

تحلیل ارتعاشی دیسک از جنس مواد مدرج تابعی

محبوبه روائی^۱، حسن نحوی^{۲*}

* حسن نحوی: nahvi@iaukhsh.ac.ir

واژه‌های کلیدی

مواد مدرج تابعی، دیسک، تحلیل ارتعاشی،
نرم‌افزار آباکوس

چکیده

دیسک‌های سوراخ‌دار در بخش‌های مختلف صنعت کاربردهای فراوان دارند. با ساخت این دیسک‌ها از جنس مواد مدرج تابعی، قابلیت‌های بیشتری از آن‌ها می‌توان به‌دست آورد. تحلیل ارتعاشی این نوع دیسک می‌تواند در ساخت هرچه کارآمدتر آن به ما کمک کند. در این مقاله، مدل‌سازی و بررسی ارتعاشات آزاد دیسک از جنس مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت، با نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. از آن‌جا که در نرم‌افزار آباکوس در زمینه طراحی و تحلیل مواد مدرج تابعی المان خاصی تعریف نشده است، مدل‌سازی این مواد در این نرم‌افزار انجام شده است. به منظور صحت‌سنجی، نتایج تحلیل آباکوس با نتایج موجود در مقالات مقایسه شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که با تعریف لایه‌های بیشتر در راستای تغییرات خواص، نتایج به‌دست آمده به جواب‌های دقیق نزدیک‌تر می‌شود.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۱- مقدمه

در این مقاله ارتعاشات آزاد دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی ساکن، با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدول الاستیسیته و چگالی دیسک مورد مطالعه در راستای ضخامت تغییر می‌کنند. در مسائل ارتعاش آزاد مهم‌ترین هدف به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی است که برای دیسک با شرایط مرزی مختلف به‌دست می‌آیند و تاثیر عوامل مختلف بر آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در سال ۲۰۰۰، لی یو و لی [۱] ارتعاش سه بعدی ورق‌های دایره‌ای و دایره‌ای سوراخ‌دار ضخیم را مورد بررسی قرار دادند و آن را با روش اجزاء محدود حل کردند. در همین سال لی یو و همکاران [۲] به بررسی ارتعاشات متقارن محوری صفحه‌ای حلقه‌ای چرخان، با روش المان محدود و با شرایط مرزی مختلف پرداختند. در سال ۲۰۰۳، ژو و همکاران [۴،۳] تحلیل ارتعاش سه بعدی استوانه سوراخ‌دار و ورق‌های دایره‌ای و دایره‌ای سوراخ‌دار را با روش چیشف-ریتز^۱ انجام دادند. آنها روابط مربوطه را بر اساس تئوری الاستیسیته خطی برای تغییر شکل‌های کوچک به‌دست آوردند و سپس حاصلضرب چند جمله‌ای چیشف در تابع مرزی که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کرد، به عنوان توابع مجاز انتخاب کردند و با روش ریتز معادلات را حل نمودند. شیانگ هو چی و یین لنگک چانگ [۶،۵] در سال ۲۰۰۶ به تحلیل و بررسی رفتار مکانیکی یک صفحه مستطیلی شکل الاستیک بر روی بستری از مواد مدرج تابعی با ضخامت متوسط که در معرض بارگذاری عرضی و با تکیه گاه ساده بود، پرداختند. ضریب پواسون در صفحه مواد مدرج تابعی ثابت بوده و مدول یانگ آن به‌صورت پیوسته در طول ضخامت با توجه به کسر حجمی از ترکیبات با

قانون توانی و یا تابع نمایی تعریف شد. در این مقالات حل معادلات بر اساس تئوری کلاسیک ورق و سری فوریه به‌دست آمده است و نتایج به‌دست آمده با نتایج روش عددی المان محدود محک زده شده است.

نی و ژانگ [۷] در سال ۲۰۰۷ یک راه حل نیمه تحلیلی برای ارتعاشات سه بعدی صفحات مدور از جنس مواد مدرج تابعی به‌دست آوردند. در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سه بعدی صفحه مدور از مواد مدرج تابعی، با شرایط مرزی مختلف، به‌دست آمده است. در این سال همچنین ابراهیمی و راستگو [۸] ارتعاشات آزاد صفحات حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک^۲ را بررسی کردند و نتایج به‌دست آمده را با مقالات موجود مقایسه کردند.

اهمیت دیسک‌ها بر همگان واضح است، بنابراین در این مقاله، به مدل‌سازی و تحلیل مسئله با کمک نرم‌افزار آباکوس پرداخته و درستی روش مدل‌سازی و نتایج به‌دست آمده را با مقالات و کارهای انجام شده، بررسی خواهیم کرد. با پیشرفت تکنولوژی و طراحی نرم‌افزارهای مختلف می‌توان با در نظر گرفتن عوامل طراحی با هزینه کمتر، سریع‌تر به تحلیل و بررسی اجزاء مختلف دستگاه‌های صنعتی پرداخت. نرم‌افزار آباکوس^۳ یکی از قوی‌ترین نرم‌افزارهای موجود در زمینه تحلیل‌های مکانیکی است که امروزه به عنوان یک نرم‌افزار انعطاف‌پذیر در حل مسائل به روش اجزاء محدود^۴ در پژوهش‌های مهندسی دنیا جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده و به عنوان نرم افزار قدرتمند مهندسی در مراکز تحقیقاتی از آن استفاده می‌شود.

^۱ Piezoelectric^۲ Abaqus^۳ Finite Element Method (FEM)^۴ Chebyshev-Ritz

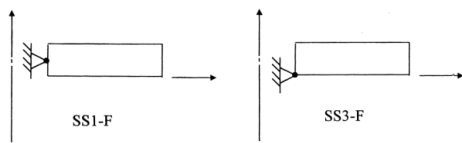
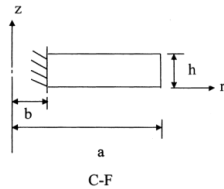
۲- بیان مسئله

مشخصات هندسی ورق حلقوی به صورت زیر تعریف

شده است:

$$\frac{a}{h} = 5, 10, 20, 50 \quad \frac{b}{a} = 0.1, 0.25, 0.5$$

a و b به ترتیب معرف شعاع بیرونی و داخلی ورق و h نیز معرف ضخامت ورق است که در مقدار آن ثابت است.



شکل (۲) شرایط مرزی در مرجع [۲]

سرعت چرخشی ورق Ω و فرکانس طبیعی ω

به صورت زیر بی بعد شده اند [۲]:

$$\bar{\Omega} = \Omega a^2 \sqrt{\rho h / 8D} \quad (۳)$$

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D} \quad (۴)$$

D نیز معرف مقدار سختی خمشی دیسک است.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۵)$$

جهت تایید اعتبار روش مدل سازی در نرم افزار

آباکوس، مقایسه ای بین نتایج حاضر و نتایج موجود قبلی

انجام شده است. فرکانس های طبیعی بی بعد مود اول و دوم

دیسک در سرعت های چرخشی متفاوت، به ترتیب در جدول

(۱) و جدول (۲) نشان داده شده است.

نتایج به دست آمده دارای اختلاف ناچیزی با نتایج موجود از

مرجع [۲] هستند که در این جداول ارائه شده اند.

۲-۲ دیسک ساکن از جنس مواد مدرج تابعی

با مدل کردن یک دیسک ساکن از جنس مواد مدرج

تابعی، نتایج به دست آمده از نرم افزار با نتایج موجود مقایسه

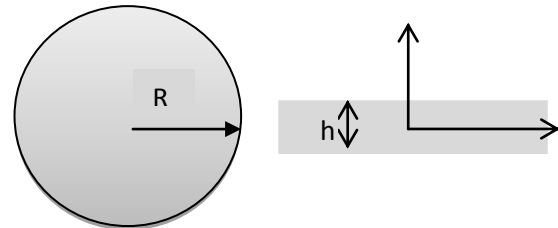
می شوند.

هدف از این بخش معرفی مسئله و به دست آوردن

معادلات ارتعاشی حاکم بر آن است. همان طور که در شکل

(۱) دیده می شود، هندسه ی مسئله عبارت است از یک

دیسک ساکن با شعاع R و ضخامت h است.



شکل (۱) نمای بالا و راست دیسک

فرکانس طبیعی آن ها تغییر مدول الاستیک و دانسیته

دیسک در راستای ضخامت به طور پیوسته بوده و طبق روابط

زیر تغییر می کند.

$$E(z) = (E_m - E_c) \left(\frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + E_c \quad (۱)$$

$$\rho(z) = (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho_c \quad (۲)$$

برای مدل سازی و تحلیل ارتعاشی دیسک مورد بررسی

قبل از هر چیز دو مدل ساده تر مدل شده و نتایج به

دست آمده با نتایج موجود مقایسه شده است.

۲-۱-۲ دیسک همگن دوار

برای بررسی صحت و دقت روش حل با آباکوس،

چند دیسک با نسبت شعاع داخلی به خارجی متفاوت، نسبت

شعاع به ضخامت، سرعت چرخشی و سه شرط مرزی

مختلف مطابق شکل (۲) را بررسی کرده و به دست آمده

است.

ورق مورد بررسی از جنس استیل با مشخصات زیر است:

$$E = 210Gpa \quad \nu = 0.3 \quad \rho = 7810 \frac{kg}{m^3}$$

E معرف مدول الاستیسیته و ρ و ν به ترتیب چگالی و

ضریب پواسون هستند.

جدول (۱) فرکانس های طبیعی بی بعد مود اول مربوط به صفحه ی همگن سوراخ دار [۲]

$\bar{\Omega}$		b/a=۰/۲۵				b/a=۰/۵					
		a/h				a/h					
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰		
$\bar{\Omega}$	B.C										
	C-F	۱۱/۱۱۹۷	۱۲/۳۱۲۱	۱۲/۶۹۴۳	۱۲/۸۱۱۷	۱۷/۶۳۳۷	۲۰/۰۹۶۶	۲۰/۹۴۴۴	۲۱/۱۸۲۴	Liu [2]	
۴	SS1-F	۱۲/۷۱	۱۲/۷۸	۱۲/۸۴	۱۲/۸۵	۲۰/۲۵	۲۰/۹۳	۲۱/۲	۲۱/۲۶	Present	
			۹/۶۲۰۲	۱۰/۲۲۴۷	۱۰/۵۲۳۶		۱۴/۴۴۳۶	۱۵/۴۹۳۵	۱۵/۹۳۹	Liu [2]	
	SS3-F	۱۰/۵۹	۱۰/۶۹	۱۰/۹۲	۱۱/۰۵	۱۵/۵۶	۱۵/۸۷	۱۶/۲۲	۱۶/۳۷	Present	
			۹/۹۷۳۸	۹/۸۱۴۳	۱۰/۱۹۲۵		۱۳/۱۴۵۳	۱۴/۳۰۳۸	۱۴/۸۶۵۵	Liu [2]	
	C-F	۹/۶۵۶	۱۰/۱۸	۱۰/۳۲	۱۰/۳۹	۱۲/۹۵	۱۳/۲۲	۱۳/۴۱	۱۳/۴۹	Present	
				۲۲/۵۸۹۲	۲۳/۰۱۳۱		۳۲/۵۰۸۴	۳۴/۸۱۵۲	۳۵/۵۶۱۶	Liu [2]	
	۸	SS1-F		۲۳/۶۵	۲۳/۲۲	۲۳/۱۴		۳۴/۷۷	۳۵/۷۴	۳۵/۷۴	Present
					۱۹/۴۶	۲۰/۲۱			۲۹/۷۴۲	۳۱/۰۴۵۹	Liu [2]
		SS3-F		۲۱/۰۲	۲۱/۱۹	۲۱/۳۲		۳۱/۶۸	۳۱/۷۶	۳۱/۹۳	Present
					۱۸/۱۸۵۱	۱۹/۲۴۷۸			۲۷/۸۸۱۴	۲۹/۴۸۸۵	Liu [2]
		۱۸/۶۹	۱۸/۴۹	۱۸/۴۳		۲۴/۴	۲۳/۴۸	۲۳/۷۵	Present		

جدول (۲) فرکانس های طبیعی بی بعد مود دوم مربوط به صفحه ی همگن سوراخ دار [۲]

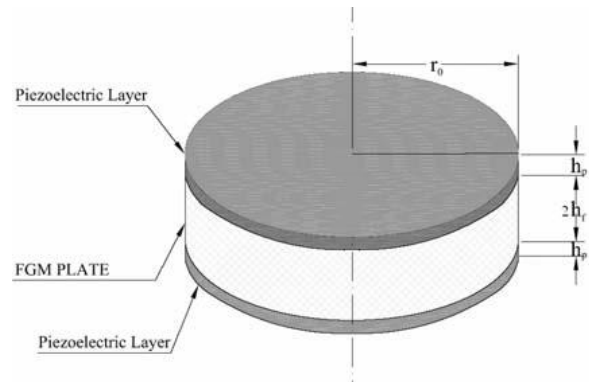
$\bar{\Omega}$		b/a=۰/۲۵				b/a=۰/۵					
		a/h				a/h					
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰		
$\bar{\Omega}$	B.C										
	C-F	۳۲/۹۳۵۱	۴۳/۶۳۹۳	۴۷/۰۱۲	۴۸/۱۹۵	۴۷/۶۴۹	۷۷/۹۰۹	۸۹/۶۹۸۷	۹۲/۰۲۵	Liu [2]	
۴	SS1-F	۴۱/۱۳	۴۵/۸	۴۷/۸۴	۴۸/۵۲	۶۴/۳۸	۸۱/۹	۹۱/۲۴	۹۴/۷۲	Present	
			۳۶/۴۹۲۸	۳۹/۵۶۲۴	۴۰/۶۵۵۸		۶۱/۱۳۲۹	۷۰/۷۱۵۴	۷۳/۶۰۶	Liu [2]	
	SS3-F	۳۷/۲۲	۴۰/۰۳	۴۱/۳۱	۴۱/۹۷	۵۸/۸۲	۶۸/۸۴	۷۳/۱۴	۷۴/۶۸	Present	
			۳۴/۶۲۹۳	۳۸/۹۵۲۲	۴۰/۴۳۹۴		۵۱/۶۳۵۹	۶۸/۰۵۹۵	۷۲/۶۲۳	Liu [2]	
	C-F	۳۵/۵۷	۳۸/۷۳	۴۰/۷۳	۴۱/۳۹	۴۷/۷۲	۵۷/۰۴	۶۸/۴۶	۷۱/۴۳	Present	
				۷۰/۳۹۶۲	۷۲/۳۲۴۲		۹۴/۵۸۳۳	۱۱۲/۵۷۸	۱۱۸/۷۹	Liu [2]	
	۸	SS1-F		۷۲/۰۶	۷۲/۵۳	۷۲/۸		۱۰۹/۷	۱۱۷/۱	۱۱۹/۸	Present
					۶۳/۳۸۵۲	۶۵/۵۰۲۸			۹۶/۵۹۶۲	۱۰۲/۶	Liu [2]
		SS3-F		۶۷/۲	۶۷/۴۵	۶۷/۹۱		۹۹/۹۶	۱۰۳/۵	۱۰۴/۹	Present
					۶۰/۹۰۰۷	۶۳/۷۲۱۸			۹۱/۸۸۰۱	۹۹/۴۳۱	Liu [2]
		۶۰/۶۲	۶۲/۳	۶۲/۵۵		۹۴/۲۷	۸۶/۷	۸۹/۶۷	Present		

دیده می‌شود که نتایج به دست آمده از حل و مدل سازی با نرم افزار آباکوس با حل تحلیلی مرجع [۸] اختلاف بسیار ناچیزی دارند.

جدول (۳) سه مود اول به دست آمده از مدل سازی و نتایج مرجع [۸]

انديس	شماره درجه بندی	FGM دیسک		نتایج مقاله [۱۰]	نتایج مدل سازی	خطا %
		مود	م			
۰ (فلز)	۱	۱	۱۳۹/۲۸	۱۳۹/۲۷	۰/۰۰۷۱۸	
	۲	۲	۲۸۹/۸۵	۲۸۹/۷۰	۰/۰۵۱۷۷۸	
	۳	۳	۴۷۴/۶۱	۴۷۳/۴۵	۰/۲۴۵۰۱	
۱	۱	۱	۱۳۵/۶۶۷	۱۳۵/۴۳	۰/۱۷۴۹۹۸	
	۲	۲	۲۸۱/۶۶	۲۸۱/۷۸	۰/۰۴۲۵۹	
	۳	۳	۴۶۰/۳۰۸	۴۶۰/۴۵	۰/۰۳۰۸۴	
۳	۱	۱	۱۳۳/۷۳۹	۱۳۳/۶۳	۰/۰۸۱۵۶۹	
	۲	۲	۲۷۷/۶۶۱	۲۷۸/۰۴	۰/۱۳۶۳۱	
	۳	۳	۴۵۳/۷۷۹	۴۵۴/۳۴	۰/۱۲۳۴۸	
۵	۱	۱	۱۳۳/۱۴۱	۱۳۳/۰۶	۰/۰۶۰۸۷۵	
	۲	۲	۲۷۶/۴۲	۲۷۶/۸۵	۰/۱۵۵۳۲	
	۳	۳	۴۵۱/۷۵۲	۴۵۲/۳۹	۰/۱۴۱۰۳	
۷	۱	۱	۱۳۲/۸۶۴	۱۳۲/۷۸	۰/۰۶۳۲۶۳	
	۲	۲	۲۷۵/۸۴۶	۲۷۶/۲۵	۰/۱۴۶۲۴	
	۳	۳	۴۵۰/۸۱۲	۴۵۱/۴۶	۰/۱۴۳۵۳	
۹	۱	۱	۱۳۲/۷۰۹	۱۳۲/۷۰	۰/۰۰۶۷۸۲	
	۲	۲	۲۷۵/۵۲۳	۲۷۶/۰۹	۰/۲۰۵۳۷	
	۳	۳	۴۵۰/۲۸۴	۴۵۰/۸۴	۰/۱۲۳۳۳	
۱۰	۱	۱	۱۳۲/۶۵۵	۱۳۲/۵۵	۰/۰۷۹۲۱۵	
	۲	۲	۲۷۵/۴۱	۲۷۵/۷۹	۰/۱۳۷۷۹	
	۳	۳	۴۵۰/۱	۴۵۰/۶۶	۰/۱۲۴۲۶	

شکل (۳) یک دیسک از جنس مواد مدرج تابعی را با دو لایه‌ی پیزوالکتریک در بالا و پایین دیسک نشان می‌دهد [۸].



شکل (۳) دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی با دو لایه‌ی پیزوالکتریک [۸]

خواص دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی در جهت ضخامت تغییر می‌کند و از روابط زیر پیروی می‌کند:

$$E(z) = (E_m - E_c) \left(\frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + E_c \quad (6)$$

$$\rho(z) = (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{z}{2h_f} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho_c \quad (7)$$

در روابط فوق g معرف اندیس درجه بندی، E_c و ρ_c به ترتیب معرف مدول الاستیسیته و چگالی سرامیک و E_m و ρ_m نیز به ترتیب معرف مدول الاستیسیته و چگالی فلز هستند که مقادیر آنها برابرند با:

$$E_c = 205Gpa \quad \rho_c = 8900 \frac{kg}{m^3}$$

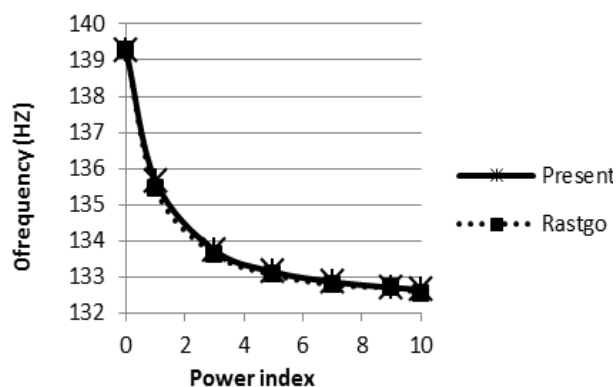
$$E_m = 200Gpa \quad \rho_m = 7800 \frac{kg}{m^3}$$

$$r_o = 600mm \quad h_f = 10mm \quad h_p = 2mm$$

برای مدل کردن قسمتی از دیسک که از جنس مواد مدرج تابعی است، در نرم افزار باید دیسک را در جهت ضخامت لایه بندی کرد. با لایه بندی دیسک به تعداد ۳۲ لایه در راستای ضخامت و تخصیص دادن خواص مربوط به هر لایه، جواب های قابل قبولی، با اختلاف ناچیز نسبت به نتایج مرجع [۸]، به دست آمد. مقایسه نتایج تحلیل آباکوس با نتایج مرجع [۸] در جدول (۳) ارائه شده است. از شکل (۴)

مراجع:

- [1] Liu C.F., Lee Y.T., Finite element analysis of three-dimensional vibration of thick circular and annular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, 2000, pp.63-80.
- [2] Liu C.F., Lee J.F., Lee Y.T., Axisymmetric vibration analysis of rotating annular plates by a 3D finite element, *Journal of Solid and Structures*, Vol. 37, 2000, pp. 5813-5827.
- [3] Zhou D., Cheung Y.K., Lo S.H., Au F.T.K., 3D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev-Ritz method, *Journal of Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, 2003, pp. 1575-1589.
- [4] Zhou D., Cheung Y.K., Lo S.H., Au F.T.K., Three-dimensional vibration analysis of circular and annular plates via Chebyshev-Ritz method, *Journal of Solid and Structures*, Vol. 40, 2003, pp. 3089-3105.
- [5] Chi S., Chung Y., Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, 2006, pp 3657-3674.
- [6] Chi S., Chung Y., Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part II: Numerical results, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, 2006, pp 3674-3691.
- [7] Nie G.J., Zhong Z., Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates, *Journal of Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, 2007, pp. 4901-4910,.
- [8] Ebrahimi F., Rastgoo A., Free vibration analysis of smart annular FGM plates integrated with piezoelectric layers, *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, 2008, pp. 13.



شکل (۴) اثر اندیس درجه بندی بر فرکانس اول و مقایسه با مرجع [۸]

۳- نتیجه گیری

در مقاله ارائه شده به بررسی و تحلیل ارتعاشی دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت با کمک آباکوس پرداخته شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس های طبیعی دیسک به صورت زیر جمع بندی شده است:

۱. برای دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی با تابع توانی در راستای ضخامت، با افزایش تعداد لایه بندی، فرکانس به سمت مقدار مشخصی همگرا می شود و جواب های دقیق تری را نتیجه می دهد.

۲. با افزایش اندیس درجه بندی g از ۰ تا ۱۰، طبق رابطه تعریف شده، خواص دیسک به ماده تعریف شده در سطح بالایی دیسک (در این مقاله سرامیک) میل می کند و فرکانس های طبیعی کاهش می یابند.

۳. با افزایش سرعت چرخشی دیسک، فرکانس طبیعی

نیز افزایش می یابد.