

## تحلیل اجزاء محدود غیرخطی تنش‌های ترموالاستیک دیسک دوار FGM با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما

مهرنوش دمیرچلی<sup>\*۱</sup>

محمد آزادی<sup>۲</sup>

\* نویسنده مسئول: damirchi@kvoushco.com

### چکیده

در این مقاله، تحلیل غیرخطی تنش‌های ترموالاستیک شعاعی و محیطی یک دیسک توپر ساخته شده از جنس مواد FGM انجام شده است. برای این منظور، از روش اجزاء محدود استفاده شده است. در روش فوق، المان‌های یک‌بعدی مرتبه دو (با سه نقطه گره) به کار رفته‌اند. شرایط مرزی هندسی و تنش، به شکل عدم وجود فشار خارجی و در نتیجه صفر بودن تنش شعاعی در لایه بیرونی دیسک، و جابه‌جایی صفر در مرکز آن تعریف می‌شود. توزیع دما، به صورت یک منحنی درجه دوم فرض شده است. تغییرات خواص مواد، شامل مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ضریب انبساط خطی حرارتی، با استفاده از تابعی توانی بر حسب تغییرات شعاع دیسک و همچنین، وابستگی آن‌ها به دما، مدل‌سازی شده‌اند. یک مثال عددی آورده شده است که در آن جابه‌جایی‌های شعاعی، تنش‌های ترموالاستیک شعاعی و محیطی به ازای توان‌های مختلفی (N) از قانون توانی و سرعت‌های زاویه‌ای متفاوت بر حسب شعاع دیسک ارائه گردیده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش هر دو پارامتر N و سرعت زاویه‌ای دیسک، مقادیر جابه‌جایی و تنش، افزایش می‌یابند. در انتهای مقاله، وابستگی و عدم وابستگی خواص به دما مورد بررسی قرار گرفته است.

**واژه‌های کلیدی:** دیسک دوار، روش اجزاء محدود، FGM، تنش ترموالاستیک، وابستگی خواص به دما، تحلیل غیرخطی

۱- دانشجوی دکتری مکانیک - دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات

۲- دانشجوی دکتری مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف

## ۱- مقدمه

مطالعات اخیر بر روی مواد کاربردی جدیدی که FGM<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند نشان می‌دهد که این مواد قابلیت مقاومت در دماهای بسیار بالا و تحمل تغییرات دمای زیاد بین دو سطح خود را دارا می‌باشند. تفکر در مورد این گونه مواد در سال ۱۹۸۴ به وسیله دانشمندان سن‌دای ژاپن آغاز گردید. این تحقیقات به منظور مهیا کردن موادی صورت گرفت که در ساختارهای فضایی، بدنه‌های هواپیما یا جت‌ها و همچنین در راکتورهای فوزیون هسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱-۳].

مواد FGM ترکیبی از مواد مختلفی مانند مواد سرامیکی و یا فلزات می‌باشند که از لحاظ میکروسکوپی خواص ماده هموزن و یا همگن را ندارند. تغییرات پیوسته در خواص میکروسکوپی این مواد عاملی است که باعث تفاوت این با مواد دیگر کامپوزیتی می‌شود [۴]. معمولاً تغییرات مربوط به پارامترهای موادی، به صورت تابعی توانی یا نمایی در جهت ضخامت و یا شعاع دیسک در نظر گرفته می‌شود.

دیسک‌های چرخان یکی از مهمترین اجزای سازه‌ای در توربوماشینها و سیستمهای دارای فلاپویل در انواع خودروها می‌باشند. در تحقیقات مختلف برای حل این مسئله از فرضهای تنش یا کرنش صفحه‌ای استفاده شده که در این مقاله حالت تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است [۵-۱۳]. لیزا و همکارش [۱۰] و درست است جین و همکارانش [۱۱]، توزیع تنش در دیسک دوار را بر اساس تغییرات ضرایب الاستیسیته در جهت شعاعی، بهینه‌سازی کرده‌اند. ژو و همکارش [۱۲ و ۱۳]، یک روش تحلیلی برای دیسک دوار ارائه کرده‌اند. در مقاله فوق، ضرایب الاستیسیته، تابعی از مختصات محیطی در نظر گرفته شده است. رامو و همکارش [۱۴]، تاثیر تنش طولی روی تنشهای درون صفحه‌ای را مطالعه و میدان تنش‌های الاستیسیته شبه سه‌بعدی را ارائه کرده‌اند. چن و همکارش [۱۵]، مسئله پوسته استوانه‌ای چرخان را با در نظر گرفتن نیروی گریز از مرکز و تاثیرات شتاب کریولیس را حل نموده‌اند. مین و همکارش [۱۶]، تغییر شکل‌های یک دیسک ساخته شده از مواد FGM متقارن را بررسی کرده‌اند. در مقاله فوق، از نیروهای جسمی صرف نظر شده و پارامترهای الاستیسیته در جهت ضخامت متغیر در نظر گرفته شده است. دینگ و همکارانش [۱۷]، یک روش تحلیلی

برای دیسک دوار FGM را ارائه داده‌اند. در این تحقیق پارامترهای مربوط به مواد در جهت ضخامت تغییر می‌کند. در نهایت بهینه‌سازی بر اساس توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی به دست آمده، انجام پذیرفته است. حسینی و همکارش با روشی شبه تحلیلی، تنش‌های ترموالاستیک دیسک‌های دوار کامپوزیتی را بررسی نموده‌اند [۱۸]. زنکور [۱۹]، توزیع تنش‌ها را در دیسک‌های کامپوزیتی ساخته شده از FGM، به روش تحلیلی، محاسبه کرده است. بیات و همکارانش [۲۰]، تنش‌های ترموالاستیک دیسک‌های دوار FGM را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها در مقاله خود، از تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی استفاده کرده‌اند.

در این مقاله، تحلیل غیرخطی تنش‌های ترموالاستیک شعاعی و محیطی یک دیسک دوار از جنس مواد FGM و با استفاده از روش اجزاء محدود انجام پذیرفته است. دیسک فوق، با به کارگیری از المان‌های یک بعدی مرتبه دو مش‌بندی شده است. تغییرات خواص مواد به وسیله یک تابع توانی بر حسب تغییرات شعاع دیسک و همچنین با در نظر گرفتن وابستگی آن‌ها به دما، مدل شده‌اند. این خواص شامل مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ضریب انبساط خطی حرارتی می‌باشند. برای مواد FGM به کار رفته، از ماده فولاد ضدزنگ، به عنوان فلز و همچنین از ماده زیر کونیا، به عنوان سرامیک استفاده گردیده است. با حل یک مثال عددی، نتایج به صورت نمودارهایی بر حسب شعاع دیسک دوار نشان داده شده‌اند. در این مثال، نمودارهای جابه‌جایی شعاعی، تنشهای ترموالاستیک شعاعی و محیطی نیز به ازای توانهای مختلفی (N) از قانون توانی و سرعت‌های زاویه‌ای متفاوت دیسک دوار FGM ارائه گردیده‌اند. تاثیر وابستگی و عدم وابستگی خواص به دما، در توزیع تنشهای ترموالاستیک نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- روابط حاکم بر رفتار مواد FGM

مواد FGM ترکیبی از فلز و سرامیک هستند که در محیط‌هایی با دمای بالا به کار برده می‌شوند و در نتیجه خواص آنها به دما وابسته است. خواص ساختاری سرامیک و فلز باید به صورت تابعی از دما بیان شوند که از جمله این

همچنین تغییر مکان به مختصات محیطی  $(\theta)$  وابستگی نخواهند داشت و فقط تابعی از شعاع می باشد. در ضمن، به دلیل تقارن تنش برشی  $(\tau_{r\theta})$  صفر بوده اما تنش های محیطی وجود دارند. در این صورت، رابطه تعادل برای دیسک دواری که با سرعت زاویه ای ثابت می چرخد، به صورت زیر خواهد بود [۲۲]:

$$\frac{d\sigma_r}{dx} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r \omega^2 = 0 \quad (5)$$

در این رابطه،  $r, \rho, \omega, \sigma_r, \sigma_\theta$  به ترتیب، تنش محیطی، تنش شعاعی، سرعت زاویه ای، دانسیته و شعاع دیسک می باشند. باید توجه داشت که از نیروی حجمی در اثر وزن صرف نظر شده است.

روابط تنش ها بر اساس کرنش ها به صورت زیر است:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta - (1-\nu)\alpha \Delta T) \quad (1-6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r - (1-\nu)\alpha \Delta T) \quad (2-6)$$

روابط کرنشها و تغییر مکانها نیز به فرم زیر می باشند:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (1-7)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2-7)$$

تنشها را نیز می توان بر حسب تغییر مکانها به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1-\nu)\alpha \Delta T \right) \quad (1-8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} - (1-\nu)\alpha \Delta T \right) \quad (2-8)$$

$$\Delta T = T - T_\infty \quad (3-8)$$

با قراردادن تنشها از رابطه (۸) در رابطه تعادل (۵)، معادله

دیفرانسیل زیر برای تغییر مکان شعاعی به دست می آید:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1-\nu)\alpha \Delta T \right) \right\} \quad (9)$$

$$+ \frac{E}{r(1+\nu)} \left( \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) + \rho r \omega^2 = 0$$

#### ۴- معادلات اجزاء محدود

با استفاده از تقریب کانتورویچ، داریم [۲۳]:

$$\{u(r)\} = [N(r)] \{U^e\} \quad (10)$$

خواص می توان مدول الاستیسیته، ضریب هدایت گرمایی، ضریب انبساط طولی و ظرفیت گرمایی را نام برد.

$$P = P_0 \left( \frac{P-1}{T} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (1)$$

که ثوابت  $P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3$  ثوابتی هستند که متناسب با خواص ماده می باشند. به منظور مدل کردن خواص این مواد باید به این نکته توجه داشت که آن ها به دو فاکتور دما و موقعیت (مختصات) بستگی دارند و از رابطه زیر به دست می آیند:

$$P_{eff}(T, \xi) = P_m(T) V_m(\xi) + P_c(T) V_c(\xi) \quad (2)$$

هر یک از مقادیر  $P_m$  و  $P_c$  از رابطه (۱) محاسبه می شوند. همچنین، منظور از  $V_m$  نسبت حجم فلز به حجم کل ماده و  $V_c$  نسبت حجم سرامیک به حجم کل ماده می باشد که با رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

$$V_c = 1 - V_m \quad (3)$$

توابع  $V_m$  به فرم های مختلفی بیان می شوند. در این مقاله، از فرضیه ردی استفاده شده است [۲۱]:

$$V_m = \left( \frac{r}{b} \right)^N \quad (4)$$

که در آن  $b$  شعاع خارجی دیسک و  $N$  ثابتی است که بین صفر تا بی نهایت تغییر می کند. وقتی که مقدار آن صفر است، ماده کاملاً فلزی و وقتی که مقدار آن بی نهایت باشد، ماده کاملاً سرامیکی خواهد بود. در ضمن، لایه های داخلی دیسک از جنس سرامیک و لایه های خارجی آن از جنس فلز می باشند. قابل ذکر است که در این مقاله دو پارامتر ضریب الاستیسیته و ضریب انبساط خطی حرارتی، وابسته به دما و پارامترهای چگالی و ضریب پواسون، مستقل از دما در نظر گرفته شده است.

#### ۳- معادلات حاکم بر دیسک دوار FGM

مسائل مهندسی زیادی وجود دارند که در آنها توزیع تنش حول یک محور متقارن می باشد از جمله این مسائل می توان دیسک دوار را نام برد. در این گونه مسائل، تنشها حول محور  $z$  متقارن می باشند و مسئله به صورت تنش صفحه ای ( $\sigma_z = 0$ ) در نظر گرفته می شود.

۱ - Metal Volume Fraction

۲ - Ceramic Volume Fraction

جدول (۱)، مقادیر پارامترهای موجود در رابطه (۱۶) را مشخص می‌کند.

جدول (۱) پارامترهای مربوط به رابطه (۱۶)

$i$	$W_i(\xi_i)$	$\xi_i$
۱	۰/۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۶	۰/۷۷۴۵۹۶۶۶۹۲
۲	۰/۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۹	۰
۳	۰/۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۶	-۰/۷۷۴۵۹۶۶۶۹۲

## ۵- اعمال شرایط مرزی و دمایی

شرایط مرزی هندسی و تنش در اینجا به شکل عدم وجود فشار خارجی و در نتیجه صفر بودن تنش شعاعی در لایه خارجی دیسک تعریف می‌شود. شرایط مرزی دیسک توپر نیز به صورت زیر است:

$$u = 0 \quad (r = 0) \quad (1-17)$$

$$r = 0 \quad (r = r_0) \quad (2-17)$$

برای تحقق این منظور با توجه به جمله اول از رابطه (۸) به صورت زیر عمل شده است:

$$\sigma_r^{(e)} = [B^{(e)}] \{U^{(e)}\} \quad (1-18)$$

$$[B^{(e)}] = \frac{E}{1-\nu^2} ([N]_{,r} + \frac{\nu}{r} [N]) \quad (2-18)$$

که در رابطه (۱۸)،  $[B^{(e)}]$  یک ماتریس با یک سطر و سه ستون می‌باشد.

حال با صفر قرار دادن مقدار تنش شعاعی و جابه‌جایی، به ترتیب در المان‌های اول و آخر، می‌توان رابطه (۱۴) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & [K] & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & [B^{(n)}] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^{(1)}\} \\ \vdots \\ \{U^{(n)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \{f\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

بدین ترتیب، مقادیر جابه‌جایی در المان ابتدا و انتهای دیسک با توجه به شرایط مرزی اعمال می‌گردند.

در این مقاله توزیع دما به صورت یک منحنی درجه دو فرض شده است:

$$T = (T_\infty - 400) \left( \frac{r}{b} \right)^2 + 400 \quad (20)$$

قابل ذکر است که برای حل معادلات فوق، یک کد کامپیوتری در محیط برنامه‌نویسی MATLAB نوشته شده است.

$[N]$  ماتریس توابع شکل می‌باشد که برای المان‌های مرتبه دوم (با سه نقطه گره)، به صورت زیر می‌باشد [۲۳]:

$$[N] = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \xi (\xi - 1), -(\xi + 1)(\xi - 1), \frac{1}{\sqrt{3}} \xi (\xi + 1) \right] \quad (11)$$

که در آن،  $\xi$  مختص طبیعی بوده و محدوده تغییرات آن بین -۱ و ۱ می‌باشد. دلیل استفاده از این مختص، بهره‌گیری از روش انتگرال عددی گوس-لژاندر [۲۳] می‌باشد.

قابل ذکر است که المان‌ها به صورت یک‌بعدی بوده و بدین ترتیب، تعداد درجه آزادی هر نود، یک بوده و تنها در جهت شعاع دیسک می‌توانند جابجا شوند. علت انتخاب این گونه المان‌ها، وجود تقارن در مسئله می‌باشد.

فرم انتگرال مانده‌ها، در روش گالرکین به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_{\Omega} [N]^T R d\Omega = 0 \quad (1-12)$$

$$R = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} ([N]_{,r} + \frac{\nu}{r} [N]) \{U^{(e)}\} - \frac{E}{1+\nu} (\alpha \Delta T) \right\} + \frac{E}{r(1+\nu)} ([N]_{,r} - \frac{1}{r} [N]) \{U^{(e)}\} + \rho \omega^2 r \quad (2-12)$$

بعد از مرتب‌سازی معادلات کلی، به رابطه اجزاء محدود

زیر خواهیم رسید:

$$[K^{(e)}] \{U^{(e)}\} = \{f^{(e)}\} \quad (13)$$

که در رابطه (۱۳)، برای ماتریس‌های سختی و نیرو، خواهیم داشت:

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega} [N]^T \left\{ \frac{d}{dr} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} (N)_{,r} + \frac{\nu}{r} [N] \right] \right\} d\Omega \quad (1-14)$$

$$+ \int_{\Omega} [N]^T \left\{ + \frac{E}{r(1+\nu)} ([N]_{,r} - \frac{1}{r} [N]) \right\} d\Omega$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{\Omega} [N]^T \left\{ \rho \omega^2 r - \frac{d}{dr} \left( \frac{E}{1+\nu} (\alpha \Delta T) \right) \right\} d\Omega \quad (2-14)$$

مقادیر انتگرال روی حجم، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\int_{\Omega} L(r, \xi) d\Omega = \int_0^b \pi r h L(r, \xi) dr \quad (15)$$

$$= \pi h \int_0^b r L(r, \xi) \frac{\Delta r}{\Delta \xi} d\xi = \pi h \int_0^b r L(r, \xi) \frac{b}{n} d\xi$$

که در آن،  $h$  مقدار ضخامت و  $b$  شعاع خارجی دیسک است.

برای محاسبه انتگرال‌ها به روش زیر عمل می‌شود: [۲۳]

$$\int_0^b F(r, \xi) d\xi = \sum_{i=1}^3 W_i(\xi_i) F(\xi_i) \quad (1-16)$$

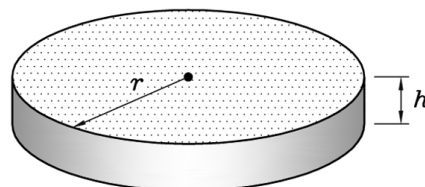
$$F(r, \xi) = r L(r, \xi) \quad (2-16)$$

## ۶- بحث بر روی نتایج

شکل (۱) نشان‌دهنده شکل هندسی دیسک توپر دوار می‌باشد. مقادیر ثوابت الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی خطی و چگالی برای مواد FGM به کار رفته در مثال عددی، در جدول (۳) آورده شده است. در این مثال، از ماده فولاد ضدزنگ، به عنوان فلز و از ماده زیرکونیا، به عنوان سرامیک استفاده گردیده است. در این مثال، شعاع خارجی و ضخامت دیسک، به ترتیب ۲۰۰ و ۵ میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

جدول (۲) ثوابت مربوط به ماده FGM

فلز (Stainless Steel)	سرامیک (Zirconia)	کمیت
۷۸۰۰	۵۷۰۰	$\rho(\frac{kg}{m^3})$
۲۰۱/۰۴	۲۴۴/۲۷	$E(GPa)$
۰/۳۲۶۲	۰/۲۸۸۲	$\nu$
۰/۰۰۰۰۱۲۳۳	۰/۰۰۰۰۱۲۷۶۵۷	$\alpha(10^{-6} K)$
۰	۰	$P_{-1}(E, \alpha)$
۰/۰۰۰۳۰۷۹	-۰/۰۰۱۳۷۰۷	$P_1(E)$
-۰/۰۰۰۰۰۰۶۵۳	۰/۰۰۰۰۰۱۲۱۳۹۳	$P_2(E)$
۰	-۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۳۶۸	$P_3(E)$
۰/۰۰۰۸۰۸۶	-۰/۰۰۰۱۴۹	$P_1(\alpha)$
۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱	$P_2(\alpha)$
۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۸	$P_3(\alpha)$



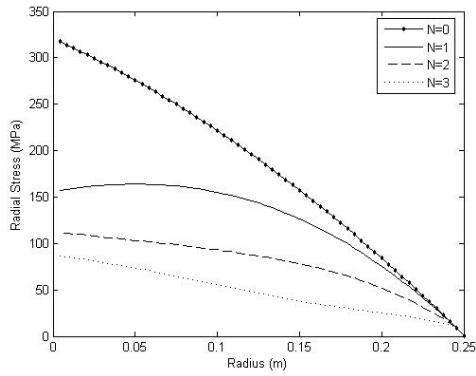
شکل (۱) شکل هندسی دیسک دوار مورد بررسی

تنش شعاعی از جواب دقیق و از جواب کد در حالتی که  $N$  مساوی با صفر است، می‌توان از دقت جواب‌ها مطمئن شد. در شکل‌های (۴)، (۵) و (۶)، جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و محیطی برای توان‌های مختلفی ( $N$ ) از قانون توانی رسم شده است. در شکل‌های فوق، برای دیسک، سرعت زاویه‌ای ثابت ۹۰۰ رادیان بر ثانیه، و اثر وابستگی خواص مواد به دما در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، مقدار جابه‌جایی صفر در وسط دیسک توپر به دست آمده است که شرایط مرزی را ارضا می‌کند. همچنین با افزایش مقدار  $N$ ، مقدار جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد. هر چه مقدار  $N$  بیشتر می‌گردد، جسم به سمت سرامیکی شدن میل می‌کند (این مطلب از معادله (۵) نیز قابل مشاهده است). و در نتیجه جسم سخت‌تر شده و مقدار جابه‌جایی شعاعی نیز، کمتر می‌گردد. در شکل (۵)، مقدار تنش شعاعی در لبه خارجی دیسک صفر محاسبه شده است که این مطلب نشان‌دهنده ارضای شرایط مرزی می‌باشد. مقدار تنش شعاعی ماکزیمم نیز در وسط دیسک اتفاق می‌افتد که منطقی به نظر می‌رسد [۲۲]. با افزایش  $N$ ، تنش شعاعی و محیطی نیز کاهش می‌یابد و این، بدان علت است که مقدار جابه‌جایی شعاعی برای  $N$ های بزرگتر، کمتر بوده و تنش با جابه‌جایی شعاعی، طبق معادلات (۸)، رابطه مستقیم دارند.

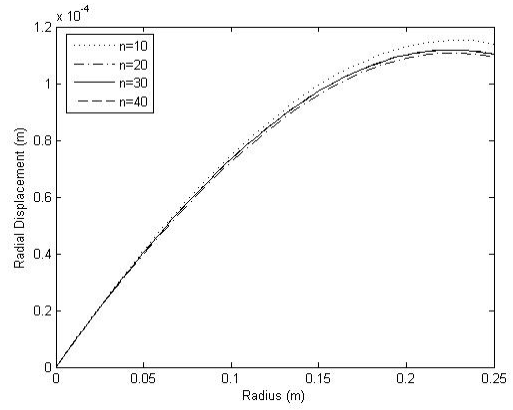
در شکل‌های (۷) و (۸)، جابه‌جایی و تنش شعاعی برای سرعت‌های زاویه‌ای مختلف ( $\omega$ ) و توان  $N=1$  از قانون توانی، رسم شده است. در این قسمت نیز، خواص مواد به دما وابسته می‌باشند. با توجه به شکل‌های فوق، با افزایش مقدار سرعت زاویه‌ای، به این علت که مقدار جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد، افزایش تنش شعاعی نیز، منطقی می‌باشد.

در شکل (۹)، تنش شعاعی به ازای  $N=1$  و سرعت زاویه‌ای ۹۰۰ رادیان بر ثانیه، برای دو حالت وابستگی و عدم وابستگی خواص مواد به دما آورده شده است. نتایج، نشان‌دهنده اختلافی در حدود ۵۰ درصد برای تنش‌های شعاعی می‌باشند که این موضوع اهمیت در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما را اثبات می‌کند.

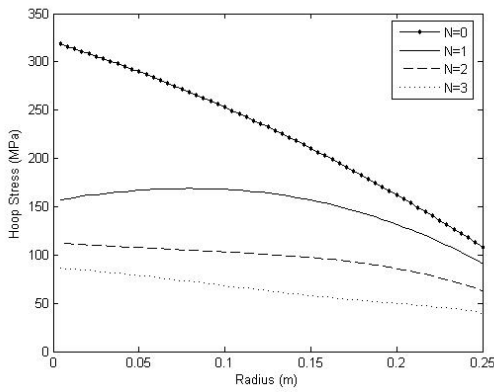
در ابتدا، نتایج مقادیر جابه‌جایی شعاعی در شکل (۲)، برای تعداد المان‌های متفاوت بررسی شده است. شکل فوق برای دیسک دواری با سرعت ۹۰۰ رادیان بر ثانیه و همچنین به ازای مقدار  $N=0$  می‌باشد. با توجه به همگرایی پاسخها، برای نتایج بعدی، ۳۰ المان در نظر گرفته شده است. در شکل (۳)، نتایج این مقاله با نتایج مرجع [۲۲]، مقایسه شده است. در حالتی که ماده کامپوزیتی نباشد، حل معادلات ساده شده و یک جواب دقیق به دست می‌آید [۲۲]. بدین ترتیب فرض شده است که در کد نوشته شده ماده کاملاً فلزی بوده و سرعت دورانی ۹۰۰ رادیان بر ثانیه است. حال با رسم



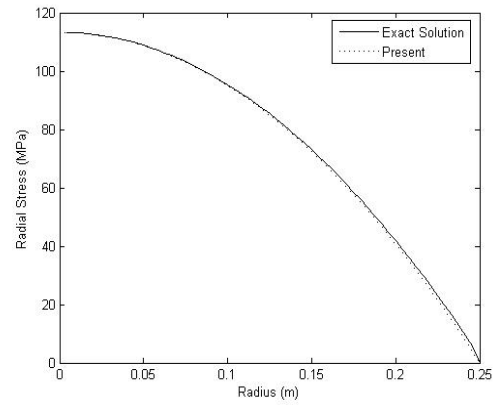
شکل (۵) تنش شعاعی بر حسب شعاع دیسک توپر برای  $N$ های مختلف به ازای سرعت زاویه‌ای ۹۰۰ رادیان بر ثانیه



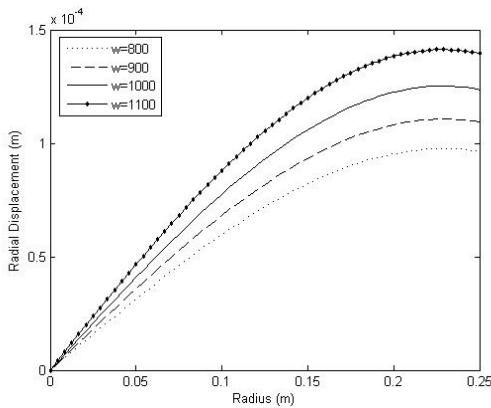
شکل (۲) جابه‌جایی شعاعی بر حسب شعاع دیسک توپر برای تعداد المان‌های متفاوت به ازای  $N = 0$



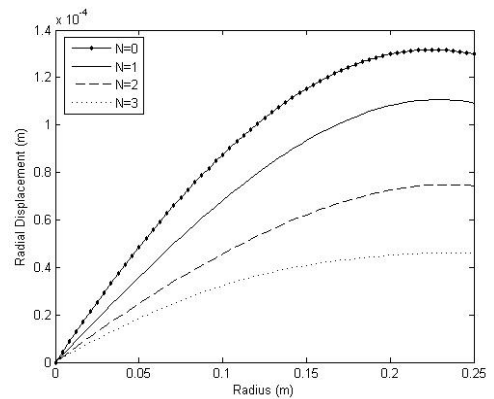
شکل (۶) تنش محیطی بر حسب شعاع دیسک توپر برای  $N$ های مختلف به ازای سرعت زاویه‌ای ۹۰۰ رادیان بر ثانیه



شکل (۳) تنش شعاعی بر حسب شعاع دیسک توپر برای ماده کاملاً فلزی به ازای سرعت زاویه‌ای ۹۰۰ رادیان بر ثانیه



شکل (۷) جابه‌جایی شعاعی بر حسب شعاع دیسک توپر برای  $w$ های مختلف به ازای  $N=1$

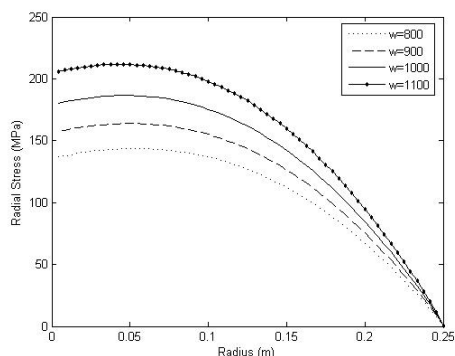


شکل (۴) جابه‌جایی شعاعی بر حسب شعاع دیسک توپر برای  $N$ های مختلف به ازای سرعت زاویه‌ای ۹۰۰ رادیان بر ثانیه

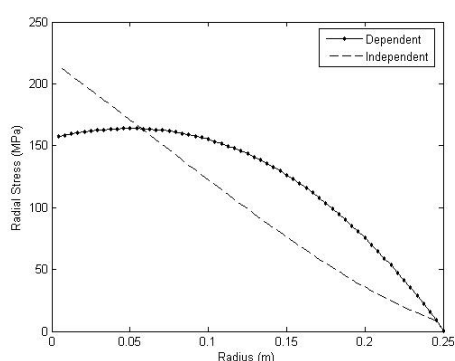
می‌یابند. نتایج نشان می‌دهد که خطای ناشی از در نظر نگرفتن وابستگی خواص مواد به دما، برای تنشهای شعاعی قابل ملاحظه است و این موضوع، بر لزوم بررسی تغییرات خواص مواد با دما، تأکید می‌نماید.

### ۸- فهرست علائم

$E$	مدول الاستیسیته، $Pa$
$N$	توان توزیع مواد
$[N]$	ماتریس توابع شکل
$P_c$	خواص وابسته به دمای سرامیک
$P_m$	خواص وابسته به دمای فلز
$P_o$	خصوصیات در دمای محیط
$P_{o,c}$	خصوصیات سرامیک در دمای محیط
$P_{o,m}$	خصوصیات فلز در دمای محیط
$r_i$	شعاع داخلی، $m$
$r_o$	شعاع بیرونی، $m$
$T$	دما، $K$
$T_{\infty}$	دمای محیط، $K$
$u$	جابجایی، $m$
$V_c$	کسر حجمی سرامیک
$V_m$	کسر حجمی فلز
$\alpha$	ضریب انبساط حرارتی، $\frac{1}{K}$
$\xi$	مختصات طبیعی
$\rho$	دانسیته، $\frac{kg}{m^3}$
$\nu$	ضریب پواسون
$\Omega$	سطح
$c$	سرامیک
$m$	فلز
$i$	سطح داخلی
$o$	سطح بیرونی



شکل (۸) تنش شعاعی بر حسب شعاع دیسک توپر برای  $\omega$  های مختلف به ازای  $N=1$



شکل (۹) تنش شعاعی بر حسب شعاع دیسک توپر برای دو حالت وابستگی و عدم وابستگی خواص مواد به دما

### ۷- نتیجه گیری

در این مقاله تحلیل غیرخطی تنش‌های ترموالاستیک شعاعی و محیطی یک دیسک دوار از جنس مواد FGM و با استفاده از روش اجزاء محدود انجام شده است. دیسک فوق با به کارگیری از المان‌های یک بعدی مرتبه دو (با سه نقطه گره) مش‌بندی شده است. شرایط مرزی هندسی و تنش‌ی، به شکل عدم وجود فشار خارجی در لایه بیرونی دیسک، و جابه‌جایی صفر در مرکز آن تعریف می‌شود. تغییرات دما نیز به صورت یک منحنی درجه دو در نظر گرفته شده است. تغییرات خواص مواد، شامل مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ضریب انبساط خطی حرارتی، با استفاده از تابعی توانی بر حسب تغییرات شعاع دیسک و با توجه به وابستگی آن‌ها به دما، مدل شده‌اند. نتایج و نمودارهای حاصل از مثال عددی ارائه شده، نشان می‌دهند که با افزایش پارامتر توان ( $N$ ) قانون توانی، جابه‌جایی شعاعی، تنش‌های شعاعی و محیطی، کاهش و با افزایش سرعت زاویه‌ای دیسک، مقادیر فوق افزایش

## مراجع

- [۱۵] Chen W.Q., Lee K.Y., Stresses in rotating cross-ply laminated hollow cylinders with arbitrary axial, *J. Strain Analysis*, Vol. ۳۹, ۲۰۰۴, pp. ۴۳۷-۴۴۵
- [۱۶] Mian M.A., Spencer A.J.M., Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials, *J. Solid Mechanics*, Vol. ۴۶, ۱۹۹۸, pp. ۲۲۸۳-۹۵.
- [۱۷] Chen J., Ding H., Chen W., Three-dimensional analytical solution for a rotating disc of functionally graded materials with transverse isotropy, *J. Applied Mechanics*, Vol. ۷۷, ۲۰۰۷, pp. ۲۴۱-۲۵۱.
- [۱۸] Hosseini Kordkheili S.A., Naghdabadi R., Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, *J. Composite Structures*, Vol. ۷۹, ۲۰۰۷, pp. ۵۰۸-۵۱۶.
- [۱۹] Zenkour A.M., Stress distribution in rotating composite structures of functionally graded solid disks, *J. Materials Processing Technology*, Vol. ۲۰۹(۷), ۲۰۰۹, pp. ۳۵۱۱-۱۷.
- [۲۰] Bayat M., Sahari B.B., Saleem M., Ali A., Wong S.V., Thermoelastic solution of a functionally graded variable thickness rotating disk with bending based on the first-order shear deformation theory, *J. Thin-walled Structure*, Vol. ۴۷, Issue ۵, ۲۰۰۹, Pages ۵۶۸-۵۸۲.
- [۲۱] Reddy J.N., Chin C.D., Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates, *J. Thermal Stresses*, Vol. ۲۱, ۱۹۹۸, pp. ۵۹۳-۶۲۶.
- [۲۲] Budynas R.G., *Advanced Strength And Applied Stress Analysis*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, ۱۹۷۷.
- [۲۳] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall International Inc., ۱۹۸۷.
- [۱] Suresh S., Mortensen A., *Fundamental of Functionally Graded Materials*, Barnes and Noble Pub, ۱۹۹۸.
- [۲] Koizumi M., Nino M., Overview of FGM research in Japan, *MRS Bulletin*, Vol. ۲۰, ۱۹۹۵, pp. ۱۹-۲۱.
- [۳] Kaysser W.A., Ilschner B., FGM research activities in Europe, *MRS Bulletin*, Vol. ۲۰, ۱۹۹۵, pp. ۲۲-۲۶.
- [۴] Research on the basic technology for the development of functionally graded materials for relaxation of thermal stress, Science on Technology Agency of Japanese Government Report, ۱۹۸۷.
- [۵] Timoshenko S.P., Goodier J.N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, ۱۹۸۷
- [۶] Lekhnitskii S.G., *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach, London, ۱۹۶۸.
- [۷] Seireg A., Surana K.S., Optimum design of rotating disks, *J. Engineering*, Vol. ۹۲, ۱۹۷۰, pp. ۱-۱۰.
- [۸] Murthy D.N.S., Sherbourne A.N., Elastic stresses in anisotropic disks of variable axial, *J. Mechanical Science*, Vol. ۱۲, ۱۹۷۰, pp. ۶۲۷-۶۴۰.
- [۹] Yeh K.Y., Han R.P.S., Analysis of high-speed rotating disks with variable axial and inhomogeneity, *J. Applied Mechanics*, Vol. ۶۱, ۱۹۹۴, pp. ۱۸۶-۱۹۱.
- [۱۰] Leissa A.W., Vagins M., The design of orthotropic materials for stress optimization, *J. Solids Structures*, Vol. ۱۴, ۱۹۷۸, pp. ۵۱۷-۵۲۶.
- [۱۱] Jain R., Ramachandra K., Simha K.R.Y., Rotating anisotropic disc of uniform strength, *J. Mechanical Science*, Vol. ۴۱, ۱۹۹۹, pp. ۶۳۹-۶۴۸.
- [۱۲] Jain R., Ramachandra K., Simha K.R.Y., Singularity in rotating orthotropic discs and shells, *J. Solids Structures*, Vol. ۳۷, ۲۰۰۰, pp. ۲۰۳۵-۵۸
- [۱۳] Zhou F., Ogawa A., Elastic solutions for a solid rotating disk with cubic anisotropy, *J. Applied Mechanics*, Vol. ۶۹, ۲۰۰۲, pp. ۸۱-۸۳
- [۱۴] Ramu S.A., Iyengar K.J., Quasi-three dimensional elastic stresses in rotating disks, *J. Mechanical Science*, Vol. ۱۶, ۱۹۷۴, pp. ۴۷۳-۴۷۷