بهار ۱۳۹۲/ سال ششم/ شماره ویژه اول

فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

حل عددی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای چند لایه با لایه پیزوالکتریک

عبدالمجید کنی[1,*]، اکبر علی‌بیگلو[2]

* نویسنده مسئول: majid.kani@yahoo.com

چکیده

در این مقاله رفتار ارتعاشی پوسته‌های چندلایه که سطوح داخلی و خارجی آنها مجهز به لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک می‌باشد بررسی شده است. ابتدا پوسته چندلایه با تکیه‌گاه‌های ساده به روش تحلیلی بررسی و نتایج حاصل، با نتایج به دست آمده توسط سایر محققین مقایسه شده است. آنگاه حل عددی به روش (GDQ) برای پوسته با لایه‌های پیزوالکتریک و تکیه‌گاه‌های ساده، با حل تحلیلی آن مقایسه شده و در ادامه انواع شرایط تکیه‌گاهی مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از معادلات حرکت، معادلات بنیادین و روابط کرنش- جابجایی، معادلات حالت- فضا حاصل می‌شود که این معادلات با استفاده از تقریب لایه مجزا، به معادلات حالت- فضا با ضرایب ثابت تبدیل خواهند شد. سپس با استفاده از حل این معادلات می‌توان فرکانس‌های طبیعی پوسته در حالت تکیه‌گاه ساده را به دست آورد. در صورتی که تکیه‌گاه‌ها غیر ساده باشند، حل معادلات دیفراسیل حالت- فضا به روش تحلیلی امکان‌پذیر نبوده و باید از روش‌های عددی کمک گرفت. روش یک چهارم تفاضلی[1] روش عددی متداولی است که با تعداد کم نقاط نمونه، می‌توان به جواب دقیق دست یافت. با استفاده از روش dq ، معادلات دیفرانسیل حالت- فضا حل شده و در نهایت با اعمال شرایط عاری از تراکشن سطوح بالا و پایین، می‌توان به فرکانس‌های طبیعی دست یافت. در نهایت تأثیر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک، نسبت ضخامت لایه کامپوزیت به لایه پیزوالکتریک و نسبت شعاع میانی به ضخامت در رفتار ارتعاشی پوسته مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی

پوستهٔ استوانه‌ای، فرکانس طبیعی، روش دیفرانسیل کوادراچر، معادلات فضا- حالت، پیزوالکتریک

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی‌مهندسی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران.

۲- دانشیار، دانشکده فنی‌مهندسی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران.

۱- مقدمه

با توجه به افزایش روزافزون کاربرد مواد کامپوزیتی و نیز پیشرفت علوم مکاترونیک، بررسی مواد کاربردی در این علوم ضروری و کاربردی به نظر می‌رسد. به واسطه اثر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک، مواد پیزوالکتریک بطور گسترده‌ای در علوم مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. سازه‌های استوانه‌ای پیزوالکتریک اعم از توپر و یا توخالی در وسایل ارتعاشی(Resonator)، انژکتور سوخت، تلسکوپ‌های با دقت بالا، الکترواپتیک و غیره کاربرد دارند.

از آنجایی که همواره مبحث ارتعاشات و فرکانس‌های طبیعی از مباحث مهم در تحلیل مواد مختلف بشمار می-رود، در این مقاله به بررسی ارتعاشات پوسته کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک پرداخته شده است. با توجه به اینکه حل تحلیلی سه بعدی فقط در حالت تکیه‌گاهی ساده امکان‌پذیر می‌باشد، لذا به منظور بررسی شرایط تکیه‌گاهی مختلف از روش عددی دیفرانسیل کوادراچر (dq)استفاده شده است. در سالهای اخیر استفاده از روش عددی (dq) در تحلیل مسائل مختلف رواج یافته است. این روش با به کارگیری تعداد نقاط کم به منظور شبکه‌بندی سازه مورد نظر، جواب-هایی با دقت قابل قبول ارائه می‌دهد. اولین بار Bert و همکارانش از این روش در تحلیل ورق کامپوزیتی استفاده کردند [۱].

پوسته مورد نظر بصورت بسته می‌باشد و با توجه به اینکه در شکل مدهای مختلف امکان تغییر سطح مقطع پوسته مورد نظر از حالت تقارن محوری وجود دارد، لذا در بدست آوردن معادلات مربوطه، حالت تقارن محوری پوسته در نظر گرفته نشده و معادلات با در نظر گرفتن تغییرات نسبت به بدست آمده‌اند. ماتریس سختی پوسته موردنظر ارتوتروپیک (Orthotropic) و دارای ۹ مؤلفه مستقل می-باشد. لایه پیزوالکتریک داخلی حسگر (Sensor) و لایه خارجی عملگر (Actuator) می‌باشد. در بدست آوردن معادلات مربوطه از روابط الاستیسیته سه بعدی استفاده شده است. به این ترتیب که از معادلات تنش- جابجایی و معادلات حرکت، معادلات حالت- فضا بدست آمده‌اند.

درسال ۲۰۰۷، علی-بیگلو و شاکری، ارتعاشات پنل کامپوزیتی که معادلات آن بصورت معادلات حالت- فضا استخراج شده است را به روش دیفرانسیل کوادراچر تعمیم یافته (GDQ) تحلیل نموده اند[۲]. در سال ۲۰۰۴ نیز Chen و همکارانش ارتعاشات آزاد سه بعدی یک مخزن استوانه‌ای پیزوالکتریک که حاوی سیال تراکم‌پذیری می‌باشد را با استفاده از روش حالت- فضا بررسی کرده‌اند[۳]

در زمینه بررسی سازه‌های تشکیل شده از کامپوزیت و پیزوالکتریک، در سال ۲۰۰۳ Yun و همکارانش مدلی برای کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیت با لایه¬های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه نموده‌اند که در آن از معادلات دینامیکی غیرخطی استفاده شده است[۴]

Santosو همکارانش در سال ۲۰۰۷ مدل المان محدودی برای تحلیل خمش و ارتعاشات آزاد پوسته کامپوزیت با لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه نمودند]۵[. در سال ۲۰۰۸ نیز علی‌بیگلو و معدولیت، ورق کامپوزیت با لایه‌های پیزوالکتریک روی دو سطح جانبی را از لحاظ استاتیکی مورد بررسی قرار داده‌اند [۶].

طی بررسی‌های انجام شده مشخص گردید که تحلیل ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت به همراه لایه‌های پیزوالکتریک، تاکنون ارائه نشده است، لذا در مقاله حاضر سعی بر معرفی این رفتار شده است.

۲- معادلات حالت- فضا

برای تحلیل پوسته موردنظر از روابط الاستیسیته سه بعدی استفاده شده است. برای لایه های کامپوزیت روابط تنش-کرنش عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_r\\ \tau_{r\theta}\\ \tau_{xr}\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_r\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{xr}\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix} \qquad (۱)$$

و معادلات حرکت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{x\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial r}+\dfrac{\tau_{xr}}{r}=\rho\dfrac{\partial^2u_x}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{x\theta}}{\partial x}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{2\tau_{r\theta}}{r}=\rho\dfrac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial x}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}=\rho\dfrac{\partial^2u_r}{\partial t^2} \end{cases} \quad (۲)$$

و روابط کرنش- جابجایی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x} && \gamma_{xr}=\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial x} \\ &\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r} && \gamma_{r\theta}=-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} \\ &\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} && \gamma_{x\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (۳)$$

و همچنین معادلات بنیادین برای لایه‌های پیزوالکتریک عبارت است از [۶]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_r\\ \tau_{r\theta}\\ \tau_{xr}\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\ C_{21}&C_{22}&C_{23}&0&0&0\\ C_{31}&C_{32}&C_{33}&0&0&0\\ 0&0&0&C_{44}&0&0\\ 0&0&0&0&C_{55}&0\\ 0&0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_r\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{xr}\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix} \quad (۱-۴)$$

$$-\begin{bmatrix}0&0&e_1\\ 0&0&e_2\\ 0&0&e_3\\ 0&e_4&0\\ e_5&0&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_\theta\\ E_r\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_\theta\\ D_r\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&e_5&0\\ 0&0&0&e_4&0&0\\ e_1&e_2&e_3&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_r\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{xr}\\ \gamma_{x\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_1&0&0\\ 0&\eta_2&0\\ 0&0&\eta_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_\theta\\ E_r\end{Bmatrix} \quad (۲-۴)$$

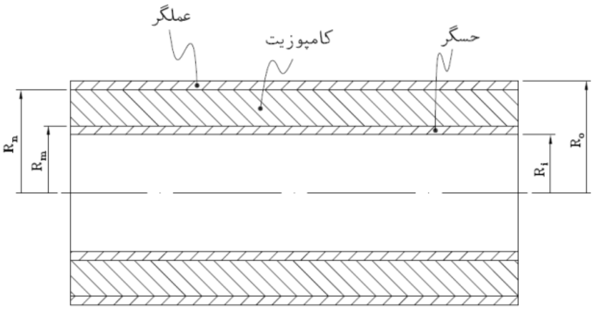
روابط ماکسول[۶]

$$\begin{aligned} &\mathrm{Div}\,D=0\Rightarrow\frac{\partial D_r}{\partial r}+\frac{D_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial D_x}{\partial x}=0 \\ &E_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\qquad E_r=-\frac{\partial\psi}{\partial r}\qquad E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (۵)$$

در روابط فوق و به ترتیب نشان‌دهنده تنش‌های نرمال و برشی، و کرنش‌های محوری و برشی، ضرایب ماتریس سختی، بردار شدت جریان الکتریکی، ثابت پیزوالکتریک، بردار جابجایی یا القاء الکتریکی، ثابت دی‌الکتریک، پتانسیل الکتریکی و چگالی می‌باشند.

سطوح بالا و پایین پوسته در بررسی ارتعاشی، عاری از بار مکانیکی و الکتریکی می‌باشند، لذا مطابق شکل (۱)، شرایط مکانیکی حاکم در این تحلیل بصورت زیر می‌باشد[۶]

$$\sigma_r=\tau_{xr}=\tau_{r\theta}=0 \qquad \text{در } r=R_i\,\&\,R_o \quad (۶)$$



شکل (۱) مدل شماتیک از پوسته مورد نظر

شرایط مرزی الکتریکی با توجه به اینکه لایه داخلی حسگر و لایه خارجی عملگر هستند، در سطح داخلی بصورت مدار باز (open-circuit) و در سطح خارجی بصورت اتصال کوتاه (short-circuit) می‌باشد[۶] یعنی:

$$\begin{aligned} &\psi=0 && \text{در } r=R_o \\ &D_r=0 && \text{در } r=R_i \end{aligned} \quad (۷)$$

در دو انتهای پوسته موردنظر شرایط تکیه‌گاهی بصورت زیر می‌باشد[۲]

$$\begin{aligned} &u_r=u_\theta=\sigma_x=0 && \text{ساده} \\ &u_r=u_\theta=u_x=0 && \text{گیردار} \\ &\tau_{xr}=\tau_{x\theta}=\sigma_x=0 && \text{آزاد} \end{aligned} \quad (۸)$$

همچنین در راستای طولی، شرط مرزی الکتریکی بصورت اتصال کوتاه و بدون هیچگونه پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته شده است. بنابراین:

$$\psi=0 \qquad \text{در } x=0\,\&\,L \quad (۹)$$

در

به منظور ارضاء شرایط هندسی در راستای ، تنش، پتانسیل الکتریکی و جابجایی‌ها بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۶]

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \bar{\sigma}_r(r,x)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
u_r &= \bar{u}_r(r,x)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
u_\theta &= \bar{u}_\theta(r,x)\mathrm{Sin}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
u_x &= \bar{u}_x(r,x)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
\tau_{xr} &= \bar{\tau}_{xr}(r,x)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
\tau_{r\theta} &= \bar{\tau}_{r\theta}(r,x)\mathrm{Sin}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
D_r &= \bar{D}_r(r,x)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
\psi &= \bar{\psi}(r,x)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در روابط فوق $\beta_m = 1,2,...$

معادلات ۲، ۳و ۵ معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر نسبت به r هستند. با استفاده از فرض سونگ [۲ و ۸] مطابق روابط زیر که برای لایه k ام نوشته شده‌اند و با توجه به اینکه ، با تقسیم هر لایه به لایه‌های نازک، این معادلات به معادلاتی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند.

$$\eta_k = r - R_k \tag{۱۱}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_k}(1-\xi_k) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_k^2}(1-2\xi_k) \tag{۱۲}$$

با ترکیب معادلات فوق و جایگذاری روابط (۱۰) در معادلات به دست آمده، در نهایت دستگاه معادلات پاره‌ای با ضرایب ثابت بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\delta = G'\delta \tag{۱۳}$$

که در رابطه فوق برای پوسته کامپوزیت:

$$\delta = \begin{bmatrix}\sigma_r & \tau_{xr} & \tau_{r\theta} & u_r & u_x & u_\theta\end{bmatrix}^T \tag{۱۴}$$

و برای پوسته پیزوالکتریک:

$$\delta = \begin{bmatrix}\sigma_r & \tau_{xr} & \tau_{r\theta} & u_r & u_x & u_\theta & D_r & \psi\end{bmatrix}^T \tag{۱۵}$$

ماتریس دارای مؤلفه‌هایی از مشتقات x و r می‌باشد.

۳- حل دقیق

به منظور ارضاء شرایط مرزی در حالت تکیه‌گاهی ساده در روابط (۱۰)، تنش، پتانسیل الکتریکی و جابجایی‌ها بصورت زیر در نظر گفته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_r(r,x) &= \sigma_r(r)\mathrm{Sin}(P_n x)\\
\bar{u}_r(r,x) &= u_r(r)\mathrm{Sin}(P_n x)\\
\bar{u}_\theta(r,x) &= u_\theta(r)\mathrm{Sin}(P_n x)\\
\bar{u}_x(r,x) &= u_x(r)\mathrm{Cos}(P_n x)\\
\bar{\tau}_{xr}(r,x) &= \tau_{xr}(r)\mathrm{Cos}(P_n x)\\
\bar{\tau}_{r\theta}(r,x) &= \tau_{r\theta}(r)\mathrm{Sin}(P_n x)\\
\bar{D}_r(r,x) &= D_r(r)\mathrm{Sin}(P_n x)\\
\bar{\psi}(r,x) &= \psi(r)\mathrm{Sin}(P_n x)
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

$P_n = \frac{n\pi}{L}$ و $n = 1,2,...$ با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱۳)، دستگاه معادلات خطی مرتبه اول با ضرائب ثابت به فرم زیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\delta = G\delta \tag{۱۷}$$

حل کلی معادله (۱۷) برای لایه K ام بصورت زیر می‌باشد

$$\bar{\delta}(\xi_K) = \exp[G^K h_K]\bar{\delta}(\xi_{K-1}) \tag{۱۸}$$

به همین ترتیب برای لایه K+1 ، می‌توان نوشت:

$$\bar{\delta}(\xi_{K+1}) = \exp[G^{K+1} h_{K+1}]\bar{\delta}(\xi_K) \tag{۱۹}$$

با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه فوق:

$$\bar{\delta}(\xi_{K+1}) = \exp[G^{K+1} h_{K+1}]\exp[G^K h_K]\bar{\delta}(\xi_{K-1}) \tag{۲۰}$$

و اگر این روند برای تمام لایه‌ها ادامه یابد، برای پوسته کامپوزیت می‌توان نوشت:

$$\bar{\delta}(R_n) = T_c\bar{\delta}(R_m) \tag{۲۱}$$

و برای پوسته حسگر خواهد شد:

$$\bar{\delta}(R_m) = M^s \bar{\delta}(R_i) \tag{۲۲}$$

و همچنین برای پوسته عملگر می توان نوشت:

$$\bar{\delta}(R_o) = M^a \bar{\delta}(R_n) \tag{۲۳}$$

که در روابط فوق:

(۲۴)

$$T_c = \prod_{K=N}^{1} \exp[G_c^K(\frac{h_K}{R_K})]$$

$$M^s = \prod_{K=p}^{1} \exp[G_s^K(\frac{h_K}{R_K})]$$

$$M^a = \prod_{K=p}^{1} \exp[G_a^K(\frac{h_K}{R_K})]$$

که در رابطه (۲۴)، N و p به ترتیب تعداد لایه‌های کامپوزیت و پیزوالکتریک بعد از اعمال فرض سونگ هستند.

۴- معادلات کاربردی

با استفاده از معادله (۲۳) و اعمال شرط مرزی الکتریکی در سطح خارجی پوسته مورد نظر می‌توان نوشت:

$$D_r(R_N) = -\frac{1}{m_{87}^a} \times [m_{8j}^a]\, \bar{\delta}(R_N) \qquad j = 1,2,...,6 \tag{۲۵}$$

در رابطه فوق ماتریس سطری تشکیل شده از سطر ۸ و ستون‌های۱ تا ۶ ماتریس و مؤلفه سطر ۸ و ستون ۷ ماتریس می‌باشند. پس از جاگذاری رابطه (۲۵) در معادله (۲۳) برای لایه عملگر رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\bar{\delta}(R_o) = T_a \bar{\delta}(R_n) \tag{۲۶}$$

که:

$$T_a = [m_{ij}^a] - \{m_{i7}^a\} \times \frac{1}{m_{87}^a} \times [m_{8j}^a] \qquad i,j = 1,2,...,6 \tag{۲۷}$$

با استفاده از معادله (۲۲) و اعمال شرط مرزی الکتریکی روی سطح داخلی، برای لایه حسگر نیز می‌توان نوشت:

$$\psi(R_i) = -\frac{1}{m_{88}^s} [m_{8j}^s]\, \bar{\delta}(R_i) \tag{۲۸}$$

با استفاده از معادله (۲۲) و جایگذاری رابطه فوق در آن:

$$\bar{\delta}(R_m) = T_s \bar{\delta}(R_i) \tag{۲۹}$$

که:

$$T_s = [m_{ij}^s] - \{m_{i8}^s\} \times \frac{1}{m_{88}^s} \times [m_{8j}^s] \qquad i,j = 1,2,...,6 \tag{۳۰}$$

به منظور ارضاء شرایط سازگاری در سطوح تماس کامپوزیت و پیزوالکتریک، سطوح داخلی و خارجی پوسته کامپوزیت، عاری از پتانسیل الکتریکی می‌باشند که این نکته در به دست آوردن روابط فوق در نظر گرفته شده است.

با ترکیب معادلات (۲۱)، (۲۶) و (۲۹)، می‌توان نوشت:

$$\bar{\delta}(R_o) = S\, \bar{\delta}(R_i) \qquad S = T_a\, T_c\, T_s \tag{۳۱}$$

با اعمال شرایط مرزی مکانیکی در دو سطح داخلی و خارجی، معادله (۳۲) نتیجه می‌شود که با حل آن فرکانس‌های طبیعی برای پوسته با شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده حاصل می‌شود .

$$\left| S_{ij} \right| = 0 \qquad i = 1,2,3 \quad j = 4,5,6 \tag{۳۲}$$

۵- حل عددی

حل دقیق سه بعدی برای پوسته با شرایط تکیه‌گاهی به جز دو سر ساده امکان‌پذیر نمی‌باشد. به منظور بررسی عددی پوسته با شرایط مختلف تکیه‌گاهی، روش نیمه تحلیلی که توسط Chen و همکارانش با تعمیم (dq) بدست آمده و به روش دیفرانسیل کوادراچر تعمیم یافته (GDQ) معروف است، در نظر گرفته شده است[۲]. در این روش مشتق مرتبه nام تابع پیوسته f(x,r) نسبت به x در نقطه بصورت مجموع خطی از مقادیر تابع وزن در همه نقاط نوشته می‌شود. به منظور شبکه‌بندی از رابطه زیر که به رابطه Chebyshev- Gauss- Lobatto معروف است استفاده شده است:

$$x_i = (1 - \mathrm{Cos}\frac{(i-1)\pi}{N-1})\frac{L}{2} \qquad i = 1,2,...,N \tag{۳۳}$$

در روش فوق مشتقات مرتبه n ام بصورت زیر تعریف می‌شوند:

(۳۴)

$$\left.\frac{\partial^n f(x,r)}{\partial x^n}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} d_{ij}^{(n)} f(x_j, r) \qquad \begin{array}{l} n = 1,2,...,N-1 \\ i,j = 1,2,...,N \end{array}$$

که در رابطه (۳۴)، تابع وزن می‌باشد:

(۳۵)

$$d_{ij}^{(1)} = \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)}$$

$$d_{ij}^{(n)} = n\left[d_{ii}^{(n-1)} d_{ij}^{(1)} - \frac{d_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j}\right] \qquad \begin{array}{l} i,j = 1,2,\dots,N \\ n = 1,2,\dots,N-1 \\ i \neq j \end{array}$$

$$d_{ii}^{(n)} = -\sum_{j=1}^{N} d_{ij}^{(n)}$$

$$M(x_i) = \prod_{j=1}^{N}(x_i - x_j)$$

در روابط فوق N تعداد نقاط شبکه‌بندی می‌باشد، که برای مسئله مورد نظر، پوسته در راستای طولی شبکه‌بندی شده است.

با جایگذاری رابطه (۳۵) در رابطه (۱۳) و اعمال شرایط مرزی بر روی آن، مشتقات نسبت به x با ضرائب ثابت به دست آمده از GDQ جایگزین می‌شوند و دستگاه معادلات پاره‌ای مربوطه به دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول با ضرائب ثابت تبدیل می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\Delta_b = M_b^k \Delta_b \qquad (۳۶)$$

برای پوستهٔ چند لایه، ماتریس ستونی‌۶ $N\times1$می‌باشد که هر یک از ۶ عضو ماتریس ستونی که در رابطه (۱۴) ذکر شده، برای N نقطه شبکه بندی شده بسط داده شده‌اند. به همین ترتیب برای پوسته پیزوالکتریک، ماتریس ستونی‌۸ $N\times1$می‌باشد.

به منظور توانایی ترکیب ماتریس‌های برای پوسته‌های چندلایه و پیزوالکتریک، مطابق قبل عمل می‌شود که در نهایت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta_b(R_o) = S'\Delta_b(R_i) \qquad S' = M_{b_A} M_{b_C} M_{b_S} \qquad (۳۷)$$

که در رابطه فوق مربوط به پوستهٔ عملگر، مربوط به پوستهٔ حسگر و مربوط به پوستهٔ کامپوزیت می‌باشد.

به منظور بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی و رسیدن به جواب نهایی، شرایط مرزی در سطوح بالا و پایین را اعمال و مؤلفه‌هایی از ماتریس که تنش در سطح خارجی و جابجایی در سطح داخلی را به هم مرتبط می‌سازند در نظر می گیریم. در نتیجه:

$$\left|S_{ij}'\right| = 0 \quad i = 1,2,3 \qquad j = 4,5,6 \qquad (۳۸)$$

که در رابطه فوق هر کدام از i و jها، یک زیر ماتریس هستند.

۶- نتایج عددی و بحث پیرامون آن

در این بررسی از فرکانس طبیعی بی‌بعد، طبق رابطه زیر استفاده شده است.

$$\omega^* = \omega H\sqrt{\frac{\rho_c}{E_2}} \qquad (۳۹)$$

که در رابطه فوق، H ضخامت کل پوسته، و به ترتیب چگالی و مدول الاستیسیته مربوط به پوسته کامپوزیت می‌باشند. برای پوسته‌های پیزوالکتریک طرفین رابطه فوق در ضرب می‌شود که چگالی مربوط به پوسته پیزوالکتریک بوده که برای لایه‌های حسگر و عملگر، چگالی مربوط به هر لایه جداگانه منظور می گردد.

به منظور بررسی پوسته مورد نظر، برای لایه‌های کامپوزیت از گرافیت- اپوکسی[۴]، برای لایه حسگر از و برای لایه عملگر از ، مطابق مرجع [۳] استفاده شده است که در جداول (۱) و (۲) مشخصات مربوط به این مواد ذکر شده است.

به منظور اطمینان از درستی مراحل کار، با توجه به عدم وجود منابع لازم، نتایج برای پوستهٔ صرفاً کامپوزیتی با نتایج حاصل از مرجع [۷] مقایسه شده‌اند که در جدول (۳) به این مقایسه و میزان خطا در حالت‌های مختلف هندسی اشاره شده است.

جدول (۱) خصوصیات کامپوزیت گرافیت- اپوکسی

E_1(Gpa)	181	G_{12}(Gpa)	7.17	υ_{12}	0.28
E_2(Gpa)	10.3	G_{13}(Gpa)	7.17	υ_{13}	0.28
E_3(Gpa)	10.3	G_{23}(Gpa)	3.87	υ_{23}	0.33
$\rho(kg/m^3)$	1580				

جدول(۲) خصوصیات مکانیکی و الکتریکی پیزوالکتریک‌ها

	حسگر	عملگر		حسگر	عملگر
C_{11}	۱۳۹	۲۳۹	e_1	۲ر۵-	۴ر۰-
C_{22}	۱۳۹	۲۴۷	e_2	۲ر۵-	۳ر۰-
C_{33}	۱۱۵	۱۳۵	e_3	۱۵ر۱	۴ر۳
C_{12}	۷۸	۱۰۴	e_4	۱۲ر۷	۳ر۴
C_{13}	۷۴	۵	e_5	۱۲ر۷	۲ر۸
C_{23}	۷۴	۵۲	η_1	۶۵۰	۱۹۶
C_{44}	۲۵ر۶	۶۵	η_2	۶۵۰	۲۰۱
C_{55}	۲۵ر۶	۶۶	η_3	۵۶۰	۲۸
C_{66}	۳۰ر۵	۷۶	ρ	۷۵۰۰	۵۳۰۰

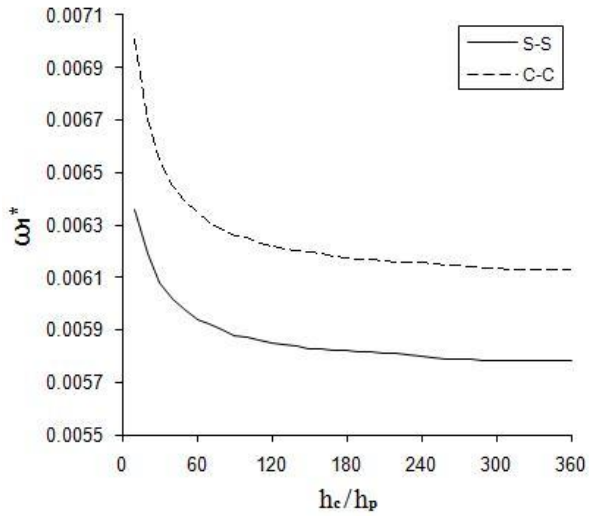
واحدها: C_{ij} (Gpa), e_i (C/m^2), η(10^{-11}F/m)

جدول(۳) مقایسه نتایج برای پوسته صرفاً کامپوزیتی با نتایج مرجع[۷] در حالت *(R/H=2)*

	L/R=1		L/R=2	
چیدمان لایه‌ها	[90/0]	[90/0/90]	[90/0]	[90/0/90]
مرجع [۷]	۰ر۹۵۴۸	۰ر۹۰۴۷	۰ر۴۶۸۲	۰ر۳۹۸۶
روش حاضر	۰ر۹۵۸۲	۰ر۸۷۲۱	۰ر۴۵۹۱	۰ر۴۱۰۱
درصد خطا	٪۰ر۳۵	٪۳ر۷۳	٪۱ر۹۸	٪۲ر۸۰

با توجه به تفاوت شیوه‌های بدست آوردن معادلات، نتایج بدست آمده قابل قبول بوده و به این ترتیب به بررسی ارتعاشات پوسته، با لایه پیزوالکتریک پرداخته شده است.

تأثیر نسبت ضخامتِ لایه کامپوزیت به لایه پیزوالکتریک بر اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد به ازاء (L/R=5) و (R/H=60)و چیدمان [۰/۹۰/۰] سه لایه کامپوزیت در دو حالت تکیه‌گاهی دو سر ساده و دو سر گیردار در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱) تأثیر تغییرات نسبت ضخامت لایه کامپوزیت به ضخامت لایه پیزوالکتریک (hc/hp) بر اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد در دو حالت تکیه‌گاهی دو سر ساده و دو سر گیردار

با توجه به شکل، ملاحظه می‌شود که هر چه این نسبت افزایش می‌یابد، با توجه به جنس مواد پیزوالکتریک که دارای مؤلفه‌های سختی بالایی هستند، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. در این تحقیق، تمامی نمودارها و جداول در (hc/hp =20) به دست آمداند.

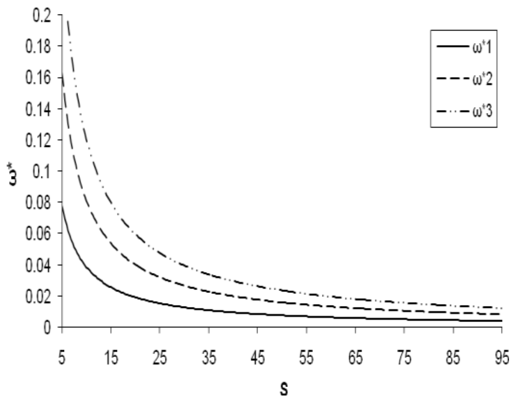
همگرایی و مقایسه نتایجِ حل تحلیلی و عددی برای دو لایۀ کامپوزیت با چیدمان [۰/۹۰] و در (L/R) و (R/H) های مختلف در جدول (۴) نشان داده شده است.

در جدول (۵)، سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد، برای (L/R) و (S=R/H) های مختلف، چیدمان متفاوت لایه‌های کامپوزیت و انواع شرایط تکیه‌گاهی ارائه شده است.

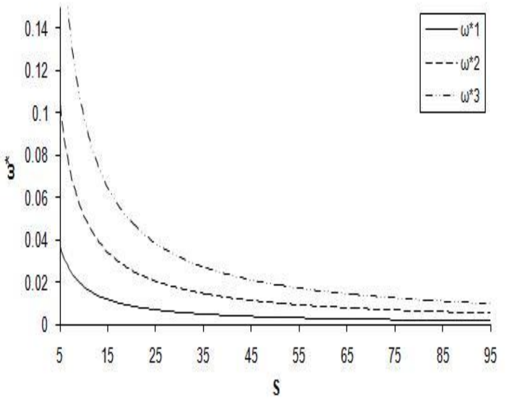
شکل‌های(۲) و (۳)، تغییرات سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد، بر حسب تغییرات S برای (L/R=5) و چیدمان [۰/۹۰] برای دو لایه کامپوزیت و در دو حالت تکیه‌گاهی مختلف را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌گردد که با افزایش فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که این امر ناشی از کاهش صلبیت پوسته مورد نظر می‌باشد.

جدول (۴) همگرایی و مقایسه نتایج حل تحلیلی و عددی برای در حالت چیدمان [۰/۹۰] دو لایه کامپوزیت

	L/R=2	L/R=5	L/R=10
S=10			
n=5	0.09995	0.037	0.0144
N=6	0.10017	0.0371	0.01445
N=7	0.10018	0.0371	0.01445
N=8	0.10018	0.0371	0.01445
معادله(۳۲)	0.10018	0.0371	0.01445
S=20			
n=5	0.04937	0.01829	0.00711
N=6	0.04947	0.01834	0.00713
N=7	0.04948	0.01834	0.00713
N=8	0.04948	0.01834	0.00713
معادله(۳۲)	0.04948	0.01834	0.00713
S=50			
n=5	0.01962	0.00727	0.00282
N=6	0.01967	0.00729	0.00283
N=7	0.01967	0.00729	0.00283
N=8	0.01967	0.00729	0.00283
معادله(۳۲)	0.01967	0.00729	0.00283

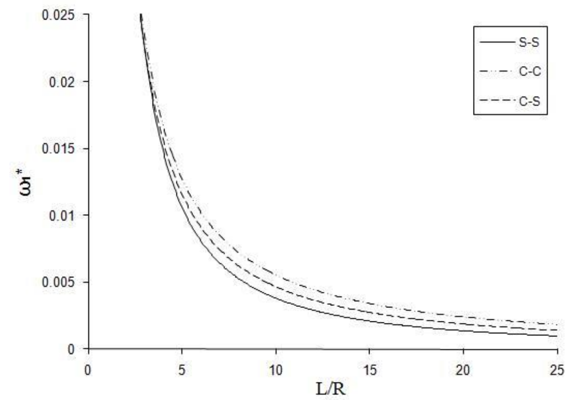


شکل (۲) تغییرات نخستین سه فرکانس طبیعی اول بر حسب تغییرات S در حالت تکیه‌گاهی گیردار- ساده



شکل (۳) تغییرات نخستین سه فرکانس طبیعی اول بر حسب تغییرات S در حالت تکیه‌گاهی گیردار- آزاد

شکل (۴)، تغییرات اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب تغییرات برای S=30 و چیدمان سه لایه‌ای [۹۰/۰/۹۰] برای لایه‌های کامپوزیت و حالت‌های تکیه‌گاهی مختلف را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که این امر نیز ناشی از کاهش صلبیت پوسته مورد نظر می‌باشد.



شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب تغییرات(L/R)

جدول(۵) سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای (L/R) و $(S=R/H)$ های مختلف و انواع شرایط تکیه‌گاهی

R/H	L/R	چیدمان کامپوزیت	S-S I	S-S II	S-S III	C-C I	C-C II	C-C III	C-S I	C-S II	C-S III	C-F I	C-F II	C-F III
30	5	[0/90]	0.0120	0.026	0.0387	0.0133	0.0262	0.0389	0.0124	0.0261	0.0388	0.0051	0.0167	0.0287
		[0/90/0]	0.0124	0.0262	0.0384	0.0135	0.0264	0.0387	0.0127	0.0263	0.0385	0.0055	0.0171	0.03
	10	[0/90]	0.0047	0.0120	0.0192	0.0062	0.0125	0.0195	0.0054	0.0123	0.0193	0.0018	0.0074	0.015
		[0/90/0]	0.005	0.0124	0.0195	0.0064	0.0127	0.0197	0.0056	0.0126	0.0196	0.002	0.0077	0.0149
100	5	[0/90]	0.0036	0.0078	0.0116	0.004	0.0079	0.0117	0.0037	0.0078	0.0116	0.0016	0.0051	0.0092
		[0/90/0]	0.0037	0.0078	0.0115	0.004	0.0079	0.0115	0.0038	0.0079	0.0115	0.0017	0.0052	0.0092
	10	[0/90]	0.0014	0.0036	0.0058	0.0019	0.0038	0.0059	0.0016	0.0037	0.0058	0.0006	0.0022	0.0044
		[0/90/0]	0.0015	0.0037	0.0058	0.0019	0.0038	0.0059	0.0017	0.0038	0.0059	0.0006	0.0023	0.0045

مراجع

[1] Bert CW., Jang SK., Striz AG., Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature, *Computer Mechanics*, 1998, pp. 217-226.

[2] Alibeigloo A., Shakeri M., Elasticity solution for the free vibration analysis of laminated cylindrical panels using the differential quadraure method, *Composite Structures*, vol. 81, 2007, pp. 105-113.

[3] Chen W.Q., Bian Z.G., Lv C.F., Ding H.J., 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid, *Solid and Structure*, vol. 41, 2004, pp. 947-964.

[4] Yun L.H., Yong L.Q., Xing L.Z., Chao W., Active control of the piezoelastic laminated cylindrical shell's vibration under hydrostatic pressure, *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 24, 2003, pp. 182-195.

[5] Santos H., Soares M.C., Reddy, J.N., A finite element model for the analysis of 3D axisymmetric laminated shells with piezoelectric sensors and actuators: bending and free vibration, *Computer and Structures*, 2007.

[6] Alibeigloo A., Madoliat R., Static analysis of cross-ply laminated plates with integrated surface piezoelectric layers using differential quadrature, *Composite Structures*, 2008.

[7] Malekzadeh P., Farid M., Zahedinejad P., A three-dimensional layerwise-differential quadrature free vibration analysis of laminated cylindrical shells, *Pressure Vessels and piping*, vol. 85, 2008, pp. 450-458.

[8] Soong, T.V., A sub devisional method for linear system, *AIAA/ASME Structures*, 1970, pp. 211-223.