیت با حالت رزونانس داخلی ۳:۱ مرتبط است. در این وضعیت به راحتی ثابت می‌گردد که $\omega_{3m}=3\omega m$ است که اصطلاحاً رزونانس داخلی سه به یک نامیده می‌شود. در این حالت کوپلینگ قوی‌ای بین مد مرتبه mام و مد مرتبه $3m$اُم وجود دارد بطوریکه هیچ کدام از این دو مد بدون تحریک و فعال کردن مد دیگر ایجاد نمی‌گردد.

۴- تحلیل رفتاری تیر در حالت رزونانس داخلی ۳:۱

در این بخش تحلیل رفتاری سیستم در دو بخش تحلیل پاسخ دینامیکی و تحلیل پایداری حالت پایا بررسی می‌گردد.

۴-۱- پاسخ دینامیکی

در این بخش برای اینکه درک بهتری از آنچه که در حالت رزونانس داخلی ۳:۱ اتفاق می‌افتد؛ یعنی $k_1=9m^4\pi^4$ که در آن $m = 1, 2, \ldots, n$ است؛ همچنین برای ساختن مدهای نرمال غیرخطی با استفاده از روش MTS، مجدداً معادلات (۷) و (۸) ا درنظر گرفته می‌شود. با در دست داشتن نتایج بدست آمده در معادلات (۱۱) و (۱۲)، حل مرتبه‌ی صفرم در حالت رزونانس داخلی ۳:۱ با درنظر گرفتن $n=3m$ به صورت زیر خواهد بود:

(۳۰)

$$w_0(x,T_0,T_1)=\sqrt{2}A_m(T_1)e^{i\omega_m T_0}\sin(m\pi x)+\sqrt{2}A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0}\sin(3m\pi x)+C.C.$$

با جایگذاری w_0 از معادله‌ی (۳۰) در معادله‌ی (۱۳) بدست می‌آید.

(۳۱)

$$\begin{aligned}
&D_0^2 w_1 + w_1^{iv} + P w_1'' + k_1 w_1 = \\
&-2\sqrt{2}i\left[\omega_m A_m'(T_1)e^{i\omega_m T_0}\sin(m\pi x)+\omega_n A_n'(T_1)e^{i\omega_n T_0}\sin(3m\pi x)\right] \\
&-2\sqrt{2}k_3\left[A_m^3(T_1)e^{3i\omega_m T_0}\sin^3(m\pi x)+A_n^3(T_1)e^{3i\omega_n T_0}\sin^3(3m\pi x)\right. \\
&+3A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i\omega_m T_0}\sin^3(m\pi x)+3A_n^2(T_1)\bar{A}_n(T_1)e^{i\omega_n T_0}\sin^3(m\pi x) \\
&+3A_n(T_1)A_m^2(T_1)e^{i(\omega_n+2\omega_m)T_0}\sin(3m\pi x)\sin^2(m\pi x) \\
&+3A_n(T_1)\bar{A}_m^2(T_1)e^{i(\omega_n-2\omega_m)T_0}\sin(3m\pi x)\sin^2(m\pi x) \\
&+3A_n^2(T_1)A_m(T_1)e^{i(2\omega_n+\omega_m)T_0}\sin^2(3m\pi x)\sin(m\pi x) \\
&+3A_n^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i(2\omega_n-\omega_m)T_0}\sin^2(3m\pi x)\sin(m\pi x) \\
&+6A_n(T_1)A_m(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i\omega_n T_0}\sin(3m\pi x)\sin^2(m\pi x) \\
&\left.+6A_m(T_1)A_n(T_1)\bar{A}_n(T_1)e^{i\omega_m T_0}\sin(m\pi x)\sin^2(3m\pi x)\right]+C.C.+\ldots
\end{aligned}$$

شرایط مرزی دوسر مفصل برای تیر عبارتند از

at x = 0 and x = 1 $w_1 = w_1'' = 0$ (۳۲)

شرایط حل‌پذیری معادله‌ی (۳۱) عبارتند از [۱۶]

$$\begin{aligned}
&2i\omega_m A_m'(T_1)= \\
&-\frac{9}{4}k_3A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)-3k_3A_m(T_1)A_n(T_1)\bar{A}_n(T_1) \\
&+\frac{3}{4}k_3A_n(T_1)\bar{A}_m^2(T_1)e^{i\sigma T_1}
\end{aligned} \quad (۳۳)$$

و

$$\begin{aligned}
&2i\omega_n A_n'(T_1)= \\
&-\frac{9}{4}k_3A_n^2(T_1)\bar{A}_n(T_1)-3k_3A_m(T_1)\bar{A}_m(T_1)A_n(T_1) \\
&+\frac{1}{4}k_3A_m^3(T_1)e^{-i\sigma T_1}
\end{aligned} \quad (۳۴)$$

که در معادلات (۳۳) و (۳۴) دامنه‌های $A_n(T_1)=\frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)}$ و $A_m(T_1)=\frac{1}{2}a_m(T_1)e^{i\beta_m(T_1)}$ به شکل قطبی تعریف می‌گردند. علاوه براین پارامتر σ که به عنوان پارمتر تنظیم کننده شناخته می‌شود عبارت است از:

$$\sigma=\omega_n-3\omega_m \quad (۳۵)$$

n = 3m و m = 1, 2, 3, …

حل معادله‌ی (۳۱) تحت شرایط مرزی داده شده در معادله (۳۲) به صورت زیر می‌باشد.

(۳۶)

$$\begin{aligned}
&w_1(x,T_0,T_1)= \\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}k_3\left[f_1(x)A_m^3(T_1)e^{3i\omega_m T_0}+f_2(x)A_n^3(T_1)e^{3i\omega_n T_0}\right. \\
&+f_3(x)A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i\omega_m T_0} \\
&+f_4(x)A_n^2(T_1)\bar{A}_n(T_1)e^{i\omega_n T_0}+f_5(x)A_n(T_1)A_m^2(T_1)e^{i(\omega_n+2\omega_m)T_0} \\
&+f_6(x)A_n(T_1)\bar{A}_m^2(T_1)e^{i(\omega_n-2\omega_m)T_0}+f_7(x)A_n^2(T_1)A_m(T_1)e^{i(2\omega_n+\omega_m)T_0} \\
&+f_8(x)A_n^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i(2\omega_n-\omega_m)T_0}+f_9(x)A_n(T_1)A_m(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i\omega_n T_0} \\
&\left.+f_{10}(x)A_m(T_1)A_n(T_1)\bar{A}_n(T_1)e^{i\omega_m T_0}\right]+C.C.+\ldots
\end{aligned}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۳۶) در معادله‌ی (۳۱)، استفاده از معادلات مدولاسیون (۳۳) و (۳۴) و مساوی هم قراردادن ضرایب هارمونیک‌های نظیر هم نسبت به T_0 و توجه به اینکه n = 3m و جایگزینی ω_n با $3\omega m$، ده معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی چهار کوپل‌نشده برحسب توابع f_1 تا f_{10} بدست می‌آیند. علاوه براین با جایگذاری معادله‌ی (۳۶) در معادله‌ی (۳۲) و مساوی قراردادن ضرایب هارمونیک‌های نظیر هم از T_0 بدست می‌آید که:

for i = 1, 2, 3, …, 10 $f_i(x)=f_1''(x)=0$ (۳۷)
at x = 0 and x = 1

باید توجه نمود که توابع f_1 تا f_{10} به صورت تحلیلی می‌توانند از ده معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مذکور در بالا محاسبه شوند. ولی برای اختصار جزئیات محاسبات آنها در ادامه آورده نشده‌اند. به هر حال با داشتن مقادیر توابع f_1 تا f_{10}، مد نرمال غیرخطی حاکم بر $w(x, T_0, T_1)$ با درنظر گرفتن $\varepsilon=1$ به صورت بسط $w = w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots$ بدست می‌آید. در وضعیت رزونانس داخلی که مدهای mام و $3m$ام خطی به یکدیگر کوپل می‌باشند، معادله‌ی خیز جانبی به صورت زیر بدست می‌آید:

(۳۸)

$$\begin{aligned}
&w(x,T_0,T_1)= \\
&\sqrt{2}A_m(T_1)e^{i\omega_m T_0}\sin(m\pi x)+\sqrt{2}A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0}\sin(3m\pi x) \\
&-\frac{\sqrt{2}k_3}{2}\left[f_1(x)A_m^3(T_1)e^{3i\omega_m T_0}+f_2(x)A_n^3(T_1)e^{3i\omega_n T_0}\right. \\
&+f_3(x)A_m^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i\omega_m T_0} \\
&+f_4(x)A_n^2(T_1)\bar{A}_n(T_1)e^{i\omega_n T_0}+f_5(x)A_n(T_1)A_m^2(T_1)e^{i(\omega_n+2\omega_m)T_0} \\
&+f_6(x)A_n(T_1)\bar{A}_m^2(T_1)e^{i(\omega_n-2\omega_m)T_0}+f_7(x)A_n^2(T_1)A_m(T_1)e^{i(2\omega_n+\omega_m)T_0} \\
&+f_8(x)A_n^2(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i(2\omega_n-\omega_m)T_0}+f_9(x)A_n(T_1)A_m(T_1)\bar{A}_m(T_1)e^{i\omega_n T_0} \\
&\left.+f_{10}(x)A_m(T_1)A_n(T_1)\bar{A}_n(T_1)e^{i\omega_m T_0}\right]+C.C.+\ldots
\end{aligned}$$

۴-۲- تحلیل پایداری در حالت پایا

برای مطالعه پایداری پاسخ در حالت پایا برای جواب‌های داده شده در معادلات (۳۳) و (۳۴)، روش مقادیر ویژه‌بردارهای ویژه بکار گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن دامنه‌های ارتعاش بصورت قطبی $A_m(T_1)=\frac{1}{2}a_m(T_1)e^{i\beta_m(T_1)}$ و $A_n(T_1)=\frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)}$ و جایگذاری آنها در معادلات (۳۳) و (۳۴) و سپس با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی در روابط بدست آمده معادلات دیفرانسیلی-جبری زیر بدست می‌آیند

$$a'_m=\frac{3}{16}k_3a_na_m^2\sin\gamma=g_1(a_m,a_n,\gamma) \qquad (۳۹)$$

$$a'_n=-\frac{1}{2\omega_n}k_3a_m^3\sin\gamma=g_2(a_m,a_n,\gamma) \qquad (۴۰)$$

و

$$\begin{aligned}\gamma'=2k_3\Bigg(&-\frac{9}{32}\frac{a_n^2}{\omega_n}-\frac{3}{8}\frac{a_m^2}{\omega_n}+\frac{1}{4}\frac{a_m^3}{\omega_na_n}\cos\gamma\\&+\frac{27}{32}\frac{a_m^2}{\omega_m}+\frac{9}{8}\frac{a_n^2}{\omega_m}-\frac{9}{32}\frac{a_ma_n}{\omega_m}\cos\gamma\Bigg)+\sigma\\=&\,g_3(a_m,a_n,\gamma)\end{aligned} \qquad (۴۱)$$

که

$$\gamma=\beta_n-3\beta_m+\sigma T_1 \text{ و } n=3m \qquad (۴۲)$$

$$\beta'_m=\frac{2k_3}{\omega_ma_m}\left(-\frac{9}{32}a_m^3-\frac{3}{8}a_ma_n^2+\frac{3}{32}a_m^2a_n\cos\gamma\right) \qquad (۴۳)$$

و

$$\beta'_n=\frac{2k_3}{\omega_na_n}\left(-\frac{9}{32}a_n^3-\frac{3}{8}a_m^2a_n+\frac{1}{4}a_m^3\cos\gamma\right) \qquad (۴۴)$$

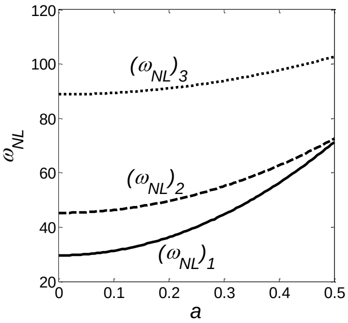
که در آن g_1، g_2 و g_3 توابعی از a_m، a_n و γ هستند. مجدداً باید متذکر گردد که علامت پرایم بالای هر پارامتر نشاندهنده‌ی مشتق اول آن پارامتر نسبت به T_1 است. برای پاسخ حالت پایا، $a'_m=a'_n=\gamma'=0$ قرار داده می‌شود. برای کنترل کردن شرط پایداری جواب حالت پایا در معادلات (۳۹) و (۴۰) لازم است که این معادلات نزدیک نقاط سینگولار (یا حالت پایا) خطی‌سازی شوند. در نتیجه یک مجموعه از معادلات خطی با ضرایب ثابت که در جمله‌های اغتشاشی نامعلوم ضرب می‌شوند بدست می‌آید.

به عبارت دیگر این یک مسئله کلاسیک است مقادیر ویژه به شکل $\{\mathbf{X}'\}=[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\}$ است که $\vec{\mathbf{X}}=[a_m,a_n,\gamma]^T$ و $A_{ij}=\frac{\partial g_i(a_m,a_n,\gamma)}{\partial X_j}$ با i,j = 1, 2, 3 که در آن A_{ij} ماتریس ژاکوبین می‌باشد. در گام بعدی $\det([A]-\lambda[I])=0$ حل می‌گردد تا مقادیر ویژه‌ی (λi) که اعدادی مختلط می‌باشند، بدست آیند. سپس با استفاده از این مقادیر ویژه می‌توان پایداری در حوالی نقاط سینگولار (تکینگی) را بررسی نمود.

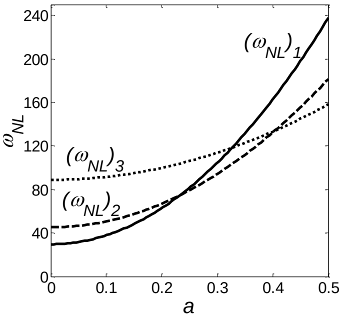
۵- جواب‌های عددی و بحث و بررسی در تحلیل نتایج

۵-۱- تحلیل دینامیکی در وضعیت بدون رزونانس داخلی

در شکل (۲) تغییرات فرکانس غیرخطی تیر $(\omega_{nl})_1$، $(\omega_{nl})_2$ و $(\omega_{nl})_3$ نسبت به دامنه مودال ارتعاش بی‌بعد شده‌ی a، ترسیم شده‌است بطوریکه در آن $k1=9\pi^4$ و $P=\pi^2$ و نسبت k_3/k_1 برابر با مقادیر۱۰ و ۵۰ انتخاب شده‌است. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار k_3 مقدار فرکانس غیرخطی ارتعاش افزایش می‌یابد. همچنین نرخ تغییر $(\omega_{nl})_1$ نسبت به دو فرکانس دیگر بیشتر است. با توجه به رابطه‌ی (۲۹) می‌توان نتیجه گرفت که اگر $k_3=0$ باشد، مسئله خطی خواهد بود یعنی $(\omega_l)_{i+1}>(\omega_l)_i$ که در آن $i=1,2,3,$ .... این مورد مطلقاً برای مسئله‌ی غیرخطی که در آن ($k_3\neq 0$) است و برای مثال $(\omega_{nl})_1$ در بعضی از محدوده‌های دامنه مودال از مقادیر $(\omega_{nl})_2$ و $(\omega_{nl})_3$ بزرگتر است، صحیح نمی‌باشد.



(الف)

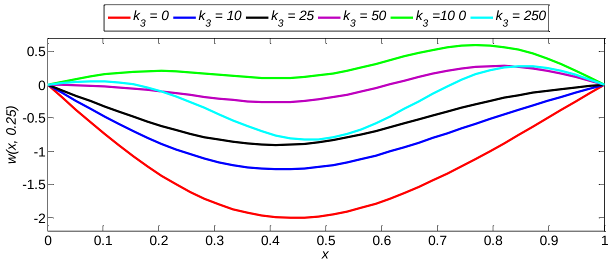


(ب)

شکل(۲) تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد شده ωnl برحسب دامنه مودال ارتعاش a

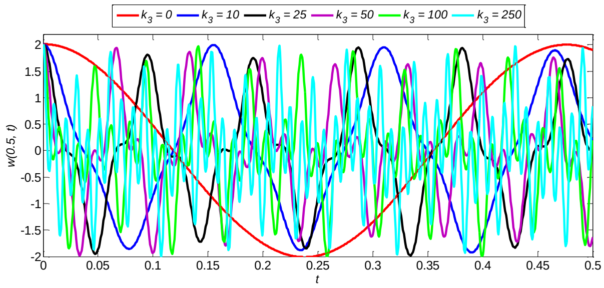
(الف) $k_3 = 90\pi^4$ و (ب) $k_3 = 450\pi^4$

در شکل (۳) با استفاده از نه مد اول ارتعاش شکل خیز تیر در طول آن در لحظه‌ی زمانی t برای مقادیر مختلف سختی غیرخطی بستر $k_3 = 0, 10, 25, 50, 100, 250$ وقتی $k_1 = 0.18\pi^4$ و $P = \pi^2$ نشان داده شده‌است. از این شکل مشاهده می‌گردد، وقتی پارامتر غیرخطی در سیستم وجود دارد، مقدار قدر مطلق خیز دینامیکی تیر کمتر از مقداری است که برای بستر الاستیک خطی با $k_3 = 0$ بدست می‌آید. علاوه بر این مشاهده می‌گردد که بطور کلی با افزایش مقدار k_3 بستر الاستیک، مقدار ماکزیمم منحنی خیز تیر کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر هر افزایشی در مقدار k_3 موجب افزایش سختی سیستم خواهد شد.



شکل(۳) تغییر خیز تیر در طول آن در لحظه $t = 0$ برای مقادیر مختلف سختی غیرخطی بستر k_3

شکل (۴) تغییرات زمانی خیز نقطه میانی تیر یعنی w(0.5,t) را برحسب t (0<t<0.5) برای مقادیر مختلف سختی غیرخطی بستر $k_3 = 0, 10, 25, 50, 100, 250$ و برای مقادیر $k_1 = 0.18\pi^4$ و $P = \pi^2$ با استفاده از نه مد اول ارتعاش نشان می‌دهد. از شکل (۴) دیده می‌شود که با افزایش مقدار سختی غیرخطی بستر الاستیک، ماکزیمم خیز دینامیکی تیر در یک لحظه‌ی زمانی متفاوت مرتبط با یک k_3 مشخص، غالباً یکسان باقی می‌ماند. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که هر افزایشی در مقدار k_3 باعث ایجاد یک فرکانس ارتعاشی بالاتر (یا یک پریود کمتر) می‌گردد.

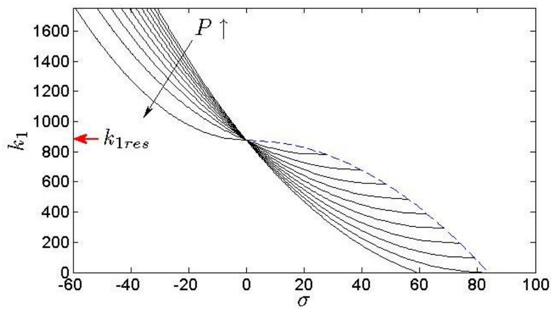


شکل(۴) تغییرات زمانی خیز نقطه میانی تیر برحسب زمان بی‌بعد شده برای مقادیر مختلف سختی غیرخطی بستر

۵-۲- نتایج دینامیکی و تحلیل‌های پایداری در حالت پایا در وضعیت رزونانس داخلی ۳:۱

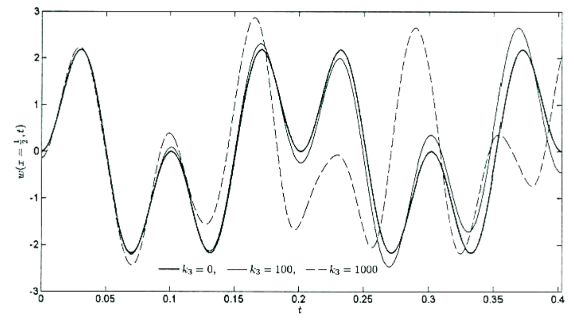
۵-۲-۱- پاسخ دینامیکی

شکل (۵) تغییرات k_1 برحسب σ برای مقادیر مختلف بار محوری فشاری $P/Pcr = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ که در آن $k_3 = 10$ ($P_{cr} = 10m^2\pi^2$) با m= 1) را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که σ دارای حد بالایی می‌باشد که می‌توان از $\omega_m = 0$ برای هر مقدار P آن را بدست آورد. این شرط حدی برای مقادیر مختلف P با منحنی‌ای به شکل خط چین در شکل (۵) نشان داده شده‌است. در این شکل $k_{1res} = 876.7$ است که از رابطه $k_1 = 9m^4\pi^4$ با m = 1 در حالت رزونانس داخلی ۳:۱ بدست می‌آید.



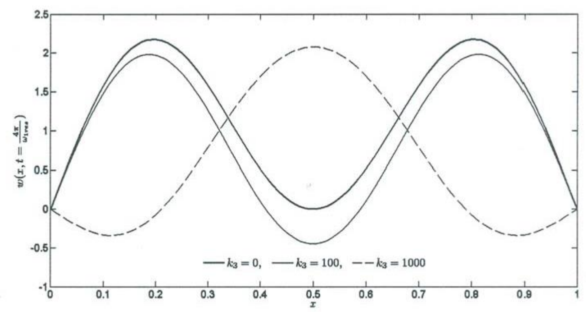
شکل (۵) تغییرات k_1 برحسب σ برای مقادیر مختلف P

در شکل (۶) تغییرات زمانی خیز نقطه میانی تیر بر روی بستر الاستیک در بازه‌ی زمانی $0\le t\le t1$ که در آن $t_1=4\pi/\omega_{1res}$ و $\omega_{1res}=k_1+\pi^4+P\pi^2$ است برای مقادیر مختلف k_3 و بازای $P = 0,\ \sigma = 0$ و $m = 1$ نشان داده شده‌است. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار سختی غیرخطی بستر الاستیک یعنی k_3 مقادیر بیشینه بر روی منحنی خیز تیر، کمی افزایش می‌یابند.



شکل(۶) خیز نقطه میانی تیر برحسب زمان بی‌بعد شده برای مقادیر مختلف سختی غیرخطی بستر

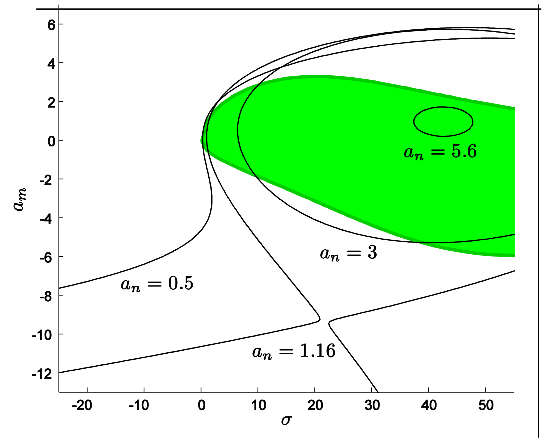
در شکل (۷) شکل کلی خیز تیر در $t = 4\pi/\omega_{1res}$ برای مقادیر مختلف k_3 وقتی $\sigma = 0,\ P = 0$ و $m = 1$ نشان داده شده‌است.



شکل (۷) تغییرات خیز تیر در طول آن در لحظه $t = 4\pi/\omega1res$ برای مقادیر مختلف سختی غیرخطی بستر

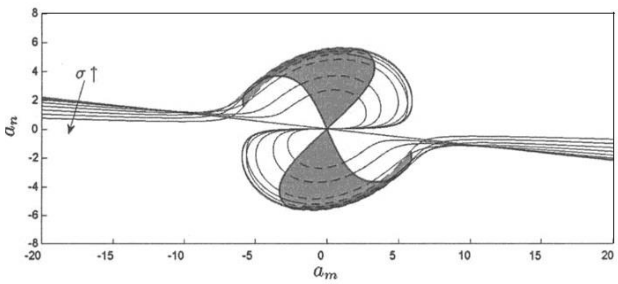
۵-۲-۲- بررسی نتایج تحلیل پایداری در حالت پایا

بر اساس تحلیل پایداری برای پاسخ‌های حالت پایا که در بخش (۴-۲) انجام پذیرفته‌است و با بهره‌گیری از نتایج استخراج شده از شکل (۵)، در شکل (۸) تغییرات دامنه‌ی مد نرمال غیرخطی a_m وقتی پارامتر σ از ۲۵ تا ۵۵ و دامنه‌ی مد نرمال غیرخطی a_n دارای مقادیر مختلف 0.5, 1.16, 3, 5.6 است، نشان داده شده است. باید اشاره گردد که نقاطی با مقادیر مشخصی از a_m, a_n و σ که در داخل مناطق سبز رنگ هستند، شرایط ناپایداری دارند و برای نقاط خارج این منطقه، جواب‌های دامنه‌ی ارتعاش پایدار می‌باشند.



شکل (۸) تغییرات دامنه a_m برحسب پارامتر σ برای مقادیر مختلف a_n

تغییرات دامنه‌ی مد نرمال غیرخطی a_n برحسب دامنه‌ی مد نرمال غیرخطی a_m برای مقادیر مختلف $\sigma = 0, 5, 10, 20,$ 30, 40, 50, 60 برای $k_3 = 10$ ، $m = 1$ و $\frac{P}{P_{cr}} = 0.5$ در شکل (۹) نشان داده شده‌است. لازم به ذکر است که نقاطی که دارای مقادیر مشخصی از a_m, a_n و σ می‌باشند در داخل مناطق خاکستری رنگ شرایط ناپایدار دارند و برای نقاطی خارج این منطقه، جواب‌های سیستم پایدار می‌باشند.



شکل (۹) تغییرات دامنه مد نرمال غیرخطی a_n برحسب مد نرمال غیرخطی a_m برای مقادیر مختلف σ

۶- نتیجه‌گیری

معادله‌ی دیفرانسیلی پاره‌ای غیرخطی حاکم بر ارتعاش تیر اویلر- برنولی که بر روی بستر الاستیک غیرخطی تحت بار محوری فشاری در دو انتهای آن قرار دارد با استفاده از روش تحلیلی-تقریبی چند مقیاس زمانی با استخراج مدهای نرمال غیرخطی حل گردید. نتایج بدست آمده عبارتند از:

۱- برای سیستم مورد مطالعه مشاهده گردید که کوپلینگ رزونانس داخلی ۳:۱ بین مد mاُم و مد $3m$ اُم وجود دارد و همزمان با آن بار محوری فشاری بحرانی مد mاُم مرتبط با این رزونانس داخلی وجود دارد.

۲- مشاهده گردید که با افزایش مقادیر k_3 مقادیر فرکانس‌های غیرخطی ارتعاش افزایش می‌یابند. همچنین روند تغییرات $(\omega_{nl})_1$ بیشتر از $(\omega_{nl})_{n|_{n>1}}$ می‌باشد.

۳- هر افزایشی در مقدار سختی غیرخطی بستر الاستیک تیر موجب افزایش فرکانس ارتعاش (کمتر شدن پریود) برای حالت بدون رزونانس داخلی می‌گردد. به عبارت دیگر با افزایش کمیت سختی غیرخطی بستر الاستیک تیر، اثر مد $3m$اُم در کوپلینگ موجود برجسته‌تر می‌گردد.

۴- در حالت بدون رزونانس داخلی و تحت اثر بار محوری فشاری مشاهده می‌گردد که با افزایش مقدار k3 مقدار بیشینه منحنی خیز تیر کمی کاهش می‌یابد.

فهرست علائم

طول تیر	l
جرم حجمی ماده تیر	ρ
سطح مقطع تیر	A
ممان اینرسی دوم سطح مقطع تیر	I
مدول الاستیسیته ماده تیر	E
شعاع ژیراسیون تیر	r_g
ضریب سختی خطی بستر الاستیک تیر	k_1
ضریب سختی غیرخطی بستر الاستیک تیر	k_3
نیروی محوری فشاری	P
نیروی محوری فشاری بحرانی	P_{cr}
ضریب سختی خطی بستر الاستیک تیر در رزونانس داخلی ۳:۱	k_{1res}
مختصه زمانی	t
مختصه مکانی	x
زمان بی‌بعد مختلف چند مقیاسی nام	T_n
تغییر مکان عرضی وابسته به زمان محور اصلی تیر	$w(x,t)$
پارامتر بی‌بعد	ε
فرکانس طبیعی mام ارتعاشات خطی تیر	ω_m
فرکانس طبیعی ارتعاشات غیرخطی تیر	ω_{nl}
دامنه زمانی mام ارتعاشات جانبی تیر در شکل قطبی	$A_m(T_1)$
پارامتر تنظیم کننده فرکانس	σ
دامنه زمانی mام ارتعاشات جانبی تیر	$a_m(T_1)$
فاز زمانیmام دامنه ارتعاشات جانبی تیر	$\beta_m(T_1)$
مقدار ویژه iام	λ_i
ماتریس ژاکوبین	A_{ij}

مراجع

[1] Nayfeh A.H., Lacarbonara W., Chin C.-M., Nonlinear normal modes of buckled beams: three-to-one and one-to-one internal resonances, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 18, 1999, pp., 253-273.

[2] Santee D.M., Goncalves P.B., Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads, *Shock and Vibration*, Vol. 13, 2006, pp. 273-284.

[3] Tsiatas G.C., Nonlinear analysis of non-uniform beams on nonlinear elastic foundation, *Acta Mechanical*, Vol. 209, 2010, pp. 141-152.

[4] Kuo Y.H., Lee S.Y., Deflection of nonuniform beams resting on a nonlinear elastic foundation, *Computers and Structures*, Vol. 51, 1994, pp. 513-519.

[5] Hsu M.H., Mechanical analysis of non-uniform beams resting on nonlinear elastic foundation by the differential quadrature method, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 22, 2006, pp. 279-292.

[6] Oz H.R., Pakdemirli M., Ozkaya E., Yilmaz M., Non-linear vibrations of a slightly curved beam resting on a non-linear elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, 1998, pp. 295-309.

[7] Pellicano F., Mastroddi F., Nonlinear dynamics of a beam on elastic foundation, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 14, 1997, pp. 335-355.

[8] Balkaya M., Kaya M.O., Saglamer A., Analysis of the vibration of an elastic beam supported on elastic soil using the differential transform method, *Achieve of Applied Mechanics*, Vol. 79, 2009, pp. 135-146.

[9] Birman V., On the Effects of nonlinear elastic foundation on free vibration of beams, *Journal of applied Mechanics*, Vol. 53, 1986, pp. 471-474.

[10] King M.E., Vakakis A.F., An energy-based approach to computing resonant nonlinear normal modes, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, 1996, pp. 810-819.

[11] King M.E., Vakakis A.F., An energy-based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, 1994, 332-340.

[12] Vakakis A.F., Nonlinear mode localization in systems governed by partial differential equations, *Applied Mechanics Review*, Vol. 49, 1996, pp. 87-99.

[13] Pellicano F., Vakakis A.F., Normal modes and boundary layers for a slender tensioned beam on a nonlinear foundation, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 25, 2001, pp.79-93.

[14] Jiang D., Pierre C., Shaw S.W., The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 40, 2005, pp. 729-746.

[15] Mazzilli C.E.N., Sanches C.T., Baracho O.G.P., Wiercigroch M., Keber M., Non-linear modal analysis for beams subjected to axial loads: analytical and finite-element solutions, I*nternational Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43(6), 2008, pp. 551-561.

[16] Nayfeh A.H., Mook D.T., Nonlinear oscillations, Wiley-Interscience, *New York*, 1995.