

تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چند لایه تحت شرایط مرزی گوناگون به روش گلرکین

آیدین نصیری راد^۱، رضا انصاری^{۲*}، حسام روحی^۳

* ایمیل نویسنده مسئول: r_ansari@guilan.ac.ir

واژه‌های کلیدی

ارتعاشات آزاد، ارتعاشات اجباری، پوسته مخروطی، کامپوزیت چند لایه، روش گلرکین.

چکیده

در این مقاله، فرکانس طبیعی و پاسخ ارتعاش اجباری پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چند لایه به ازای شرایط مرزی گوناگون بررسی شده اند. معادلات پوسته نازک دائل به عنوان معادلات حاکم در نظر گرفته شده، از روش تحلیلی گلرکین برای حل معادلات حرکت در مسئله ارتعاش آزاد استفاده شده و توابع شکل مودهای تیر به عنوان توابع وزن روش گلرکین بکار گرفته شده اند که با این انتخاب می‌توان شرایط مرزی گوناگون پوسته را در حل معادلات در نظر گرفت. به منظور یافتن پاسخ ارتعاش اجباری نیز روش تعیین ضرایب مشارکت مودال بکار گرفته شده است. نتایج عددی بدست آمده نشان می‌دهد که بیشترین مقادیر پارامتر فرکانسی در شرط مرزی FC و کمترین آن در شرط مرزی CC و FS اتفاق می‌افتد. افزایش تعداد لایه‌ها و افزایش نسبت شعاع به طول منجر به افزایش پارامتر فرکانسی و افزایش نسبت ارتوتروپی منجر به کاهش پارامتر فرکانسی می‌شود. نتایج بدست آمده در تحلیل ارتعاش آزاد با نتایج مقاله‌های موجود مقایسه شده و صحت آنها مورد اطمینان می‌باشند.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان

۲- دانشیار، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

۳- دانشجوی دکتری، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

۱- مقدمه

هدف از این تحقیق، مطالعه رفتار ارتعاش آزاد و اجباری پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چند لایه با روشی تحلیلی است. از آنجایی که شرایط مرزی تاثیر بسزایی بر پاسخ ارتعاشی پوسته‌ها دارند، از این رو ارائه راهکاری برای محاسبه تاثیر شرایط مرزی گوناگون بر پاسخ ارتعاشی پوسته مخروطی یکی از اهداف این تحقیق می‌باشد. تاثیر نیم زاویه راس، تعداد لایه‌ها، طول و ضخامت پوسته‌ها و نسبت ارتوتروپی در پاسخ ارتعاشی پوسته‌های مخروطی نیز از اهداف دیگر این مطالعه می‌باشند.

از جمله مطالعات صورت گرفته پیرامون ارتعاشات پوسته‌های مخروطی می‌توان به مواردی که در ادامه بیان می‌شوند اشاره نمود. ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک تحت شرایط مرزی مختلف توسط ویلکینز و همکارانش [۱] مورد بررسی قرار گرفته اند. خصوصیات ارتعاشی پوسته‌های مرکب مخروطی- استوانه‌ای توسط آیری و همکارانش [۲] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. روش اجزای محدود برای تحلیل ارتعاشات آزاد متقارن محوری پوسته‌های مخروطی با ضخامت متغیر توسط آیری و همکارانش [۳] بکار گرفته شده است. شوو [۴] یک روش عددی را برای تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ایزوتروپیک به کار برد. مقاله‌ای با موضوع ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک دوار نیز توسط لم و هوا [۵] منتشر شده است. هو و همکارانش [۶] تاثیر راستای الیاف پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی را بر فرکانس ارتعاشات، مورد تجزیه و تحلیل قرار داده اند. با به کارگیری روشی عددی رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی با ضخامت متغیر توسط وو و لی [۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. این تحلیل قابلیت کاربرد برای پوسته‌های استوانه‌ای و ورق‌های حلقوی را نیز دارا می‌باشد. با در نظر گرفتن تانسور کرنش گرین، هوو و همکارانش [۸] ارتعاشات

پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. سیوالک [۹] ارتعاشات پوسته‌های مخروطی دوار را مورد مطالعه قرار داد. ارتعاشات آزاد ترکیب پوسته مخروطی- ورق کامپوزیتی متقارن به کمک روش ماتریس انتقال توسط لیانگ و همکارانش [۱۰] مورد تحقیق قرار گرفته است. بر مبنای روش اجزای محدود، ارتعاشات پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی توسط تریپاتی و همکارانش [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. سیوالک [۱۲] همچنین ارتعاشات پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی را مورد تحقیق قرار داد. تحلیل وی به مانند تحلیل ارائه شده در مرجع [۷] قابل استفاده برای پوسته‌های استوانه‌ای و ورق‌های حلقوی است. سوفیف همچنین با تعداد دیگری از محققان [۱۳] ارتعاشات و کماتش پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک غیرهمگن با تکیه‌گاه‌های آزاد تحت بارگذاری‌های متفاوت را مورد بررسی قرار داد. وی همچنین، طی تحقیقی دیگر کار قبلی خود را به پوسته‌های مخروطی مرکب تممید داد [۱۴]. ارتعاشات و کماتش پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک غیرهمگن با تکیه‌گاه‌های گیردار تحت فشار خارجی نیز توسط سوفیف و همکارانش [۱۵] مطالعه شده است. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی به روش اجزای محدود نیز توسط دی و همکارانش [۱۶] انجام شده است. تحلیل ارتعاشی پوسته مخروطی کامپوزیتی چند لایه به کمک یک روش اسپلاین نیز توسط ویسوانتان و همکارانش [۱۷] انجام شد. سوفیف و کوروگلو [۱۸] تحلیل ارتعاش پوسته مخروطی بر بستر الاستیک را به ازای شرایط مرزی گوناگون انجام دادند. ملک زاده و حیدرپور [۱۹] ارتعاش غیرخطی پوسته مخروطی را به روش اجزای محدود مورد مطالعه قرار دادند. سیوالک [۲۰] تحلیل ارتعاشی پوسته مخروطی چند لایه را بر پایه تئوری تغییر شکل برشی انجام داد. او این مسئله را به روشی عددی تحلیل نمود.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z \frac{\partial w_0(x, \theta)}{\partial x} \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) - z \frac{1}{x \sin \varphi} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

که u_0 ، v_0 و w_0 مولفه‌های جابجایی صفحه میانی پوسته می‌باشند و با جایگذاری این میدان جابجایی در روابط (۱) روابط زیر حاصل می‌گردند

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z \kappa_x$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{0\theta} + z \kappa_\theta \quad (3)$$

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{0x\theta} + z \kappa_{x\theta}$$

که ε_x و ε_θ کرنش‌های نرمال و $\gamma_{x\theta}$ کرنش برشی پوسته، κ_x و κ_θ تغییرات انحنا و $\kappa_{x\theta}$ انحنا پیچشی می‌باشند. ε_{0x} ، $\varepsilon_{0\theta}$ و $\gamma_{0x\theta}$ کرنش‌های صفحه میانی می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_{0\theta} &= \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{x} + \frac{w_0}{x \tan(\varphi)} \\ \gamma_{0x\theta} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{x} \end{aligned} \quad (4)$$

و روابط مربوط به انحناها بر طبق تئوری پوسته نازک دائل به قرار زیر می‌باشند [۲۱]

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \kappa_\theta &= -\frac{1}{x^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{x \sin(\varphi)} \left(\frac{2}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

معادله تنش-کرنش برای یک المان از پوسته مخروطی کامپوزیتی نازک چند لایه در لایه k ام را از قانون هوک می‌توان بصورت زیر نوشت [۲۱]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix}_k \quad (6)$$

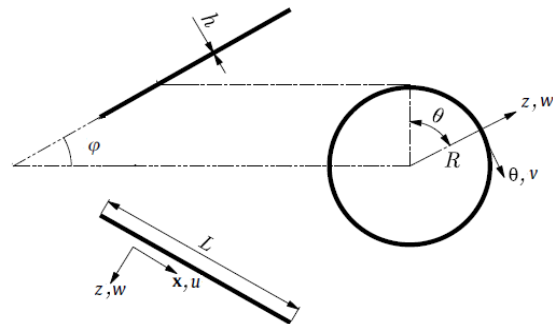
که σ_x و σ_θ مولفه‌های تنش نرمال و $\sigma_{x\theta}$ مولفه تنش برشی صفحه‌ای می‌باشند. مولفه‌های Q_{ij} ضرائب سختی الاستیک

در این مطالعه، رفتار ارتعاشی پوسته مخروطی کامپوزیتی چند لایه مدلسازی ریاضی می‌شود. برای روابط اساسی از فرضیات پوسته‌های نازک دائل استفاده شده و معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله بر پایه اصل همپلتون استخراج می‌گردند. برای حل معادلات دیفرانسیل حرکت از روش تحلیلی گلرکین استفاده می‌شود. از توابع تیر برای تقریب متغیرهای میدان استفاده می‌گردد که با این تکنیک می‌توان با تقریب خوبی رفتار پوسته‌های مخروطی تحت شرایط مرزی مختلف را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در نهایت به کمک آنالیز مودال پاسخ ارتعاش اجباری پوسته مخروطی بدست می‌آید.

۲- معادلات حاکم

روابط کرنش-جابجایی مربوط به پوسته مخروطی نازک تک لایه شکل (۱) عبارتند از [۲۱]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{x} + \frac{w}{x \tan(\varphi)} \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{x} \end{aligned} \quad (1)$$



شکل (۱) هندسه پوسته مخروطی

که u ، v و w به ترتیب جابجایی‌های طولی، محیطی و شعاعی در جهت‌های x ، θ و z می‌باشند و φ نیم زاویه راس مخروط می‌باشد.

با در نظر گرفتن میدان جابجایی خطی پوسته نازک بصورت [۲۱]:

با بکاگیری اصل همیتون و با اعمال فرضیات تئوری پوسته نازک دائل معادلات حرکت پوسته مخروطی بصورت زیر حاصل می‌گردند [۲۱]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{N_x - N_\theta}{x} + \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x &= I \ddot{u}_0^2 \\ \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2N_{x\theta}}{x} + q_\theta &= I \ddot{v}_0^2 \\ -\frac{N_\theta}{x \tan(\varphi)} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{Q_x}{x} + \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + q_z &= I \ddot{w}_0^2 \end{aligned} \quad (11)$$

که

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{M_x}{x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - \frac{M_\theta}{x} \\ Q_\theta &= \frac{1}{x \sin(\varphi)} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2M_{x\theta}}{x} \end{aligned} \quad (12)$$

و

$$I = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} dz \quad (13)$$

که در آن $\rho^{(k)}$ چگالی حجمی لایه k ام می‌باشند. q_x ، q_θ و q_z نیز بارهای خارجی بر واحد سطح در جهت‌های x ، θ و z می‌باشند.

با اعمال نیروها و گشتاورهای رابطه (۱۰) در معادلات (۱۱)، معادلات زیر حاصل می‌گردند

$$\begin{aligned} l_{11}u_0 + l_{12}v_0 + l_{13}w_0 - I \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= -q_x \\ l_{21}u_0 + l_{22}v_0 + l_{23}w_0 - I \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} &= -q_\theta \\ l_{31}u_0 + l_{32}v_0 + l_{33}w_0 - I \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} &= -q_z \end{aligned} \quad (14)$$

که عملگرهای l_{ij} در مرجع [۲۲] داده شده‌اند.

۳- حل معادلات حرکت به روش گلرکین و تحلیل ارتعاشات آزاد

جابجایی صفحه میانی یک لایه از پوسته مخروطی در یک

حرکت نوسانی را می‌توان بصورت زیر بیان نمود [۲۲]

$$\begin{aligned} u_0(x, \theta, t) &= U(x, \theta) e^{j\omega t} \\ v_0(x, \theta, t) &= V(x, \theta) e^{j\omega t} \\ w_0(x, \theta, t) &= W(x, \theta) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (15)$$

ماده هستند که در هر لایه نسبت به لایه دیگر متفاوتند و این بدلیل تفاوت ماده و جهت الیاف در هر لایه می‌باشد.

با انتگرال گیری از تنش‌های هر لایه از پوسته نازک می‌توان روابط نیرو بر واحد طول پوسته چند لایه را بدست آورد

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix}_k dz \quad (7)$$

و به طریقی مشابه روابط گشتاور بر واحد طول نیز حاصل می‌گردند که عبارتند از

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix}_k z dz \begin{bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \quad (8)$$

که N_x و N_θ نیروهای نرمال بر واحد طول، $N_{x\theta}$ نیروی برشی بر واحد طول، M_x و M_θ گشتاورهای خمشی بر واحد طول و $M_{x\theta}$ گشتاور پیچشی بر واحد طول پوسته می‌باشند

با جایگذاری معادله ماتریس (۶) در روابط (۷) و (۸) و تعریف ماتریس‌های $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ که به ترتیب ماتریس‌های سختی کششی، کوپلینگ و خمشی نام دارند

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [Q_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= 1/2 \sum_{k=1}^N [Q_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= 1/3 \sum_{k=1}^N [Q_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (9)$$

در نهایت یک دستگاه خطی شش معادله شش مجهولی بصورت زیر حاصل می‌شود که بیانگر رابطه بین کرنش‌های صفحه میانی و نیروها و گشتاورهای وارد بر پوسته مخروطی کامپوزیتی چند لایه می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0\theta} \\ \gamma_{0x\theta} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

لازم به ذکر است برای پوسته‌های مرکبی که نسبت به سطح میانی شان متقارن‌اند، تمام جملات B_{ij} صفر خواهند شد.

$$V \approx a_{21}f_{21} = a_{21}\beta(x) \sin(n\theta - \Phi) \quad (19)$$

$$W \approx a_{31}f_{31} = a_{31}\gamma(x) \cos(n\theta - \Phi)$$

که n شماره مود محیطی می باشد.

برای متغیرهای محوری مولفه‌های جابجایی یعنی $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ و $\gamma(x)$ باید توابعی تعریف گردند که شرایط مرزی مشابهی با شرایط مرزی پوسته مخروطی داشته باشند. یک انتخاب مناسب در این مورد، استفاده از توابع شکل مودهای تیر اویلر است. برای این منظور شرایط مرزی تیر و پوسته باید شبیه به هم باشند. استدلال هم بر این اصل استوار است که رفتار یک نوار باریک محوری پوسته مخروطی باید شبیه به رفتار تیری با شرایط مرزی مشابه باشد. این انتخاب این امکان را می دهد که بتوان تحلیل ارتعاشی پوسته‌های مخروطی را به ازای شرایط مرزی گوناگون بدون درگیر شدن با محاسبات پیچیده شرایط مرزی انجام داد. از این رو با حل معادله حاکم بر ارتعاش عرضی آزاد تیر اویلر، تابع موسوم به تابع تیر بدست آمده و مورد استفاده قرار می گیرد. [۲۲]

معادله حاکم بر ارتعاش عرضی آزاد تیر اویلر بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

که E ، I و μ به ترتیب مدول یانگ، ممان دوم سطح و جرم واحد طول می باشند. با حل معادله بالا معادله حاکم بر جابجایی عرضی تیر بدست می آید

$$\phi(x) = \alpha_1 \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) - \zeta_m \left(\alpha_3 \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \right) \quad (21)$$

که α_i ثوابتی هستند که بنا به شرایط مرزی می توانند مقادیر صفر، یک یا منفی یک را اختیار نمایند. λ_m نیز ریشه‌های معادلات غیرجبری بدست آمده از شرایط مرزی می باشند و ζ_m ضریبی است که بصورت تابعی از λ_m می باشد. مقادیر α_i ، λ_m و ζ_m در جدول (۱) برای انواع شرایط مرزی

که ω فرکانس حرکت نوسانی است. با اعمال روابط (۱۵) در معادلات (۱۴) و با مساوی صفر قرار دادن مقدار بارهای خارجی روابط زیر حاصل می گردند

$$\begin{aligned} l_{11}U + l_{12}V + l_{13}W - I\omega^2 U &= 0 \\ l_{21}U + l_{22}V + l_{23}W - I\omega^2 V &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

برای حل دستگاه معادلات (۱۶) به روش گلرکین می توان در حالت کلی توابع U ، V و W را بصورت زیر نوشت [۲۲]

$$\begin{aligned} U &= \sum_{j=1}^n a_{1j} f_{1j} \\ V &= \sum_{j=1}^n a_{2j} f_{2j} \\ W &= \sum_{j=1}^n a_{3j} f_{3j} \end{aligned} \quad (17)$$

که توابع f_{ij} می بایست شرایط مرزی هندسی را ارضا کنند و ضرایبی ثابت می باشند.

با یک تقریب مناسب می توان فقط جملات اول را در نظر گرفت و با اعمال روش حل گلرکین به معادلات حرکت (۱۶) سه معادله انتگرالی زیر حاصل می گردند [۲۲]:

$$\begin{aligned} \int_x \int_\theta [L_1 \{af_{11}, bf_{21}, cf_{31}\} - I\omega^2 (af_{11})] f_{11} x \sin(\varphi) d\theta dx &= 0 \\ \int_x \int_\theta [L_2 \{af_{11}, bf_{21}, cf_{31}\} - I\omega^2 (bf_{21})] f_{21} x \sin(\varphi) d\theta dx &= 0 \\ \int_x \int_\theta [L_3 \{af_{11}, bf_{21}, cf_{31}\} - I\omega^2 (cf_{31})] f_{31} x \sin(\varphi) d\theta dx &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

با مدنظر قرار دادن این مطلب که در یک فرکانس طبیعی هر نقطه در سیستم الاستیک حرکتی هارمونیک دارد، توابع f_{11} ، f_{21} ، f_{31} را می توان بصورت ترکیب توابع دربردارنده متغیرهای محوری و محیطی جابجایی نوشت [۲۲]:

$$U \approx a_{11}f_{11} = a_{11}\alpha(x) \cos(n\theta - \Phi)$$

گفت که پاسخ دینامیکی پوسته مخروطی از مجموع پاسخ دینامیکی تمام مودهای تحریک شده بدست می‌آید. میزان تاثیر هر ترکیب مود طبیعی محوری و محیطی در پاسخ دینامیکی کل پوسته مخروطی را با ضریب مشارکت مودال η_{mn} نشان می‌دهند. مقدار این ضریب برای هر تحریک خارجی وابسته به طبیعت تحریک می‌باشد و می‌تواند مقدار صفر برای بعضی از مودها تا مقادیر بالاتر برای مودهای دیگر را در برگیرد. بنابراین پاسخ دینامیکی پوسته مخروطی به ازای مود محوری m و مود محیطی n را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۲]

$$\begin{aligned} u_{0mn}(x, \theta, t) &= \eta_{mn} U_{mn}(x, \theta) \\ v_{0mn}(x, \theta, t) &= \eta_{mn} V_{mn}(x, \theta) \\ w_{0mn}(x, \theta, t) &= \eta_{mn} W_{mn}(x, \theta) \end{aligned} \quad (23)$$

با اعمال روابط (۲۳) در معادلات حرکت پوسته‌های مخروطی و در نظر گرفتن مولفه‌های بارگذاری بصورت بارهای گسترده هارمونیک $q = -q^*(x, \theta)e^{j\omega t}$ روابط زیر حاصل می‌گردند [۲۲]

$$\begin{aligned} L_1\{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}\}\eta_{mn} - \lambda U_{mn}\dot{\eta}_{mn} - IU_{mn}\ddot{\eta}_{mn} &= -q_x^*(x, \theta) \\ L_2\{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}\}\eta_{mn} - \lambda V_{mn}\dot{\eta}_{mn} - IV_{mn}\ddot{\eta}_{mn} &= -q_\theta^*(x, \theta) \\ L_3\{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}\}\eta_{mn} - \lambda W_{mn}\dot{\eta}_{mn} - IW_{mn}\ddot{\eta}_{mn} &= -q_z^*(x, \theta) \end{aligned} \quad (24)$$

که λ ضریب میرایی ویسکوز معادل می‌باشد. با استفاده از آنالیز مختلط و در نظر گرفتن خاصیت تعامد مودهای طبیعی و انجام عملیات ریاضی در نهایت معادله زیر حاصل می‌گردد [۲۲]

$$\ddot{\eta}_{mn} + 2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} = F_{mn}(t) \quad (25)$$

که ξ_{mn} ضریب میرایی مودال می‌باشد و

$$\begin{aligned} F_{mn}(t) &= \frac{1}{IN_{mn}} \int_x \int_\theta (q_x U_{mn} + q_\theta V_{mn} + q_z W_{mn}) x \sin(\varphi) d\theta dx \\ N_{mn} &= \int_x \int_\theta (U_{mn}^2 + V_{mn}^2 + W_{mn}^2) x \sin(\varphi) d\theta dx \end{aligned} \quad (26)$$

مختلف لیست شده اند. m شماره مود محوری است. شرایط مرزی شش گانه عبارتند از شرایط مرزی تکیه گاه ساده - تکیه گاه ساده (SS)، گیردار - گیردار (CC)، آزاد - آزاد (FF)، تکیه گاه ساده - گیردار (SC)، آزاد - گیردار (FC)، آزاد - تکیه گاه ساده (FS) که در جدول (۱) نشان داده شده اند. لازم به ذکر است که برای شرایط مرزی آزاد-آزاد فرکانس‌های طبیعی صفر وجود دارند.

با به کارگیری تابع تیر، متغیرهای محوری مولفه‌های جابجایی در راستای محوری را می‌توان به فرم زیر بیان نمود [۲۲]

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \\ \beta(x) &= \phi(x) \\ \gamma(x) &= \phi(x) \end{aligned} \quad (22)$$

جایگذاری روابط (۲۲) در روابط (۱۹) و اعمال در معادلات انتگرالی حرکت (۱۸) و محاسبه این انتگرال‌ها منجر به یک معادله جبری مرتبه شش بر حسب ω می‌شود که از حل این معادله جبری فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی بدست می‌آیند.

جدول (۱) شرایط مرزی و پارامترهای تابع تیر [۲۳]

شرایط مرزی	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	λ_m	ζ_m
SS	0,0,0,-1	$m\pi$	1
CC	1,-1,1,-1	$\cos\lambda_m \cosh\lambda_m = 1$	$\frac{\cosh\lambda_m - \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m - \sin\lambda_m}$
FF	1,1,1,1	$\cos\lambda_m \cosh\lambda_m = 1$	$\frac{\cosh\lambda_m - \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m - \sin\lambda_m}$
SC	1,-1,1,-1	$\tan\lambda_m = \tanh\lambda_m$	$\frac{\cosh\lambda_m - \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m - \sin\lambda_m}$
FC	1,-1,1,-1	$\cos\lambda_m \cosh\lambda_m = -1$	$\frac{\sinh\lambda_m - \sin\lambda_m}{\cosh\lambda_m + \cos\lambda_m}$
FS	1,1,1,1	$\tan\lambda_m = \tanh\lambda_m$	$\frac{\cosh\lambda_m - \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m - \sin\lambda_m}$

۴- پاسخ ارتعاش اجباری

از آنجایی که یک تحریک خارجی می‌تواند مودهای طبیعی مختلف یک پوسته مخروطی را تحریک کند بنابراین می‌توان

ازای نسبت‌های مختلف ضخامت داده شده اند. اعداد داخل پرانتز بیانگر شماره مود محیطی می‌باشند. نتایج این جدول موید این مطلب است که روش ارائه شده در این رساله به خوبی قادر به تحلیل ارتعاشی پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی نیز می‌باشد.

جدول (۲) مقایسه پارامتر فرکانسی پوسته مخروطی ایزوتروپیک

عدد مود محیطی (n)	پارامتر فرکانسی ω_c مرجع [۲۴]	پارامتر فرکانسی ω_c مرجع [۲۵]	پارامتر فرکانسی ω_c مرجع [۲۶]	پارامتر فرکانسی ω_c کار حاضر
۲	۰/۷۹۱۰	۰/۸۴۲۰	۰/۸۴۳۱	۰/۸۲۹۶
۳	۰/۷۲۸۴	۰/۷۳۷۶	۰/۷۴۱۶	۰/۷۳۵۳
۴	۰/۶۳۵۲	۰/۶۳۶۲	۰/۶۴۱۹	۰/۶۴۲۰
۵	۰/۵۵۳۱	۰/۵۵۲۸	۰/۵۵۹۰	۰/۵۶۳۴
۶	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۰	۰/۵۰۰۸	۰/۵۰۷۲
۷	۰/۴۶۵۳	۰/۴۶۶۱	۰/۴۷۰۱	۰/۴۷۶۸
۸	۰/۴۶۴۵	۰/۴۶۶۰	۰/۴۶۸۷	۰/۴۷۲۸

جدول (۳) مقایسه پارامتر فرکانسی پوسته مخروطی کامپوزیتی

نسبت ضخامت به شعاع بزرگ ($\frac{h}{R_2}$)	پارامتر فرکانسی ω_c مرجع [۲۴]	پارامتر فرکانسی ω_c کار حاضر
۰/۰۲	۰/۴۶۲۵ (۵)	۰/۴۶۰۴ (۵)
۰/۰۴	۰/۷۷۵۲ (۴)	۰/۷۶۸۳ (۴)
۰/۰۶	۱/۰۸۴۳ (۳)	۱/۰۶۵۳ (۳)
۰/۰۸	۱/۳۸۴۵ (۳)	۱/۳۸۷۶ (۳)
۰/۱	۱/۵۷۳۷ (۰)	۱/۵۹۰۹ (۰)

۵-۱- تحلیل ارتعاشات آزاد

اکنون که از دقت روش حاضر در پیش بینی رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی اطمینان حاصل شده است، می‌توان تغییرات پارامتر فرکانسی به ازای شرایط مرزی شش گانه مورد مطالعه را با هم مقایسه نمود. همچنین تاثیر پارامترهای دیگر از قبیل نیم زاویه راس مخروط، ضخامت مخروط، تعداد لایه‌ها و نیز نسبت ارتوتروپی بر پارامتر فرکانسی به ازای شرایط مرزی گوناگون مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

می‌باشند. با حل معادله (۲۵) ضریب مشارکت مودال برای مودهای محوری و محیطی مدنظر تعیین شده و با اعمال این ضریب در معادله (۲۳) مولفه‌های جابجایی صفحه میانی پوسته به ازای این مودها و تحریک صورت گرفته قابل محاسبه می‌باشد.

۵- نتایج و بحث

پارامتر فرکانسی بی بعد که در نتایج استفاده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\rho h}{A_{11}}} \omega R_2 \quad (27)$$

در این بخش ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی به ازای شرایط مرزی شش گانه مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. بر پایه روش گلرکین و با استفاده از روابط ارائه شده در فصل قبل ابتدا اعتبار نتایج حاضر مورد سنجش قرار گرفته و سپس در قالب نمودارهایی به تحلیل و بررسی ویژگی‌های ارتعاش آزاد پوسته پرداخته می‌شود.

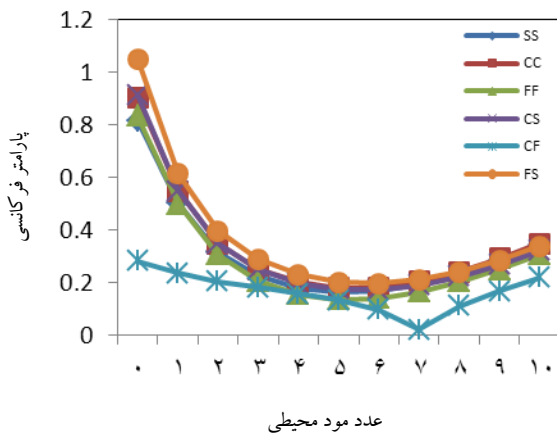
برای اطمینان از صحت نتایج حاصل از روش حل این مقاله، نتایج تحلیل حاضر برای ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ایزوتروپیک در اولین مود محوری تحت شرایط مرزی (SS) به ازای شماره مودهای محیطی ۲ تا ۸ و نیم زاویه راس 30° ارائه و در جدول (۲) لیست شده اند. مشخصات هندسی و خواص مکانیکی پوسته مورد مطالعه به صورت زیر می‌باشد

$$h = 0.004 (m), \quad \frac{h}{R_2} = 0.01, \quad \frac{L \sin(\varphi)}{R_2} = 0.25, \quad \nu = 0.3$$

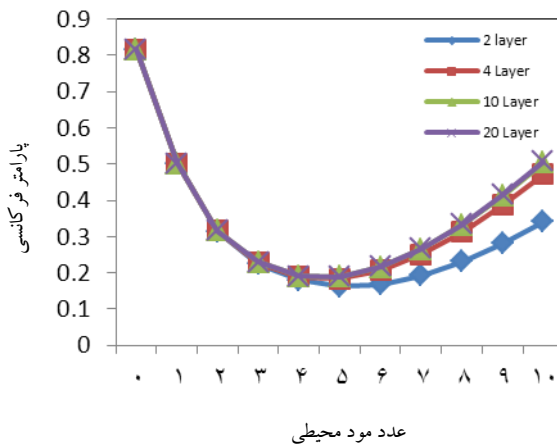
نتایج این جدول به روشنی نشان می‌دهد که پارامترهای فرکانسی محاسبه شده توسط روش تحلیلی گلرکین تطابق بسیار خوبی با نتایج مراجع [۲۴، ۲۵ و ۲۶] دارد.

جدول (۳) نیز امکان مقایسه نتایج کار حاضر را با مرجع [۲۶] در مورد پاسخ ارتعاشی پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی فراهم می‌نماید. در این جدول، مقادیر پارامترهای فرکانسی یک پوسته مخروطی کامپوزیتی دو لایه با شرایط مرزی (CC) به

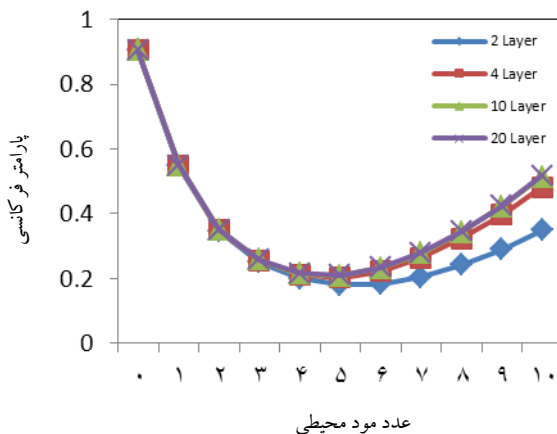
با افزایش تعداد لایه‌ها نتایج بسیار به یکدیگر نزدیک خواهند بود.



شکل (۲) تاثیر شرایط مرزی بر پارامتر فرکانسی



شکل (۳) تاثیر تعداد لایه‌ها بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی تحت شرایط مرزی SS



شکل (۴) تاثیر تعداد لایه‌ها بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی تحت شرایط مرزی CC

خصوصیات مربوط به جنس و هندسه پوسته مورد مطالعه به قرار زیر می‌باشند:

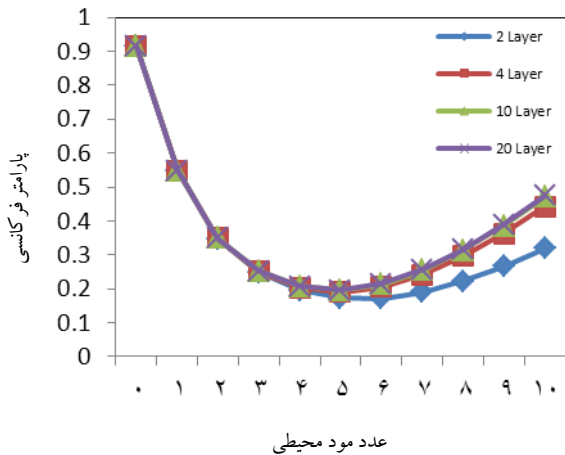
$$E_x = 70 \text{ (GPa)}, \quad \frac{E_x}{E_\theta} = 15, \quad \frac{h}{R_2} = 0.01$$

$$v_{x\theta} = 0.33, \quad G = 0.5E_\theta, \quad L = \frac{0.5R_2}{\sin(\varphi)}$$

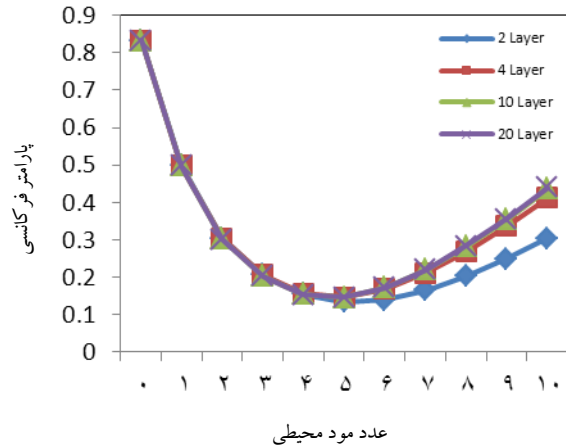
در تمام تحلیل‌ها عدد مربوط به مود محوری یک در نظر گرفته شده است.

شکل (۲) بیانگر تغییرات پارامتر فرکانسی پوسته مخروطی دو لایه [۰ / ۹۰] نسبت به عدد مود محیطی به ازای شرایط مرزی شش گانه و در زاویه ۳۰ می‌باشند. همانطور که در این شکل مشخص است، کمترین پارامتر فرکانسی به ازای تمام مودهای محیطی در شرایط مرزی FC اتفاق می‌افتد. بیشترین پارامتر فرکانسی در شرایط مرزی CC و FS اتفاق می‌افتد. بطوریکه به ازای مودهای محیطی ۹ و ۱۰، بیشینه پارامتر فرکانسی در شرایط مرزی CC و به ازای مودهای محیطی ۱، ۲، ۳ و ۴ بیشینه مقدار در شرایط مرزی FC اتفاق می‌افتد. نکته دیگری که می‌توان از شکل (۲) برداشت نمود این است پارامتر فرکانسی اساسی در یکی از سه شماره موج‌های محیطی ۵، ۶ و ۷ اتفاق می‌افتد

شکل‌های (۳) تا (۸) اثر تعداد لایه‌ها بر پارامتر فرکانسی پوسته‌های مخروطی [۰ / ۹۰] را بیان می‌کند. این شکل‌ها تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی را نسبت به مودهای محیطی برای نیم زاویه راس ۳۰ به ازای افزایش تعداد لایه‌ها در شرایط مرزی شش گانه نشان می‌دهند. این اشکال گویای این امر می‌باشند که در تمام شرایط مرزی افزایش تعداد لایه‌ها باعث افزایش پارامتر فرکانسی اساسی می‌شود و این با این واقعیت که هر چه کوپلینگ کششی-خمشی کمتر باشد، پوسته با فرکانس بزرگتری ارتعاش می‌نماید مطابقت دارد. ولی در تعداد لایه‌های بالا (۱۰ و ۲۰) اثر این افزایش تعداد لایه کمتر از تعداد لایه‌های پایین (۲ و ۴) می‌باشد. به عبارتی

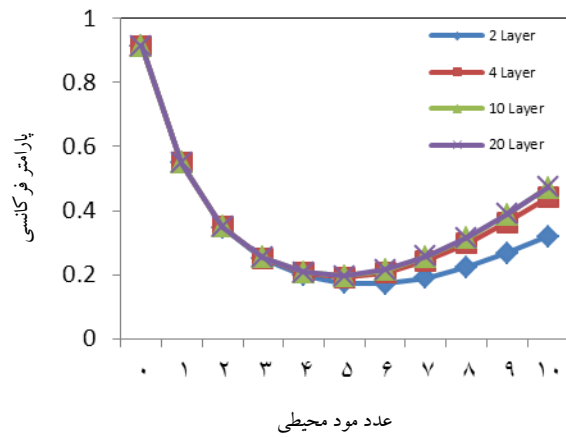


شکل (۸) تاثیر تعداد لایه‌ها بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی تحت شرایط مرزی FS

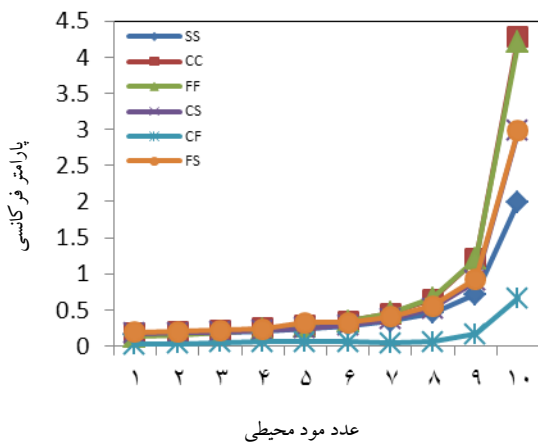


شکل (۵) تاثیر تعداد لایه‌ها بر تغییرات پارامتر فرکانسی تحت شرایط مرزی FF

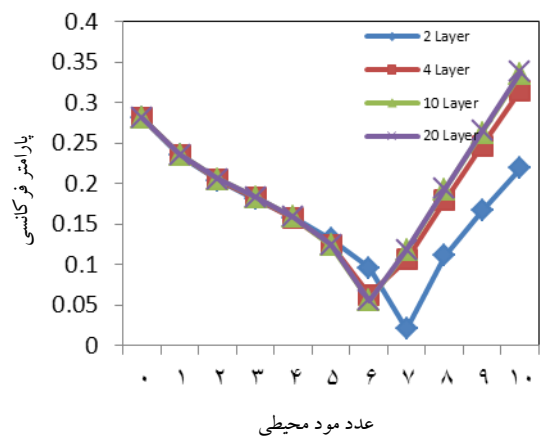
شکل (۹) تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی را با نسبت شعاع به طول مخروط برای پوسته مخروطی دو لایه [۰/۹۰] با نیم زاویه راس 30° به ازای شرایط مرزی شش گانه نشان می‌دهد. به کمک این شکل می‌توان تاثیرات شرایط مرزی و نسبت شعاع به طول مخروط را بر پاسخ ارتعاشی پوسته مورد مطالعه قرار داد و بیانگر این امر است که با افزایش شعاع بزرگ نسبت به طول، پارامتر فرکانسی اساسی نیز افزایش می‌یابد که این مورد در هر شش شرط مرزی صادق است و تاثیر این افزایش طول نیز در نسبت‌های ۹ و ۱۰ بسیار محسوس و بیشتر از سایر نسبت هاست.



شکل (۶) تاثیر تعداد لایه‌ها بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی تحت شرایط مرزی SC



شکل (۹) تاثیر نسبت شعاع به طول بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی



شکل (۷) تاثیر تعداد لایه‌ها بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی تحت شرایط مرزی FC

فرکانس پوسته دارد بطوریکه افزایش نسبت ارتوتروپی باعث کاهش پارامتر فرکانس اساسی برای هر شش شرایط مرزی می‌شود و نرخ تغییرات با افزایش نسبت ارتوتروپی برای هر شش شرط مرزی تقریباً با هم برابرند.

۵-۲- تحلیل ارتعاشات اجباری

در این بخش پاسخ ارتعاش اجباری پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چند لایه بر اساس روش تشریح شده در بخش (۴) به ازای شرایط مرزی شش گانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمودارهای بیشینه دامنه دینامیکی پوسته مخروطی به ازای شرایط مرزی گوناگون ترسیم شده‌اند. بارگذاری پوسته از نوع بارگذاری گسترده متقارن و هارمونیک می‌باشد که مقادیر در واحد سطح مولفه‌های آن، ضریب میرایی مودال، ضخامت و شعاع بزرگ مخروط به ترتیب عبارتند از:

$$q_x = q_\theta = q_z = 1 \text{ (KPa)}, \xi = 0.2,$$

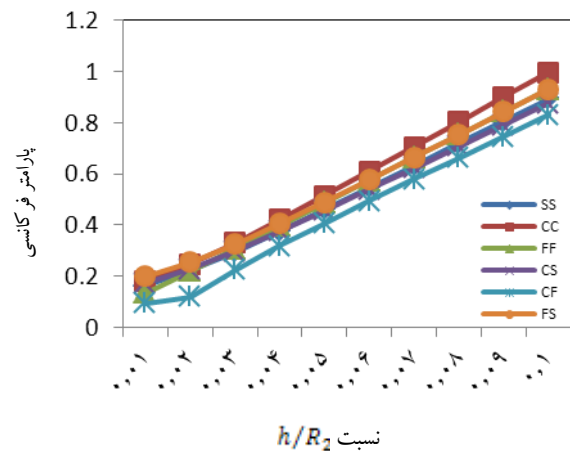
$$h = 0.01 \text{ (m)}, R_2 = 0.3 \text{ (m)}$$

سایر مشخصات هندسی و خصوصیات مربوط به جنس پوسته در نظر گرفته شده در بخش (۵-۱) برای تحلیل ارتعاش آزاد، در اینجا نیز صادق می‌باشند. عدد بدون بعد نسبت فرکانسی نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

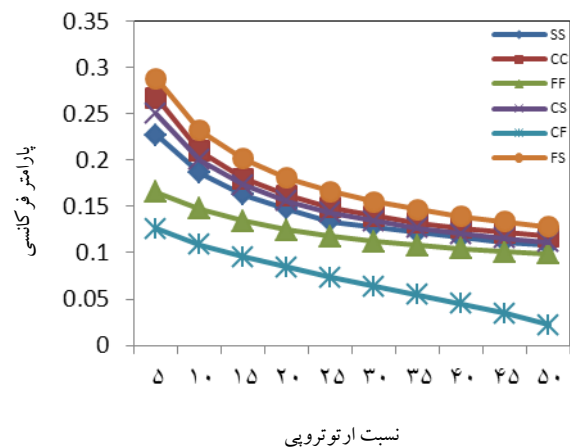
$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

که ω فرکانس نیروی تحریک خارجی و ω_n فرکانس طبیعی پوسته مخروطی می‌باشند. با توجه به نوع بارگذاری پوسته که متقارن می‌باشد، دامنه‌های دینامیکی به ازای شماره مدهای محیطی غیر از صفر در قیاس با دامنه مربوط به موج محیطی صفر بسیار کوچک و قابل صرف نظر می‌باشند از این رو صرفاً در تحلیل پاسخ ارتعاش اجباری پوسته مقادیر دامنه دینامیکی به ازای $n = 0$ مدنظر قرار گرفته است. همچنین عدد مربوط به مود محوری در تمام پاسخ‌ها برابر یک در نظر گرفته شده است. مقادیر بدست آمده برای پاسخ ارتعاش اجباری در هر سه جهت x, θ, z که به ترتیب با u, v, w

شکل (۱۰) بیانگر اثر ضخامت بر فرکانس پوسته است. در این شکل تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی با نسبت ضخامت به شعاع برای پوسته مخروطی دو لایه [۰/۹۰] با نیم زاویه راس 30° به ازای شرایط مرزی شش گانه نمایش داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت پوسته پارامتر فرکانسی اساسی نیز برای هر شش شرط مرزی به صورت خطی افزایش می‌یابد و نرخ تغییرات هر شش شرط مرزی تقریباً با هم برابر و خطی می‌باشند.



شکل (۱۰) تاثیر نسبت ضخامت به شعاع بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی



شکل (۱۱) تاثیر نسبت E_x/E_θ بر تغییرات پارامتر فرکانسی اساسی

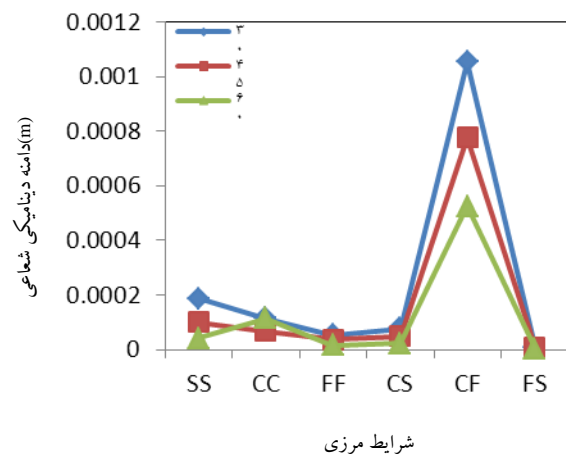
شکل (۱۱) نشانگر اثر نسبت ارتوتروپی بر پاسخ فرکانسی اساسی پوسته مخروطی دو لایه [۰/۹۰] با نیم زاویه راس 30° به ازای شرایط مرزی شش گانه است. منحنی‌ها موید این مطلب هستند که نسبت ارتوتروپی تاثیر قابل توجهی بر

همیلتون به کار گرفته شد. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله مطرح شده در این رساله، بر اساس روش تحلیلی گلرکین استوار است. برای تقریب متغیرهای میدان نیز از توابع تیر استفاده گردیده که این امر امکان در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف را برای تحلیل فراهم آورد. به منظور مطالعه رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی، به کمک روش گلرکین و با استفاده از توابع تیر، روابطی ساده برای فرکانس‌های پوسته استخراج گردید. بر مبنای روش‌های ذکر شده در بالا، نتایج عددی مربوط به تحلیل ارتعاشات آزاد ارائه گردیده است. برای یافتن پاسخ ارتعاشات اجباری پوسته مخروطی از آنالیز مودال با تکیه بر نتایج بدست آمده از تحلیل ارتعاش آزاد استفاده شد. در مورد ارتعاشات آزاد، از طریق مقایسه نتایج حاضر با دیگر منابع موجود، از صحت روش‌های به کار گرفته شده اطمینان حاصل گردید. از میان مهم ترین یافته‌های نتایج عددی، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- نتایج عددی نشان می‌دهند که شرایط مرزی تاثیر بسزایی بر فرکانس پوسته مخروطی دارند. همچنین، در بین شرایط مرزی در نظر گرفته شده، کمترین پارامتر فرکانسی به ازای تمام مودهای محیطی در شرایط مرزی FC و بیشترین پارامتر فرکانسی در شرایط مرزی CC و FS اتفاق می‌افتد
- با افزایش تعداد لایه‌های پوسته مخروطی، فرکانس افزایش می‌یابد. به بیان دیگر، هر چه کویلینگ کششی-خمشی کمتر باشد، پوسته با فرکانس بزرگتری ارتعاش می‌نماید و در تعداد لایه‌های بالاتر از ۱۰ تعداد لایه تاثیر چندانی در فرکانس ارتعاش ندارد. علاوه بر این، نتایج موید این مطلب هستند که فرکانس با ضخامت پوسته رابطه مستقیم دارد.

بیان شده اند مربوط به نقطه‌ای با مختصات $(0.1, \pi/4)$ می‌باشند.

شکل‌های (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) تاثیر شرایط مرزی بر بیشینه دامنه دینامیکی پوسته مخروطی ۴ لایه را نشان می‌دهد. همانطور که از نمودارها بر می‌آید، پوسته مخروطی در هر سه جهت و به ازای هر سه زاویه به ازای شرایط مرزی FC بیشترین مقدار دامنه دینامیکی و به ازای شرایط مرزی FS کمترین مقدار دامنه دینامیکی را دارد.



شکل (۱۳) تغییرات بیشینه دامنه دینامیکی شعاعی تحت شرایط مرزی شش گانه

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته مخروطی کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته اند. برای استخراج معادلات حاکم، بر اساس تئوری پوسته نازک دانل، اصل

u_0, v_0, w_0	m	جابجایی‌های طولی، محیطی و شعاعی صفحه میانی	• نتایج عددی نشان می‌دهند که برای تمامی انواع شرایط مرزی، با افزایش نسبت شعاع به طول، فرکانس پوسته افزایش می‌یابد.
u, v, w	m	جابجایی‌های طولی، محیطی و شعاعی	• برای تمام انواع شرایط مرزی، با افزایش عدد مود محیطی، فرکانس پوسته ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.
z	m	فاصله از صفحه میانی	همچنین، عدد مود محیطی متناظر با فرکانس اساسی برای شرایط مرزی مختلف، متفاوت می‌باشد.
$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$	m	متغیرهای محوری مولفه‌های جابجایی	• نسبت ارتوتروپی تاثیر قابل توجهی بر فرکانس پوسته دارد. هرچه نسبت ارتوتروپی بزرگتر باشد، پوسته منعطف تر شده و با فرکانس کوچکتری ارتعاش می‌نماید.
$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$	-	کرنش‌های نرمال طولی و محیطی و کرنش برشی	• پوسته مخروطی در هر سه جهت محوری، محیطی و شعاعی به ازای شرایط مرزی CF بیشترین مقدار دامنه دینامیکی و در جهت FS کمترین مقدار دامنه دینامیکی را دارد به ازای شرایط مرزی CF دامنه دینامیکی مقدار بسیار بزرگتری نسبت به سایر شرایط مرزی دارد.
$\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0\theta}, \gamma_{0x\theta}$	-	کرنش‌های نرمال طولی و محیطی و کرنش برشی صفحه میانی	
η_{mn}	-	ضریب مشارکت مودال	
φ	rad	نیم زاویه راس مخروطی	
μ	kg/m	جرم واحد طول	
ξ_{mn}	-	ضریب میرایی مودال	
λ	-	ضریب میرایی ویسکوز معادل	
$\rho^{(k)}$	kg/m^3	چگالی	
$\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}$	Pa	تنش‌های نرمال و تنش برشی	
ϕ	m	جابجایی عرضی تیر	
ω_c	-	پارامتر فرکانسی بی بعد	

فهرست علائم

نماد	واحد	توضیح
A_{ij}	$Pa \cdot m$	سختی کششی
B_{ij}	$Pa \cdot m^2$	سختی کوبینگ
D_{ij}	$Pa \cdot m^3$	سختی خمشی
E_x, E_θ	Pa	مدول یانگ طولی و محیطی
h	m	ضخامت پوسته
I	kg/m^2	اینرسی
$\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}$	-	تغییرات انحنا و انحنا پیچشی
L	m	طول مخروط
$M_x, M_\theta, M_{x\theta}$	$Pa \cdot m$	گشتاورهای منتجه
m	-	مود محوری
$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$	$Pa \cdot m$	نیروهای منتجه
n	-	مود محیطی
Q_{ij}	Pa	ضرائب سختی الاستیک ماده
q_x, q_θ, q_z	Pa	بارهای خارجی بر واحد سطح
R_2	m	شعاع بزرگ مخروط
r	-	نسبت فرکانسی

مراجع

- [1] Wilkins D. J., Bert C. W., Egle D. M., Free vibrations of orthotropic sandwich conical shells with various boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 13, 1970, pp. 211-228.
- [2] Irie T., Yamada G., Muramoto Y., Free vibration of joined conical-cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 95, 1984, pp. 31-39.
- [3] Thambiratnam, D. P., Zhuge Y., Axisymmetric free vibration analysis of conical shells, *Engineering Structures*, Vol. 15, 1993, pp. 83-89.
- [4] Shu C., An efficient approach for free vibration analysis of conical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 38, 1996, pp. 935-949.
- [5] Lam K. Y., Hua L., On free vibration of a rotating truncated circular orthotropic conical

- conical shells - A finite element approach, *Composite Structures*, Vol. 94, 2012, pp. 2188-2196.
- [17] Sofiyev A. H., Kuruoglu N., Vibration analysis of FGM truncated and complete conical shells resting on elastic foundations under various boundary conditions, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 77, 2012, pp. 131-145.
- [18] Malekzadeh P., Heydarpour Y., Free vibration analysis of rotating functionally graded truncated conical shells, *Composite structures*, Vol. 97, 2013, pp. 176-188.
- [19] Civalek O., Vibration analysis of laminated composite conical shells by the method of discrete singular convolution based on the shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, 2013, pp. 1001-1009.
- [20] Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W., Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009, *Composite structures*, Vol. 93, 2010, pp. 14-31.
- [21] Soedel W., *Vibrations of Shells and Plates*, 2004, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [22] Loy, C. T., Lam, K. Y., Vibration of Cylindrical Shells with Ring Support, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 39, 1997, pp. 445-471.
- [23] Irie T., Yamada G., Tanaka K., Natural frequencies of truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 92, 1984, pp. 447-453.
- [24] Lam K. Y., Li H., On free vibration of rotating truncated orthotropic conical shell, *Composite*, Vol. 30, 1999, pp. 135-44.
- [25] Li F. M., Kishimoto K., Huang W. H., The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh-Ritz method, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, 2009, pp. 595-602
- [26] Shu C., Free vibration analysis of composite laminated conical shells by generalized differential quadrature, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, 1996, pp. 587-604.
- shell, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 30, 1999, pp. 135-144.
- [6] Hu H. T., Ou S. C., Maximization of the fundamental frequencies of laminated truncated conical shells with respect to fiber orientations, *Composite Structures*, Vol. 52, 2001, pp. 265-275.
- [7] Wu C. P., Lee C. Y., Differential quadrature solution for the free vibration analysis of laminated conical shells with variable stiffness, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, 2001, pp. 1853-1869.
- [8] Hu X. X., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C., Vibration of twisted laminated composite conical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, 2002, pp. 1521-1541.
- [9] Civalek O., An efficient method for free vibration analysis of rotating truncated conical shells, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 83, 2006, pp. 1-12.
- [10] Liang S., Chen H. L., Chen T., Wang M. Y., The natural vibration of a symmetric cross-ply laminated composite conical-plate shell, *Composite Structures*, Vol. 80, 2007, pp. 265-278.
- [11] Tripathi V., Singh B. N., Shukla K. K., Free vibration of laminated composite conical shells with random material properties, *Composite Structures*, Vol. 81, 2007, pp. 96-104.
- [12] Civalek O., Numerical analysis of free vibrations of laminated composite conical and cylindrical shells: Discrete singular convolution (DSC) approach, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 205, 2007, pp. 251-271.
- [13] Sofiyev A. H., Korkmaz K. A., Mammadov Z., Kamanli M., The vibration and buckling of freely supported non-homogeneous orthotropic conical shells subjected to different uniform pressures, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 86, Vol. 2009, pp. 661-668.
- [14] Sofiyev A. H., The vibration and stability behavior of freely supported FGM conical shells subjected to external pressure, *Composite Structures*, Vol. 89, 2009, pp. 356-366.
- [15] Sofiyev A. H., Kuruoglu N., Halilov H. M., The vibration and stability of non-homogeneous orthotropic conical shells with clamped edges subjected to uniform external pressures, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, 2010, pp. 1807-1822.
- [16] Dey S., Karmakar A., Free vibration analysis of multiple delaminated angle-ply composite