

## تحلیل ارتعاشات غیر خطی ورق کامپوزیتی با الیاف حافظه‌دار با در نظر گرفتن تغییرات لحظه‌ای کسر حجمی فاز مارتنزیت

محمد شریعیات<sup>۱</sup>، سارا سمایی<sup>۲</sup>، مجتبی مرادی<sup>۳</sup>

\* نویسنده مسئول: shariyat@kntu.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

ارتعاشات، ورق کامپوزیت هیبرید، آلیاژ حافظه‌دار، کسر حجمی مارتنزیت، خاصیت سوپرالاستیک.

### چکیده

در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های زیادی در زمینه‌ی تقویت سازه‌های کامپوزیتی توسط آلیاژهای حافظه‌دار صورت گرفته است. این مواد تحت بارگذاری سیکلی مکانیکی، از طریق ایجاد حلقه‌ی برگشت‌پذیر هیستریسیس، انرژی مکانیکی را جذب و یا تلف می‌کنند. این ویژگی بارز آلیاژهای حافظه‌دار، آنها را برای کاربردهای حسگری، عملگری، جذب انرژی ضربه و میرایی ارتعاشات مناسب ساخته است. در کارهای ارائه شده تاکنون، تغییرات فاز لحظه‌ای و موضعی سیم حافظه‌دار طی بارگذاری و باربرداری‌های پی‌درپی در زمان ارتعاش سازه به فرمی دقیق بررسی نشده است. در مقاله کنونی، ارتعاشات ورق کامپوزیت هیبرید تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار، با ارائه الگوریتمی مناسب جهت برطرف نمودن نارسایی یاد شده، مورد بررسی قرار گرفته است. برای به‌دست آوردن معادلات ارتعاشی، از اصل همیلتون و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استفاده شده است. همچنین برای مدل‌سازی آلیاژ حافظه‌دار، از معادلات بنیادین ارائه شده توسط برینسون استفاده شده و حل معادلات زمانی توسط روش انتگرال‌گیری زمانی نیومارک صورت گرفته است. سیستم معادلات به دست آمده با استفاده از روش عددی اجزای محدود و کد نویسی به کمک نرم‌افزار متلب، حل شده‌اند. در این مقاله برای اولین بار تغییرات کسر حجمی مارتنزیت به واسطه‌ی تغییرات تنش در هر زمان و تأثیر آن روی خواص مکانیکی آلیاژ حافظه‌دار و کامپوزیت هیبرید و نیروی بازبایی آلیاژ حافظه‌دار در نظر گرفته شده‌اند. در نهایت، تأثیر کسر حجمی فیبرهای حافظه‌دار در هر لایه و تأثیر نیروی اعمالی بر رفتار ارتعاشی ورق کامپوزیتی تحت بار ضربه‌ای نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

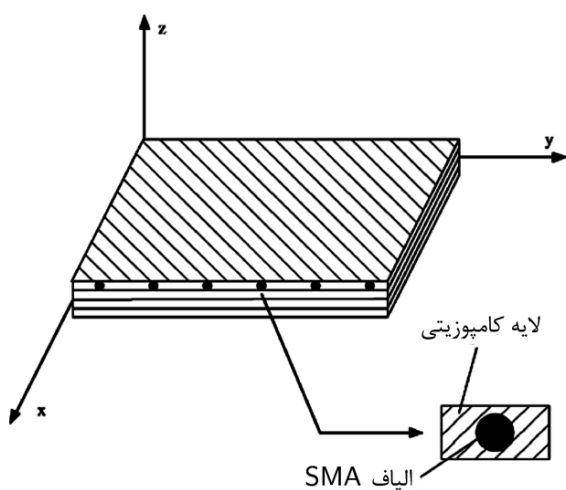
## ۱- مقدمه

آلیاژهای حافظه‌دار گروه ویژه‌ای از مواد هوشمند هستند که می‌توانند در اثر افزایش دما تحت یک استحاله‌ی فازی برگشت پذیر جامد به جامد، به شکل اولیه‌ی خود بازگردند. همچنین این مواد تحت بارگذاری سیکی مکانیکی، می‌توانند از طریق ایجاد حلقه‌ی برگشت پذیر هیستریسیس، انرژی مکانیکی را جذب و یا تلف کنند. عامل مهم در تعیین خواص آلیاژ حافظه‌دار کسر حجمی مارتنزیت است، که خود تابعی از تنش و دمای کاری است.

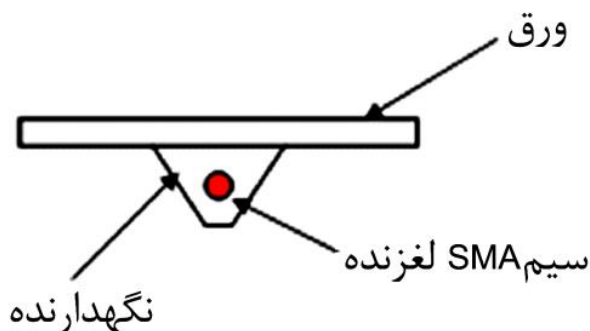
تعیین مشخصه‌های دینامیکی مانند فرکانس طبیعی سازه، نقش مهمی را در فرایند طراحی سازه ایفا می‌کند. اهمیت این موضوع به دلیل پدیده‌ی رزونانس است که در طی آن دامنه‌ی ارتعاشات تا حد وقوع و اماندگی های جبران ناپذیری افزایش می‌یابد. از این رو، مواد هوشمند مانند آلیاژهای حافظه‌دار و سرامیک‌های پیزوالکتریک به طور روزافزون جهت کنترل ارتعاشات به کار می‌روند.

دو روش کلی برای کنترل ارتعاشات توسط سیم‌های حافظه‌دار وجود دارد: کنترل فعال و غیر فعال. کنترل غیر فعال ارتعاشات کامپوزیت‌ها به وسیله‌ی سیم‌های حافظه‌دار توسط لاو<sup>۱</sup> [۱]، در سال ۱۹۹۶ بررسی شد. وی نشان داد که با افزودن سیم‌های حافظه‌دار به کامپوزیت‌ها، فرکانس‌های طبیعی تغییر می‌کنند. به علاوه، افزودن این سیم‌ها به سازه کامپوزیتی، نسبت استهلاک را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد. از سوی دیگر، کنترل فعال ارتعاشات توسط سیم‌های حافظه‌دار، شامل طراحی یک برنامه یا استفاده از یک سیستم کنترلی مبتنی بر بازخورد جهت فعال‌سازی اثر حافظه‌داری است به گونه‌ای که باعث کاهش ارتعاشات شود. مثالی از این مورد، کامپوزیت حافظه‌داری است که توسط باز<sup>۲</sup> و

همکارانش [۲] مورد آزمایش قرار گرفت. این کامپوزیت شامل دو عدد عملگر حافظه‌دار متصل به یک تیر انعطاف پذیر بود و اثر حافظه‌داری این عملگرها توسط یک برنامه‌ی کنترلی فعال، جهت میرایی فعال ارتعاشات مورد استفاده قرار گرفت. راه‌های مختلفی جهت به کارگیری سیم‌های حافظه‌دار در ورق‌های کامپوزیت وجود دارد. یکی از این روش‌ها گنجاندن سیم‌های حافظه‌دار در ماتریس پلیمری یا فلزی است [۳] (شکل ۱). روش دیگر، قرار دادن سیم‌های SMA در یک صفحه‌ی جداگانه<sup>۳</sup> است، به صورتی که بتوانند آزادانه درون این صفحه حرکت کنند، در حالی که ورق یاد شده به ورق اصلی متصل است (شکل ۲).



شکل (۱) سیم‌های SMA جاسازی شده درون ورق کامپوزیت [۳]



شکل (۲) استقرار سیم‌های SMA در صفحه‌ی جداگانه نسبت به ورق

کامپوزیت [۴]

حرکت استفاده شده بود. نتایج عددی نشان می‌دهند که محدوده‌ی تغییرات فرکانس طبیعی به کسر حجمی SMA استفاده شده در ورق، وابسته می‌باشد و با فعال سازی تعداد کمتری از این سیم‌ها، محدوده‌ی تغییرات فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین اثر شرایط مرزی ورق بررسی شده و برای ورق با تکیه‌گاه ساده حل دقیق ناپیر و برای شرایط مرزی دیگر، روش تقریبی ریلی ریتز به کار گرفته شده است. ماسودا<sup>۴</sup> و نوری [۸]، به منظور بررسی کنترل غیر فعال ارتعاشات توسط اجزاء ساخته شده از مواد SMA، ارتباط بین شکل حلقه هیستریزس اجزای SMA و کارایی مواد حافظه دار به عنوان تجهیزات میراکننده را مورد ارزیابی قرار دادند. آنها دریافتند که برای دستیابی به بالاترین کارایی برای یک دامنه تحریک مشخص، ابعاد حلقه هیستریزس باید به گونه ای تنظیم شود که پاسخ از حلقه پیشینه عبور کند، ولی از آن فراتر نرود. همچنین آنها دریافتند که برای داشتن بهترین عملکرد، ناحیه محبوس شده توسط حلقه هیستریزس می‌بایست نسبت به کل ناحیه زیر نمودار تنش کرنش در حین بارگذاری، تا حد امکان بزرگترین اندازه خود را دارا باشد. پاسخ دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با سیم‌های حافظه‌دار درون ماتریس‌های پلیمری و فلزی توسط گیلان<sup>۵</sup> و آبودی<sup>۶</sup> [۹]، بررسی شده است. این مقاله درباره‌ی اعمال شوک حرارتی و پاسخ SMA به آن می‌باشد. برای تحلیل رفتار غیرخطی ورق با طول بی‌نهایت در یک جهت تحت شوک حرارتی، معادلات بنیادین میکرومکانیک برای کامپوزیت تک‌جهته با رشته‌های SMA درون ماتریس‌های پلیمری و فلزی استخراج شده‌اند. پاسخ این ورق بر اساس تئوری کلاسیک [۱۰] و روابط کرنش-جابجایی ون کارمن ارائه شده است. برای به دست آوردن قانون ترمومکانیکی کلی، مدل میکرومکانیکی سلولی که توسط آبودی و پای<sup>۷</sup> [۱۱ و ۱۲] ارائه شده، مورد استفاده قرار گرفته است. در این مدل رفتاری، هر یک از اجزا به‌طور جداگانه و اثرات متقابل آنها با یکدیگر در نظر گرفته شده و برای پیش‌بینی

در صورتی که در روش جاسازی الیاف برای در نظر گرفتن اثرات میان اجزای ورق کامپوزیت، تحلیل به صورت میکرومکانیکی انجام شود، این روش نسبت به روش‌های دیگر پیچیده‌تر خواهد بود.

بیرمن<sup>۱</sup> [۵] کارهای انجام شده در زمینه‌ی کنترل ارتعاشات با استفاده از سیم‌های SMA را مرور نموده است. به‌طور کلی دو عامل مهم در افزایش اثر سیم‌های SMA در کاهش دامنه‌ی ارتعاشات وجود دارند:

۱- به کارگیری پیش تنش در سیم‌های SMA. در این حالت، به دلیل امکان وقوع استحاله‌ی فازی زودرس ناشی از اعمال نیروی کششی اولیه به سازه، سفتی موثر سازه افزایش یافته و دامنه‌ی ارتعاشات به دلیل نیاز به بارهای اصلی کوچکتر جهت آغاز استحاله فازی، زودتر و موثرتر اتفاق می‌افتد.

۲- استفاده از سیم‌های حافظه‌دار با اتلاف انرژی بزرگتر در حلقه‌های هیستریزس که در ناحیه‌ی سوپرلاستیک باعث کاهش موثرتر تغییر شکل‌های دینامیکی می‌گردد.

بیشتر تحقیقات صورت گرفته در زمینه‌ی کامپوزیت‌های تقویت شده با SMA بر پایه‌ی تئوری کلاسیک برای تغییر شکل‌های کوچک انجام پذیرفته و تنها تعداد محدودی از مقالات در ارتباط با تغییر شکل‌های بزرگ غیرخطی ارائه شده‌اند. جینگ<sup>۲</sup> [۶]، با استفاده از روش اجزای محدود، معادلات حرکت را برای ورق کامپوزیتی تقویت شده با SMA بر پایه‌ی کار مجازی استخراج کرد و درباره‌ی خمش، کمانش و پس کمانش این ورق‌ها به بحث پرداخت. پیترزاکوسکی<sup>۳</sup> [۷]، مقاله‌ای در رابطه با اصلاح فرکانس طبیعی و دیگر ویژگی‌های دینامیکی ورق کامپوزیتی مستطیلی تقویت شده با سیم‌های SMA، تحت بارگذاری حرارتی ارائه نمود که در آن بر اساس مدل هدایت یک بعدی نیمه پایدار، روابط دما، کسر حجمی مارتنزیت و فرکانس طبیعی بر حسب زمان به دست آمدند. برای این ورق نازک، از فرض برقراری شرایط تنش صفحه‌ای استفاده شده و از تئوری کلاسیک جهت به دست آوردن معادلات

4- Masudaa

5- Gilat R., Aboudi

6- Aboudi

7- Paiey

1- Birman

2- Jing

3- Pietrzakowski

سر گیردار و بقیه آزاد، در نظر گرفته شده و همچنین سیم-های SMA، توسط پیچ روی آن نصب شده‌است. کارهای انجام شده در زمینه به کارگیری مدل‌های تئوری (و نه ارائه تئوری برای سیم تکی) برای ورقهای کامپوزیتی دارای سیم‌های حافظه‌دار بسیار محدود می‌باشند. در اغلب این پژوهش‌ها، تنها از مفهوم ابتدایی تنش بازیافتی [۲۰-۱۸] یا هم‌ارز سازی با مدل‌های ویسکو الاستیک [۲۱] استفاده شده است. در هیچ‌یک از پژوهشهای یاد شده، تغییرات لحظه‌ای و موضعی کسر حجمی مارتنزیت آلیاژ حافظه‌دار به فرمی دقیق در نظر گرفته نشده‌است. در تحقیق کنونی، کسر حجمی مارتنزیت و نیروی بازیابی آلیاژ حافظه‌دار با توجه به تنش‌های که سیم حافظه‌دار در مکان‌ها و زمان‌های مختلف متحمل می‌شود تغییر می‌کند.

## ۲- مدل‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار

در این تحقیق جهت مدل‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار از مدل تک بعدی برینسون [۲۲] استفاده شده‌است. معادله‌ی بنیادین آلیاژ حافظه‌دار که توسط برینسون ارائه شده است، به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_0 &= E(\xi)\varepsilon - E(\xi_0)\varepsilon_0 + \Omega(\xi)\xi_s \\ &\quad - \Omega(\xi_0)\xi_{s0} + \Theta(T - T_0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\xi = \xi_s + \xi_T$$

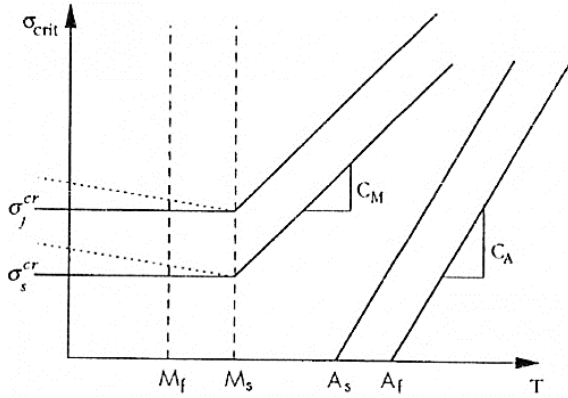
که  $\xi$ ، کسر حجمی مارتنزیت و  $\Omega$ ، ضریب استحاله‌ی فازی می‌باشد و مدول الاستیسیته به صورت زیر با کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار ارتباط دارد.

$$\begin{aligned} E(\xi) &= E_A + \xi(E_M - E_A) \\ \Omega(\xi) &= -\varepsilon_L E(\xi) \end{aligned} \quad (2)$$

زیرنویس صفر، نشان‌دهنده‌ی کرنش و کسر حجمی مارتنزیت اولیه است. همچنین  $\xi_s$  و  $\xi_T$  به ترتیب کسر حجمی مارتنزیت القا شده از تنش و دما می‌باشد. برای مدل حاضر دو پارامتر برای ماده می‌بایست تعریف گردد. پارامتر  $E$ ، که مدول الاستیسیته‌ی آلیاژ بوده و عموماً توسط

رفتار SMA از مدل لاگوداس<sup>۱</sup> و همکارانش [۱۳ و ۱۴] استفاده شده‌است. این مدل سه بعدی قادر به ایجاد اثرات حافظه‌داری و شبه الاستیک می‌باشد. در این مقاله ماتریس پلیمری مانند اپکسی به عنوان یک ماده‌ی الاستیک و ماتریس فلزی مانند آلومینیوم به عنوان یک ماده‌ی الاستیک-ویسکوپلاستیک سخت کاری شده در نظر گرفته شده است. برینسون [۴] در سال ۲۰۰۸، اثر استفاده از تکیه‌گاه الاستیک حافظه‌دار را برای کنترل غیرفعال ارتعاشات ورق‌های کامپوزیتی بررسی کرد. یکی از فواید کاربرد سیم‌های SMA به عنوان تکیه‌گاه الاستیک نسبت به سیم‌های فولادی پیش تنیده این است که فقط در هنگام اعمال بار، جهت جبران نیروی تکیه‌گاهی فعال می‌شوند؛ در حالی که سیم‌های فولادی در تمام طول عمر خود فعال می‌باشند. راه حل استفاده شده در این مقاله بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول می‌باشد. شوانگ<sup>۲</sup> و یانگ<sup>۳</sup> شنگ<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۷ [۱۵]، ارتعاشات آزاد و اجباری کامپوزیت‌های دارای فیبر آلیاژهای هوشمند را در تغییر شکل‌های بزرگ مورد بررسی قرار دادند. آنها از معادلات بنیادی ترمومکانیکی SMA ارائه شده توسط برینسون<sup>۴</sup> [۱۶] برای ارزیابی خواص صفحات کامپوزیتی هیبرید SMA استفاده کردند و با استفاده از روش گلرکین، معادلات دیفرانسیل دارای مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل نمودند. آنها همچنین جهت محاسبه‌ی خواص موثر کامپوزیت هیبرید، از قانون مخلوط‌ها استفاده کردند. آنها دریافتند که اثرات دما بر روی پاسخ اجباری در حین تحول فازی از مارتنزیت به آستنیت چشمگیر است. حریری و جان<sup>۵</sup> [۱۷]، اثر عملگرهای ساخته شده از آلیاژهای حافظه‌دار را بر روی پاسخ دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی پلیمری بررسی نمودند. معادلات حرکت ورق بر پایه‌ی معادلات کلاسیک ارائه شده و برای حل تحلیلی آن، شرط مرزی CFFF، یک

1- Lagoudas  
2- Yongsheng  
3- Shuangshuang  
4- Brinson  
5- John

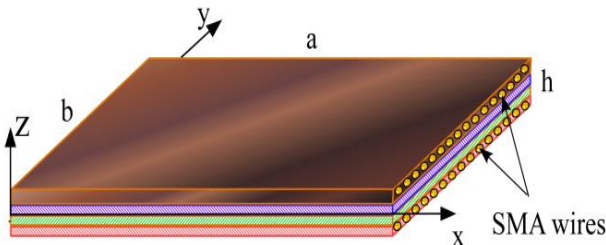


شکل (۳) رابطه‌ی تنش‌های بحرانی استحاله، یا تبدیل مارتنزیت غیردوقلویی و دما [۲۲].

### ۳- رابطه‌ی تنش - کرنش ورق کامپوزیتی

#### تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار سوپرالاستیک

در این بخش، معادله تنش-کرنش حاکم بر تک لایه‌ی ورق کامپوزیتی تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار سوپرالاستیک به دست می‌آید. ابعاد ورق مورد بررسی و سوی مثبت محورهای مختصات آن در شکل ۴ نشان داده شده‌اند.



شکل (۴) ابعاد ورق مورد بررسی و سوی مثبت محورهای مختصات آن.

با در نظر گرفتن رابطه‌ی تنش-کرنش برای تک لایه و با توجه به رابطه بنیادین ارائه شده در مدل تک بعدی برینسون برای آلیاژ حافظه‌دار و جمله‌ی حاوی ضریب استحاله‌ی فازی در آن، رابطه‌ی (۱)، که بیانگر اعمال نیروی بازایی درون صفحه‌ای به کل سازه می‌باشد و نیز توجه به ثابت بودن دما، رابطه‌ی تنش-کرنش برای حالت تنش صفحه‌ای در مختصات مادی برای تک لایه‌ی ورق کامپوزیتی تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار به صورت زیر در می‌آید.

آزمایش تنش-کرنش در محدوده‌ی الاستیک به دست می‌آید. زیر نویس‌های A و M به ترتیب بیانگر آستنیته و مارتنزیت می‌باشند. پارامتر دوم،  $\Omega$ ، در اثر تنش‌های پسماند ایجاد شده به واسطه‌ی اثر حافظه‌داری به دست می‌آید. در قانون جنبشی مورد استفاده در این مدل‌ها، کسر حجمی مارتنزیت به صورت تابعی از تنش و دما بیان می‌شود. برینسون [۲۲] معادلات جنبشی خود را برای فرآیندهای تبدیل مارتنزیت غیر دوقلویی به آستنیته و بالعکس در دماهای ثابت مختلف ارائه داد، که در معادلات (۲) تا (۴) آورده شده‌است.

• برای استحاله‌ی آستنیته به مارتنزیت غیر دوقلویی:

برای  $T > M_s$  و محدوده تنش کاری

$$\sigma_s^{cr} + C_M (T - M_s) < \sigma < \sigma_f^{cr} + C_M (T - M_s)$$

$$\xi_s = \frac{1 - \xi_{s0}}{2} \times \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}} \left[ \sigma - \sigma_f^{cr} - C_M (T - M_s) \right] \right\} + \frac{1 + \xi_{s0}}{2} \quad (2)$$

برای  $\sigma_s^{cr} < \sigma < \sigma_f^{cr}$  و  $T < M_s$

$$\xi_s = \frac{1 - \xi_{s0}}{2} \times \cos \left[ \frac{\pi}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}} (\sigma - \sigma_f^{cr}) \right] + \frac{1 + \xi_{s0}}{2} \quad (3)$$

• برای استحاله‌ی مارتنزیت غیر دوقلویی به آستنیته:

برای  $T > A_s$  و  $C_A (T - A_f) < \sigma < C_A (T - A_s)$

$$\xi_s = \frac{\xi_0}{2} \times \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{A_f - A_s} \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (4)$$

$$\xi_s = \xi_{s0} - \frac{\xi_{s0}}{\xi_0} (\xi_0 - \xi)$$

که در آن، T، دما،  $A_s$  و  $M_s$  دماهای آغاز و  $A_f$  دمای پایان استحاله آستنیته و مارتنزیتی بوده و  $C_A$  و  $C_M$  شیب‌های منحنی‌های تنش-دما متناظر می‌باشند.  $\sigma_s^{cr}$  و  $\sigma_f^{cr}$ ، به ترتیب تنش بحرانی برای شروع و پایان تغییر فاز از آستنیته به مارتنزیت غیردوقلویی است که نمودار تغییراتشان نسبت به دما در شکل ۳ آورده شده است. همچنین  $\xi_0$  کسر حجمی مارتنزیت و  $\xi_{s0}$  کسر حجمی مارتنزیت ناشی از تنش، قبل از فرایند استحاله‌ی کنونی می‌باشد.

#### ۴- استخراج روابط حاکم بر ورق

در این مقاله، برای به دست آوردن روابط حاکم بر مسأله از اصل همیلتون (معادله‌ی ۸) استفاده شده است:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (۸)$$

که در آن،  $U$ ،  $V$  و  $K$  به ترتیب، انرژی کرنشی، کار نیروهای خارجی و انرژی جنبشی می‌باشند؛ به گونه‌ای که:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \delta \mathbf{e}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dz d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dx dy \quad (۹)$$

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q w_0 dx dy \quad (۱۰)$$

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 [(u_0 + z \dot{\phi}_x)(\delta u_0 + z \delta \dot{\phi}_x) + (v_0 + z \dot{\phi}_y)(\delta v_0 + z \delta \dot{\phi}_y) + w_0 \delta \dot{w}_0] dz dx dy \quad (۱۱)$$

که در آن،  $\Omega_0$  سطح لایه میانی است.

طبق تئوری ورق مندلین، میدان جابجایی را می‌توان به صورت رابطه (۱۲) تعریف نمود:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (۱۲)$$

$u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  جابجایی‌های لایه میانی بوده و  $\phi_x$  و  $\phi_y$  چرخش‌های مقطع ورق می‌باشند. در نتیجه، بردار کرنش دارای فرم رابطه (۱۳) خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}_k$$

$$- \begin{Bmatrix} k_s^{(k)} E_s^{(k)} \xi \varepsilon_L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}_k$$

که در آن،  $k_s$ ،  $E_s$ ،  $\xi$  و  $\varepsilon_L$  و  $Q_{ij}$  به ترتیب کسر حجمی الیاز حافظه‌دار، مدول یانگ الیاز حافظه‌دار، کسر حجمی مارتنزیت، حداکثر کرنش قابل بازیابی الیاز حافظه‌دار و مؤلفه‌های ماتریس سختی کاهش یافته است. زیرنویس‌های ۱ و ۲ مربوط به تنش‌های قائم و اندیس‌های ۴ تا ۶ مربوط به تنش‌های برشی هستند. بدیهی است برای محاسبه‌ی ماتریس سختی کاهش یافته‌ی لایه‌ی حاوی الیاز حافظه‌دار، در مختصات محلی (محورهای اصلی مواد)، می‌بایست خواص مکانیکی مؤثر لایه‌ی دارای الیاز حافظه‌دار از مجموعه روابط (۶) به دست آیند. از آنجا که الیاف SMA هم‌راستا با الیاف کامپوزیتی در نظر گرفته می‌شوند، لذا جهت محورهای اصلی مواد تغییری نمی‌کند. برای به دست آوردن خواص مکانیکی مؤثر لایه دارای الیاف SMA، از روابط ارائه شده توسط بیرمن استفاده می‌شود [۲۳] که در رابطه‌ی (۷) آورده شده است.

$$\begin{aligned} E_1 &= (E_{1,c})(k_c) + (E_s)(k_s) \\ E_2 &= (E_{2,c})(E_s) / [(k_c)(E_s) + (k_s)(E_{2,c})] \\ G_{12} &= G_{12,c} G_s / [(k_c)G_s + (k_s)G_{12,c}] \\ G_{13} &= G_{13,c} G_s / [(k_c)G_s + (k_s)G_{13,c}] \\ \nu_{12} &= \nu_{12,c}(k_c) + \nu_s(k_s) \\ \rho &= \rho_c(k_c) + \rho_s(k_s) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن زیرنویس‌های  $s$  و  $c$  به ترتیب مربوط به الیاز حافظه‌دار و ماده‌ی کامپوزیتی می‌باشند.

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[ (L_1 \delta D_0)^T (AL_2 + BL_3) D_0 + (L_3 \delta D_0)^T (BL_2 + DL_3) D_0 + (L_4 \delta D_0)^T kA^* (L_4 D_0) + (\delta D_0)^T I (\ddot{D}_0) - (\delta D_0)^T q \right] d\Omega_0 - (\delta D_0)^T F_c - \int_{\Gamma_\sigma} \left[ (\delta D_0)^T R^T F_B \right] dS \right\} dt = 0 \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)، از فرم ماتریسی نیروها و گشتاورها بر واحد طول ارائه شده در رابطه (۱۷) استفاده شده است:

$$N = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = (AL_2 + BL_3) D_0 \quad (17)$$

$$M = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = (BL_2 + DL_3) D_0$$

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = kA^* (L_4 D_0)$$

که در آن، از ضریب تصحیح برش مندلین ( $k = 5/6$ ) استفاده شده است [۲۴]. در روابط (۱۶) و (۱۷):

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$D_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}, q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, F_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

با استفاده از تعاریف رابطه (۱۴):

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz, Q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{iz} dz$$

رابطه (۸) پس از جای گذاری روابط (۹) تا (۱۱) و محاسبه برخی انتگرال‌های انرژی جنبشی، به فرم رابطه (۱۵) در می‌آید:

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[ N_{xx} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) + N_{yy} \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) + M_{xx} \frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial x} + M_{yy} \frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial y} + M_{xy} \left( \frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial x} \right) + Q_x \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \varphi_x \right) + Q_y \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \delta \varphi_y \right) - q \delta w_0 - F_c \delta w_{0,i} + I_0 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) + I_1 (\ddot{\varphi}_x \delta u_0 + \ddot{\varphi}_y \delta v_0 + \delta \varphi_x \ddot{u}_0 + \delta \varphi_y \ddot{v}_0) + I_2 (\ddot{\varphi}_x \delta \varphi_x + \ddot{\varphi}_y \delta \varphi_y) \right] dx dy \right\} dt = 0 \quad (15)$$

با نشان دادن بردار مؤلفه‌های جابجایی با  $D_0$ ، فرم ماتریسی رابطه (۱۵) به گونه زیر در می‌آید:

با استفاده از رابطه‌ی (۶) و اصلاح نیروها و گشتاورها بر واحد طول، معادله‌ی (۲۱) برای چندلایه‌ی تقویت شده با سیم‌های حافظه‌دار به صورت معادله‌ی (۲۲) درمی‌آید:

$$\delta(d_0^{(e)})^T \left\{ \int_{\Omega_0^e} [\hat{B}_1^T ((A^e \hat{B}_2 + \hat{B}^e \hat{B}_3) d_0^{(e)} - N^{S(e)}) + \hat{B}_3^T ((\hat{B}^e \hat{B}_2 + D^e \hat{B}_3) d_0^{(e)} - M^{S(e)}) + k \hat{B}_4^T A^* \hat{B}_4 d_0^{(e)} + \psi^T I \psi \ddot{d}_0^{(e)} - \psi^T q^e] dx dy \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_\sigma^e} [\psi^T R^T F_B^e] dS - \psi^T R^T f_i^e \right\} = 0 \quad (22)$$

و با مرتب‌سازی معادله‌ی (۲۲)، معادله‌ی (۲۳) به دست می‌آید.

$$(\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} + \mathbf{K}_{12})^{(e)} d_0^{(e)} + \mathbf{M}^{(e)} \ddot{d}_0^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (23)$$

که در آن:

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_0^e} \psi^T I \psi dx dy \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_{11}^e = \int_{\Omega_0^e} [\hat{B}_1^T (A^e \hat{B}_2 + \hat{B}^e \hat{B}_3)] dx dy \quad (25)$$

$$\mathbf{K}_{22}^e = \int_{\Omega_0^e} [\hat{B}_3^T (\hat{B}^e \hat{B}_2 + D^e \hat{B}_3)] dx dy \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_{12}^e = \int_{\Omega_0^e} (k \hat{B}_4^T A^* \hat{B}_4) dx dy \quad (27)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Omega_0^e} (\psi^T q^e) dx dy + \int_{\Omega_0^e} (\hat{B}_1^T N^{S(e)} + \hat{B}_3^T M^{S(e)}) dx dy \\ + \int_{\Gamma_\sigma^e} (\psi^T R^T f_i^e) dS \quad (28)$$

برای حل زمانی معادله‌ی (۲۳)، از روش انتگرال زمانی نیومارک استفاده شده و برنامه‌ی آن در نرم‌افزار متلب نوشته شده‌است. در ادامه، پس از اطمینان از صحت نتایج برنامه‌ی نوشته شده، به بررسی ویژگی‌های ارتعاشی ورق پرداخته خواهد شد.

### ۵- صحت‌گذاری نتایج کنونی

نتایج کنونی، بر پایه حل معادلات اجزاء محدود غیر خطی ارائه شده در نرم‌افزار نوشته شده توسط محققین در نرم‌افزار متلب، استخراج شده‌اند. جهت صحت‌گذاری نتایج برنامه‌ی

برای استخراج روابط حاکم بر ورق مورد نظر به روش اجزای محدود، از المان مستطیلی ۴ گرهی استفاده شده است. لذا پارامترهای جابجایی را می‌توان از طریق ماتریس توابع شکل  $\psi$ ، به مقادیر گره‌ای آنها مرتبط نمود:

$$\mathbf{D}_0^{(e)} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & 0 & \psi_4 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & \psi_1 & 0 & \dots & \psi_4 \end{pmatrix}_{5 \times 20} \begin{pmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ w_{01} \\ \phi_{x1} \\ \phi_{y1} \\ \vdots \\ u_{04} \\ v_{04} \\ w_{04} \\ \phi_{x4} \\ \phi_{y4} \end{pmatrix}^{(e)} \quad (19)$$

$$= \psi d_0^{(e)}$$

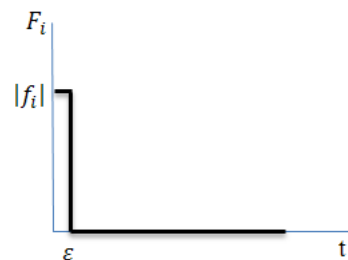
و با تعریف:

$$\hat{B}_1 = L_1 \psi, \quad \hat{B}_2 = L_2 \psi, \\ \hat{B}_3 = L_3 \psi, \quad \hat{B}_4 = L_4 \psi \quad (20)$$

معادله‌ی (۱۶) برای چند لایه بدون آلیاژ حافظه‌دار به صورت معادله‌ی (۲۱) در می‌آید [۲۵].

$$(\delta d_0^{(e)})^T \left\{ \int_{\Omega_0^e} [\hat{B}_1^T ((A^e \hat{B}_2 + \hat{B}^e \hat{B}_3) d_0^{(e)}) + \hat{B}_3^T ((\hat{B}^e \hat{B}_2 + D^e \hat{B}_3) d_0^{(e)}) + k \hat{B}_4^T A^* \hat{B}_4 d_0^{(e)} + \psi^T I \psi \ddot{d}_0^{(e)} - \psi^T q^e] dx dy \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_\sigma^e} [\psi^T R^T F_B^e] dS - \psi^T R^T f_i^e \right\} = 0 \quad (21)$$

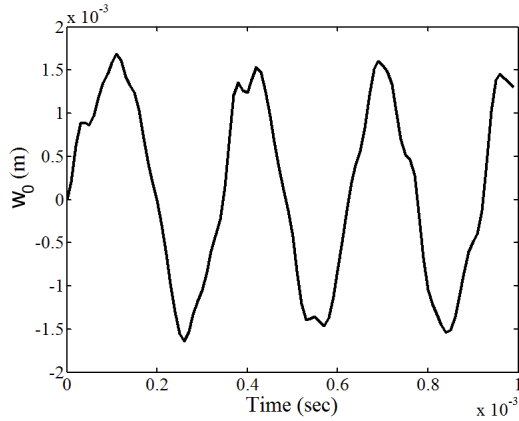
که در آن،  $f_i$  نیروی ضربه‌ای متمرکز وارد بر مرکز ورق است که تغییرات آن با زمان در شکل ۵ آورده شده است.



شکل (۵) نیروی ضربه‌ای وارد بر ورق



با جایگذاری پارامترهای موجود در جدول ۱ در رابطه‌ی (۳۱)، فرکانس طبیعی بدون بعد ورق محاسبه می‌گردد. در جدول ۲ مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی به دست آمده با نتیجه‌ی کاتو [۲۶] آورده شده‌است.



شکل (۶) نمودار تغییرات خیز گره میانی ورق نسبت به زمان

جدول (۲) مقایسه‌ی فرکانس طبیعی بدون بعد به دست آمده در تحقیق کنونی با نتایج پژوهشهای دیگر.

تحقیق کنونی	کاتو [۲۱]	اختلاف (%)
۱۲/۷۷	۱۲/۲۲۶	۴/۳

نتیجه‌ی ارائه شده توسط کاتو به روش نیمه تحلیلی و استفاده از تئوری برشی مرتبه اول ورق به دست آمد. خطای بین نتیجه‌ی ارائه شده توسط کاتو و نتیجه‌ی حاصل از تحقیق حاضر برابر ۴/۳٪ است و می‌تواند ناشی از ریز نبودن المان‌ها یا کم بودن جملات حل سری کاتو به وجود آمده باشد. از مقایسه‌ی نتایج در جدول (۲) بر می‌آید که برنامه‌ی کامپیوتری نوشته شده دارای اعتبار کافی بوده و می‌توان از آن برای ورق‌های دیگر با شرایط مختلف استفاده نمود.

## ۶- بررسی و بحث نتایج

کارهای انجام شده در زمینه به کارگیری مدل‌های تئوری برای ورق‌های کامپوزیتی دارای سیم‌های حافظه‌دار بسیار محدود می‌باشند. در اغلب این پژوهشها، تنها از مفهوم ابتدایی تنش بازیافتی [۱۸-۲۰] یا هم‌ارز سازی با مدل‌های ویسکو الاستیک [۲۱] استفاده شده است. تغییرات موضعی (توزیع غیر یکنواخت درون صفحه‌ای و عرضی) و لحظه‌ای کسر حجمی فاز مارتنزیت در هیچ یک از پژوهش‌های قبلی مورد توجه قرار نگرفته و از پارامترهای جانبی (مانند تنش

نوشته شده، نتایج تحلیل ارتعاشی یک ورق کامپوزیت دارای تکیه‌گاه‌های ساده با ویژگی‌های مندرج در جدول ۱ تحت بار ضربه‌ای متمرکز به اندازه‌ی ۴/۵ کیلو نیوتن به دست آمده و با نتایج کاتو [۲۶] مقایسه گردیده است. کاتو [۲۶] برای تحلیل ورق مزبور که یک ورق ضخیم به حساب می‌آید، از دو تئوری کلاسیک و برشی مرتبه اول استفاده کرد. نتایج حاصل از تحلیل تئوری برشی مرتبه اول او مطابقت خوبی با نتایج کار ردی [۲۷] داشته در صورتی که نتایج تئوری کلاسیک وی، دقت مناسبی ندارند. نتایج مربوط به تحلیل کنونی در شکل ۶ آورده شده‌اند که از این شکل، فرکانس طبیعی محاسبه می‌گردد.

جدول (۱) ویژگی‌های ورق کامپوزیتی مورد بررسی [۲۶]

ابعاد ورق	$a=b=0.1m, a/h=10$
زوایای لایه چینی	[0/90/90/0]
خصوصیات کانیکی	$E_1=127 \text{ Gpa}, E_1/E_2=25, \nu_{12}=0.25$ $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.2$

همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، ارتعاشات ورق پس از حذف بار، بدون میرایی ادامه پیدا می‌کنند. میزان خیز متناظر با قله‌ها به دلیل روی هم قرار گرفتن قله‌ها یا دره‌های مدهای ارتعاشی دیگر می‌باشد. برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی از روی نمودار فوق، ابتدا زمان بین دو قله‌ی مجاور، که برابر دوره‌ی تناوب اول می‌باشد، به دست می‌آید (معادله‌ی (۲۹)):

$$T = t_b - t_a = (0.68 - 0.41) * 10^{-3} = 0.27 * 10^{-3} \quad (29)$$

و فرکانس طبیعی اول ورق از رابطه ۳۰ به دست می‌آید:

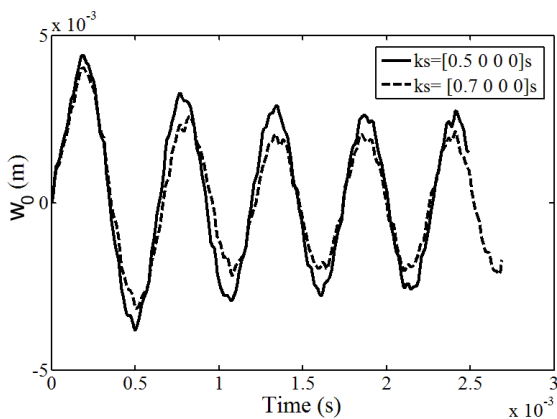
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.27 * 10^{-3}} = 23.2 * 10^3 \text{ (rad / s)} \quad (30)$$

برای مقایسه‌ی فرکانس طبیعی به دست آمده با نتایج کاتو، از فرکانس طبیعی بی‌بعد که از رابطه‌ی ۳۱ محاسبه می‌شود استفاده شده است:

$$\Omega = \omega a^2 (\rho / h^2 E_2)^{1/2} \quad (31)$$

۶-۱- اثر کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار

تحلیل اولیه برای ورق کامپوزیت تقویت شده برای کسر حجمی ۵۰ درصد آلیاژ حافظه‌دار در لایه‌های بالایی و پایینی ورق چندلایه انجام شد و نتایج آن با نتایج تحلیل ورق کامپوزیت با کسر حجمی صفر مقایسه گردید. در این قسمت با تغییر کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار به ۰/۷ در لایه‌های مشابه، اثر این پارامتر نیز بر ارتعاشات ورق کامپوزیت هیبرید بررسی شده است. نتایج این تحلیل همراه نتایج تحلیل اولیه در شکل ۸ آورده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، دامنه‌ی ارتعاشات ورق با افزایش کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار کاهش یافته است؛ چراکه افزایش کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار موجب تقویت سازه و بزرگتر شدن ماتریس استحاله می‌گردد.



شکل (۸) تأثیر کسر حجمی آلیاژ حافظه‌دار بر ارتعاشات ورق کامپوزیت هیبرید

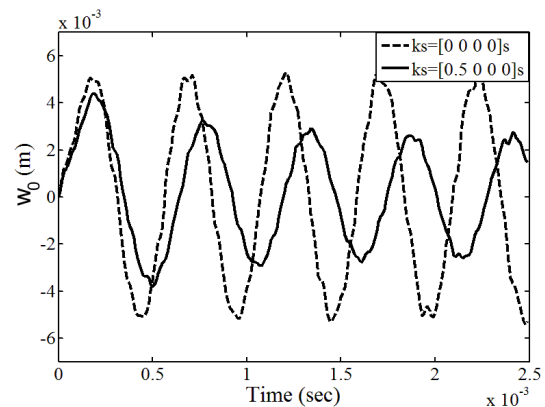
تغییرات فرکانس طبیعی با زمان از دیگر نتایج این تحلیل است. برای روشن‌تر شدن این موضوع، با استفاده از نمودار شکل‌های ۷ و ۸ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب زمان برای ورق‌های مختلف مورد بررسی رسم گردیده‌اند (شکل ۹).

بازیافتی) بدون استفاده از رابطه حاکم بر سیم کامپوزیتی استفاده شده است. لذا مرجعی مناسب برای مقایسه نتایج مرتبط با اثر سیم‌های حافظه‌دار وجود ندارد. در این قسمت تأثیر وجود آلیاژ حافظه‌دار نیتینول در میرایی ورق کامپوزیت شیشه‌اپوکسی با ویژگی‌ها و شرایط مندرج در جدول ۳، تحت نیروی ضربه‌ای متمرکز ۴/۵ کیلونیوتن در زمان ۰/۰۰۰۱ ثانیه در نظر گرفته شده و در ادامه اثر پارامترهای مختلف بر ویژگی‌های ارتعاشی این ورق مورد بررسی قرار گرفته است.

همانگونه که در شکل ۷ مشاهده می‌شود دامنه‌ی ارتعاشات ورق تقویت شده نسبت به ورق اولیه کاهش یافته و میرایی ارتعاشات ورق در هر نوسان مشهود می‌باشد. یعنی وجود سیم‌های حافظه‌دار نه تنها موجب تقویت ورق می‌گردد، بلکه به عنوان یک میراگر عمل کرده و موجب میرایی ارتعاشات می‌شود.

جدول ۳- خصوصیات ورق کامپوزیتی تقویت شده با آلیاژ حافظه‌دار

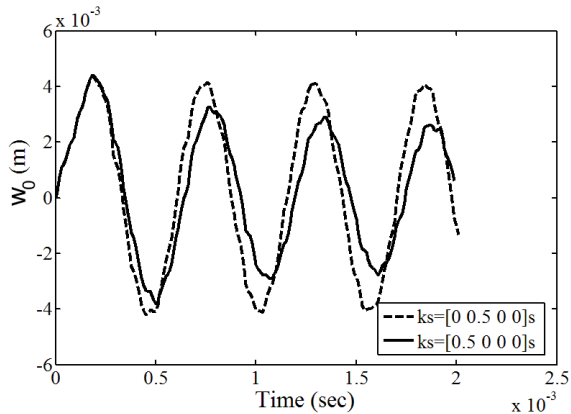
ویژگی	مقادیر یا مشخصه مرتبط
ابعاد ورق	$a = b = 0.1m$ $a/h = 20$
ویژگی‌های مواد کامپوزیت	$E_1 = 40Gpa, E_1/E_2 = 5, \nu_{12} = 0.26$ $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$ $G_{23}/E_2 = 0.375$
لایه‌چینی	$[0/90/0/90]_{2S}$
ویژگی‌های مواد نیتینول	$E_A = 67Gpa, E_M = 26.3Gpa, G = 29.4Gpa, \nu = 0.3$ $\sigma_{s,cr} = 100Mpa, \sigma_{f,cr} = 170Mpa, \rho = 6450kg/m^3$ $C_M = 8Mpa/^\circ C, C_A = 13.8Mpa/^\circ C$
آرایش کسر حجمی نیتینول	$[0.5/0_3]_S$



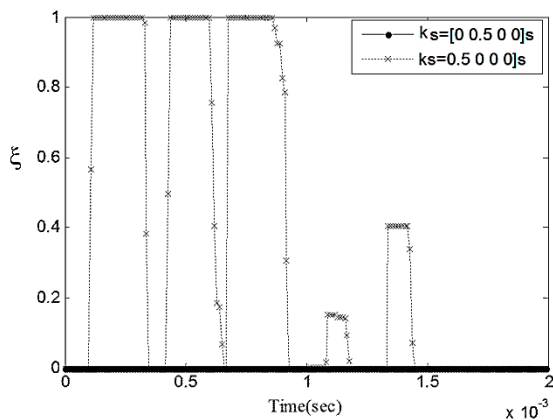
شکل (۷) ارتعاشات ورق کامپوزیت تقویت شده با خصوصیات

مندرج در جدول ۳

دارد، تابع تنش و کرنش است و کرنش‌ها در هر گره تابع فاصله آن گره تا صفحه‌ی خنثی می‌باشد. همانطور که در نمودار شکل ۱۱ مشاهده می‌شود آلیاژ حافظه‌دار در حالتی که در فاصله‌ی کمتری از صفحه‌ی خنثی قرار داده شده‌است تغییر فاز نداده و مدام در فاز کاملاً آستنیت با کسر حجمی مارتنزیت صفر قرار دارد.

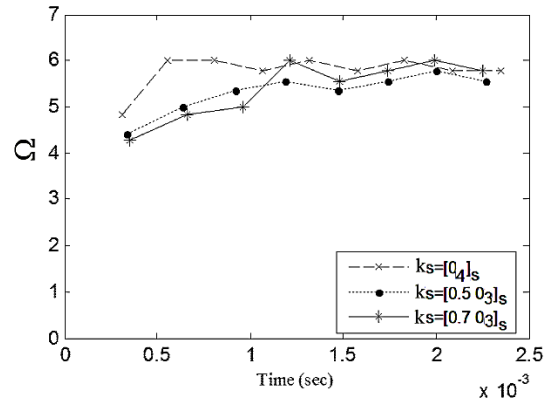


شکل (۱۰) تأثیر فاصله قرارگیری سیم‌های حافظه‌دار در ارتعاشات ورق کامپوزیت



شکل (۱۱) تأثیر موقعیت قرارگیری سیم‌های حافظه‌دار در تغییرات کسر حجمی مارتنزیت

در تحلیل بعدی برای گنجاندن سیم‌های حافظه‌دار در صفحه‌ی خنثی یک ورق کامپوزیتی ۷ لایه با ویژگی‌های مندرج در جدول ۳ و زوایای قرارگیری [0/90/0/0/0/90/0] در نظر گرفته شده‌است. همانطور که از نمودار شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، وجود آلیاژ حافظه‌دار در صفحه‌ی خنثی هیچ تأثیری در میرایی



شکل (۹) تغییرات فرکانس طبیعی  $\Omega = \omega a^2 (\rho/h^2 E_2)^{1/2}$  برای کسر حجمی‌های متفاوت

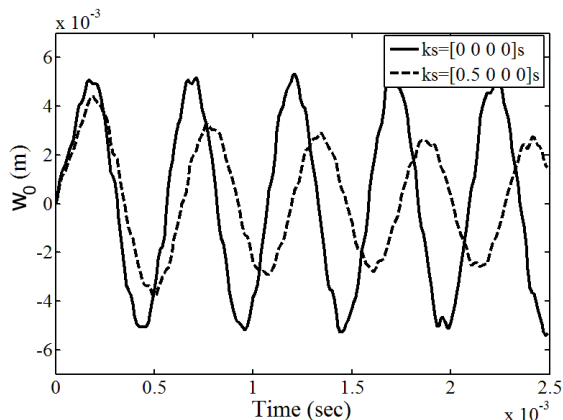
همانطور که مشاهده می‌شود برای ورق کامپوزیت بدون آلیاژ حافظه‌دار، فرکانس طبیعی بدون بعد حول یک مقدار ثابت نوسان می‌کند؛ وجود آلیاژ حافظه‌دار موجب افزایش فرکانس طبیعی با گذشت زمان می‌گردد تا زمانی که حول یک مقدار ثابت نوسان کند. این تغییرات در مورد کسر حجمی ۰/۷ برای آلیاژ حافظه‌دار مشهودتر می‌باشد.

## ۲-۶- اثر موقعیت قرارگیری سیم‌های حافظه‌دار در ورق کامپوزیت

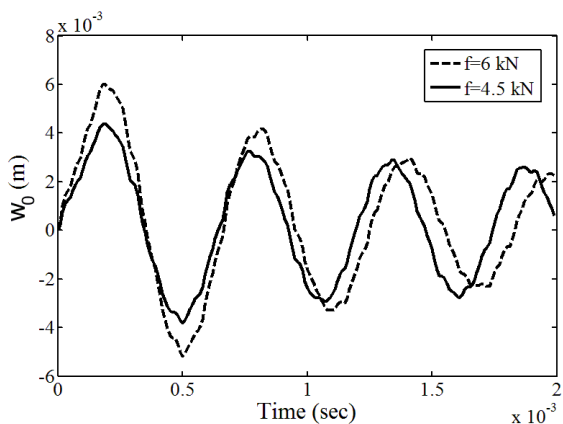
تا به اینجا آلیاژهای حافظه‌دار در دورترین لایه‌ها از صفحه‌ی خنثی گنجانده شده بودند. در این بخش برای بررسی تأثیر موقعیت قرارگیری سیم‌های حافظه‌دار در پاسخ ارتعاشی ورق، ابتدا در ورق کامپوزیتی با ویژگی‌های مندرج در جدول ۳ این سیم‌ها به یک لایه نزدیکتر به صفحه‌ی خنثی منتقل می‌شوند؛ به عبارتی فاصله‌ی قرارگیری این سیم‌ها از صفحه‌ی خنثی کاهش می‌یابد. نمودار مربوط به پاسخ ورق در این حالت در شکل ۱۰ آورده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود دامنه‌ی ارتعاشات در این حالت ثابت باقی می‌ماند و سیم‌های حافظه‌دار موجب میرایی ارتعاشات به طور قابل توجهی نمی‌شوند. دلیل این امر در رابطه‌ی (۶) نهفته است. بدین گونه که کسر حجمی مارتنزیت در سیم‌های حافظه‌دار که در ماتریس استحاله نقش تعیین کننده‌ای

برای مقایسه‌ی این تحلیل با تحلیل مشابه تحت نیروی ۴/۵ کیلونیوتن، نتایج دو بررسی در شکل ۱۵ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در ابتدا نسبت خیزه گره میانی در دو تحلیل مشابه نسبت نیروی اعمالی می‌باشد؛ در صورتی که با وارد کردن آلیاژ حافظه‌دار خواص به صورت غیرخطی تغییر کرده و نسبت اولیه ثابت باقی نمی‌ماند.

در شکل ۱۶ تغییرات فرکانس طبیعی برحسب زمان تحت نیروهای ۴/۵ کیلونیوتن و ۶ کیلونیوتن نشان داده شده است. برخلاف آنچه انتظار می‌رود، فرکانس طبیعی با تغییر نیروی اعمالی تغییر کرده است؛ در صورتی که فرکانس طبیعی فقط به خواص ماده وابسته است. این موضوع به دلیل تغییر خواص ماده با گذشت زمان است که با وارد عمل شدن ویژگی‌های غیرخطی آلیاژ حافظه‌دار صورت می‌گیرد.

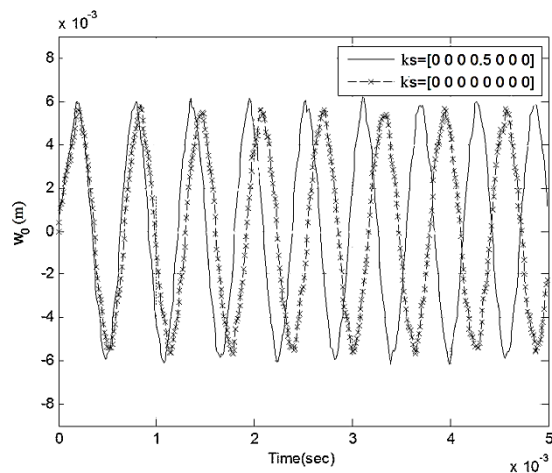


شکل (۱۴) تأثیر تغییرات فاز آلیاژ حافظه‌دار بر پاسخ ارتعاشی ورق کامپوزیتی تحت بار ضربه‌ای ۶ کیلونیوتن

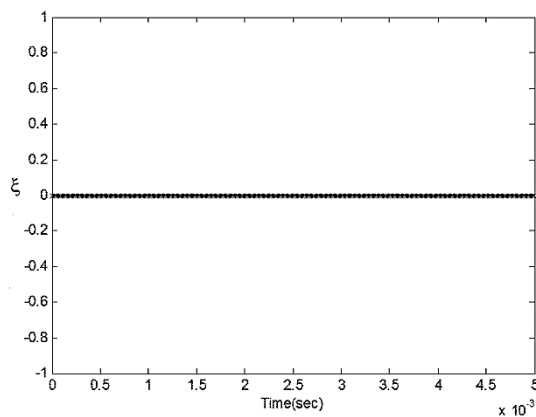


شکل (۱۵) اثر نیروی اعمالی بر ارتعاشات غیرخطی ورق کامپوزیت تقویت شده

ارتعاشات این ورق نداشته و تنها با تغییر سفتی ورق دامنه‌ی ارتعاشات از ابتدای بارگذاری کاهش یافته و بدون تغییر در طول بارگذاری ادامه پیدا کرده است. همچنین کسر حجمی مارتنزیت طبق نمودار شکل ۱۳ در تمام طول تحلیل صفر باقی می‌ماند.



شکل (۱۲) تأثیر وجود آلیاژ حافظه‌دار در صفحه‌ی خنثی بر روی پاسخ ارتعاشی ورق

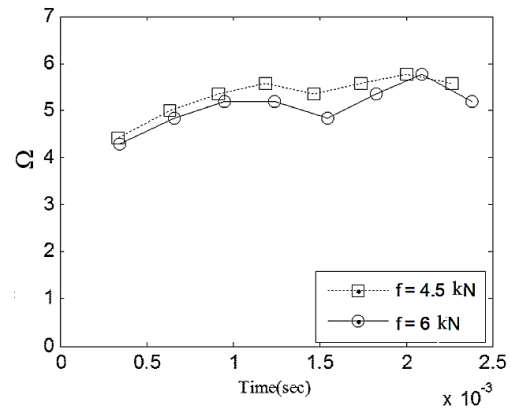


شکل (۱۳) تغییرات کسر حجمی مارتنزیت در صفحه‌ی خنثی

### ۳-۶ اثر اندازه‌ی نیروی اعمالی

در مسائل خطی تغییرات خیز متناسب با تغییرات نیروی اعمالی تغییر می‌کند. ورق مورد بررسی در این تحقیق دارای خواص غیر خطی می‌باشد. برای درک این موضوع تحلیل جدیدی برای ورق با همان ویژگی‌های جدول ۳ تحت نیروی ۶ کیلونیوتن با همان بازه‌ی زمانی اعمال بار، انجام گرفته است. تأثیر آلیاژ حافظه‌دار تحت نیروی ضربه‌ای ۶ کیلونیوتن در شکل ۱۴ آورده شده است.

- [10] Reddy J.N., Theory and analysis of elastic plates, Philadelphia, PA: Taylor & Francis, 1999.
- [11] Paiey M., Aboudi J., Micromechanical analysis of composites by the generalized cells model, *Mechanics of Materials*, Vol. 14, 1992, pp. 127–139.
- [12] Aboudi J., Micromechanical analysis of composites by the method of cells, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, 1996, pp. 83–91.
- [13] Lagoudas D.C., Bo Z., Qidwai M. A., A unified thermodynamic constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites, *Mechanics of Composite Materials and Structures*, Vol. 3, 1996, pp. 153–179.
- [14] Lagoudas D.C., Bo Z., Qidwai M.A., Micromechanics of active metal matrix composite with shape memory alloy fibers, In: Voyiadjis, G.Z., Ju, J.W. (Eds.), *Inelasticity and Micromechanics of Metal Matrix Composite*. Elsevier, New York, 1994, pp. 163–190.
- [15] Yongsheng R., Shuangshuang S., Large amplitude flexural vibration of the orthotropic composite plate embedded with shape memory alloy fibers, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 20, 2007, pp. 415–424.
- [16] Brinson L.C., One-dimensional thermo-mechanical constitutive relations for shape memory alloy: Thermo-mechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable, *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, Vol. 4, 1993, pp. 229–242.
- [17] Hariri M., John S., Effect of shape memory alloy actuation on the dynamic response of polymeric composite plates, *Composites– part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 39, 2008, pp. 769–776.
- [18] Shokuhfar A., Khalili S.M.R., Ashenai Ghasemi F., Malekzadeh K., Raissi S., Analysis and optimization of smart hybrid composite plates subjected to low-velocity impact using the response surface methodology (RSM), *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, 2008, pp. 1204–1212.
- [19] Zak A.J., Cartmell M.P., Ostachowicz W.M., A sensitivity analysis of the dynamic performance of a composite plate with shape memory alloy wires, *Composite Structures*, Vol. 60, 2003, pp. 145–157.
- [20] Zhang R.-X., Ni Q.Q., Masuda A., Yamamura T., Iwamoto M., Vibration characteristics of laminated composite plates with embedded shape memory alloys, *Composite Structures*, Vol. 74, 2006, pp. 389–398.
- [21] Birman V., Rusnak I., Vibrations of plates with super elastic shape memory alloy wires, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 78, 2013, pp. 223–237.



شکل (۱۶) تأثیر نیروی اعمالی ورق بر تغییرات فرکانس طبیعی، بر

حسب زمان (به دلیل ویژگی‌های غیرخطی مواد).

### مراجع:

- [1] Lau K., Vibration characteristics of SMA composite beams with different boundary conditions, *Material and Design*, Vol. 23, 2002, pp. 741–749.
- [2] Baz A., Imam K., McCoy J., Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 140, 1990, pp. 437–456.
- [3] Park J., Kim J., Moon S., Vibration of thermally post-buckled composite plates embedded with shape memory alloy fibers, *Composite Structures*, Vol. 63, 2004, pp. 179–188.
- [4] Birman V., Shape memory elastic foundation and supports for passive vibration of composite plates, *International journal of Solids and Structures*, Vol. 45, 2008, pp. 320–335.
- [5] Birman V., Review of mechanics of shape memory alloy structures, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, 1997, pp. 629–645.
- [6] Jing Z., The Constitutive relation of shape memory alloy and the analysis by the finite element method of shape memory alloy reinforced composite laminated plates, PhD Thesis, Huazhong University of Science and Technology, 1999, [In Chinese].
- [7] Pietrzakowski M., Natural frequency modification of thermally activated composite plates, *Mécanique & Industries*, Vol. 1, 2000, pp. 313–320.
- [8] Masudaa A., Noori M., Optimization of hysteretic characteristics of damping devices based on pseudo-elastic shape memory alloys, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, 2002, pp. 1375 – 1386.
- [9] Gilat R., Aboudi J., Dynamic response of active composite plates: shape memory alloy fibers in polymeric/ metallic matrices, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, 2004, pp. 5717–5731.

- [22] Bekker A., Brinson L.C., Phase diagram based description of the hysteresis behavior of shape memory alloys, *Acta Materialia*, Vol. 46, 1998, pp. 3649-3665.
- [23] Birman V., Chandrashekhara K., Sain S., An approach to optimization of shape memory alloy hybrid composite plates subjected to low-velocity impact, *Composite Part B*, Vol. 27, 1996, pp. 439-446.
- [24] Reddy J.N., Theory and analysis of elastic plates and shells, 2nd edition, CRC Press, 2006.
- [25] Shariyat M., Moradi M., Samaee S., Nonlinear finite element eccentric low-velocity impact analysis of rectangular laminated composite plates subjected to in-phase/anti-phase biaxial preloads, *Journal of Solid mechanics*, 2012, Vol. 2, pp. (in press).
- [26] Qatu M.S., Vibration of laminated shells and plates, Elsevier Academic Press, 2004.
- [27] Reddy J.N., Energy principles and variational methods in applied mechanics, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 2002.