فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

# حل تحلیلی ارتعاشات پوسته کامپوزیت با لایه پیزوالکتریک

اکبر علی‌بیگلو[۱،*] ، عبدالمجید کنی[۲]

* نویسنده مسئول: majid.kani@yahoo.com

## چکیده

در این مقاله، ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیت حاوی لایه‌های پیزوالکتریک در سطوح داخلی و خارجی، بررسی شده است. ابتدا پوسته کامپوزیت بدون لایه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج حاصل با نتایج محققین دیگر مقایسه می‌گردد، آنگاه ارتعاشات پوسته استوانه‌ای چند لایه با لایه‌های پیزوالکتریک بررسی می‌شود. روابط مربوطه از معادلات الاستیسیته سه‌بعدی نتیجه شده است که چون هیچگونه تقریبی در بدست آوردن آنها اعمال نشده کاملاً تحلیلی می‌باشند. پوسته موردنظر، بسته و دارای طول محدود می‌باشد که تکیه‌گاه‌ها بصورت ساده در دو انتهای آن واقع شده‌اند و نتایج برای نسبت طول به شعاع $\left(L/R\right)$ و شعاع به ضخامت‌های $\left(R/h\right)$ مختلف بدست آمده‌اند.

## واژه‌های کلیدی

حل تحلیلی- پوسته استوانه‌ای- الاستیسیته- کامپوزیت- پیزوالکتریک

۱- دانشیار، دانشکده فنی‌مهندسی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران.
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی‌مهندسی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران.

## ۱- مقدمه

با توجه به افزایش روزافزون کاربرد مواد کامپوزیتی و نیز پیشرفت علوم مکاترونیک، بررسی مواد کاربردی در این علوم ضروری و کاربردی به نظر می‌رسد. به واسطه اثر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک، مواد پیزوالکتریک بطور گسترده‌ای در علوم مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. سازه‌های استوانه‌ای پیزوالکتریک اعم از توپر و یا توخالی در وسایل مرتعش‌کننده(Resonator)، انژکتور سوخت، تلسکوپ‌های با دقت بالا، الکتروایتیک و غیره کاربرد دارند.

از آنجایی که همواره مبحث ارتعاشات و فرکانسهای طبیعی از مباحث مهم در تحلیل مواد مختلف بشمار می‌رود در این مقاله به بررسی ارتعاشات پوسته کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک پرداخته شده است. پوسته مورد نظر بصورت بسته می‌باشد و با توجه به اینکه در شکل مدهای مختلف امکان تغییر سطح مقطع پوسته مورد نظر از حالت تقارن محوری وجود دارد، لذا در بدست آوردن معادلات مربوطه حالت تقارن محوری پوسته در نظر گرفته نشده و معادلات با در نظر گرفتن تغییرات نسبت به $\theta$ بدست آمده‌اند. ماتریس سختی پوسته موردنظر ارتوتروپیک (Orthotropic) و دارای ۹ مؤلفه مستقل می باشد. لایه پیزوالکتریک داخلی حسگر (Sensor) و لایه خارجی عملگر (Actuator) می‌باشد. در بدست آوردن معادلات مربوطه از روابط الاستیسیته سه بعدی استفاده شده است. به این ترتیب که از معادلات تنش- جابجایی و معادلات حرکت، معادلات فضا- حالت بدست آمده‌اند. درسال ۲۰۰۶ مؤلف، ارتعاشات پنل کامپوزیتی را تحلیل نموده که از روش فضا- حالت در بدست آوردن معادلات مورد نیاز استفاده کرده است[۱]. در سال ۲۰۰۷ نیز آقای Chen و همکارانش ارتعاشات آزاد سه بعدی یک مخزن استوانه‌ای پیزوالکتریک که حاوی سیال تراکم‌پذیری می‌باشد را بررسی نموده‌اند که به منظور این بررسی معادلات مربوطه را بصورت معادلات فضا- حالت بدست آورده‌اند[۲].

در زمینه بررسی سازه‌های تشکیل شده از کامپوزیت و پیزوالکتریک، در سال ۲۰۰۳ آقای Yun و همکارانش مدلی برای کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیت با لایه-های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه نموده‌اند که در آن از معادلات دینامیکی غیرخطی استفاده شده است[۳]. آقای Santos و همکارانش در سال ۲۰۰۷ مدل المان محدودی برای تحلیل خمش و ارتعاشات آزاد پوسته کامپوزیت با لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه نموده‌اند[۴]. در سال ۲۰۰۸ نیز مؤلف، ورق کامپوزیت با لایه‌های پیزوالکتریک روی دو سطح جانبی را از لحاظ استاتیکی مورد بررسی قرار داده است[۵].

طی بررسی‌های انجام شده مشخص گردید که تحلیل ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت به همراه لایه‌های پیزوالکتریک، تاکنون ارائه نشده است، لذا در مقاله حاضر سعی بر معرفی این رفتار شده است.

## ۲-معادلات فضا- حالت

برای تحلیل پوسته موردنظر از روابط الاستیسیته سه بعدی استفاده شده است. برای لایه های کامپوزیت روابط تنش- کرنش عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_r\\ \tau_{r\theta}\\ \tau_{xr}\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_r\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{xr}\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix} \qquad (۱)$$

و معادلات حرکت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{x\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial r}+\dfrac{\tau_{xr}}{r}=\rho\dfrac{\partial^2u_x}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{x\theta}}{\partial x}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{2\tau_{r\theta}}{r}=\rho\dfrac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial x}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}=\rho\dfrac{\partial^2u_r}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (۲)$$

و روابط کرنش- جابجایی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x} && \gamma_{xr}=\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial x} \\ &\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r} && \gamma_{r\theta}=-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} \qquad (۳) \\ &\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} && \gamma_{x\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial\theta} \end{aligned}$$

و همچنین روابط تنش- کرنش برای لایه‌های پیزوالکتریک عبارت خواهد بود از:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_r\\ \tau_{r\theta}\\ \tau_{xr}\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\ C_{21}&C_{22}&C_{23}&0&0&0\\ C_{31}&C_{32}&C_{33}&0&0&0\\ 0&0&0&C_{44}&0&0\\ 0&0&0&0&C_{55}&0\\ 0&0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_r\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{xr}\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix}$$

(۴-۱)

$$-\begin{bmatrix}0&0&e_1\\ 0&0&e_2\\ 0&0&e_3\\ 0&e_4&0\\ e_5&0&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_\theta\\ E_r\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_\theta\\ D_r\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&e_5&0\\ 0&0&0&e_4&0&0\\ e_1&e_2&e_3&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_r\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{xr}\\ \gamma_{x\theta}\end{Bmatrix} \qquad (۴-۲)$$

$$+\begin{bmatrix}\eta_1&0&0\\ 0&\eta_2&0\\ 0&0&\eta_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_\theta\\ E_r\end{Bmatrix}$$

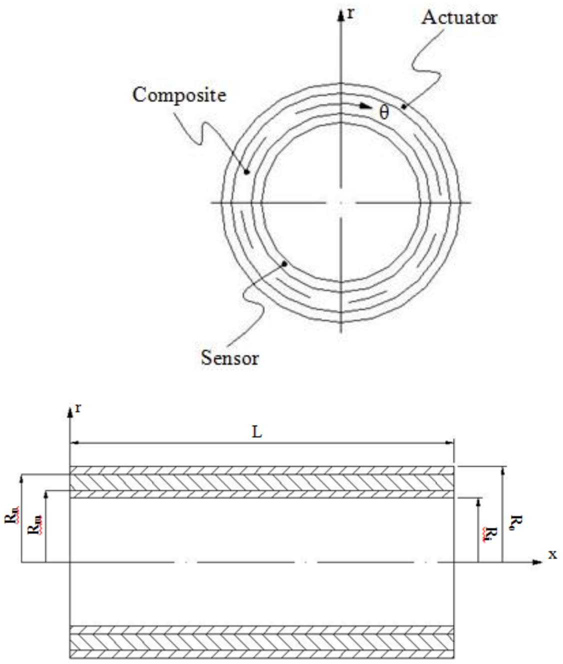
روابط ماکسول:

$$\begin{aligned} &Div\ D=0\Rightarrow\frac{\partial D_r}{\partial r}+\frac{D_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial D_x}{\partial x}=0 \\ &E_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad E_r=-\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \end{aligned} \qquad (۵)$$

در روابط فوق و به ترتیب نشان دهنده تنشهای نرمال و برشی، و کرنشهای محوری و برشی، ضرائب ماتریس سختی، بردار شدت جریان الکتریکی، ثابت پیزوالکتریک، بردار جابجایی یا القاء الکتریکی، ثابت دی‌الکتریک، پتانسیل الکتریکی و چگالی می‌باشند.

سطوح بالا و پائین پوسته در بررسی ارتعاشی، عاری از بار مکانیکی و الکتریکی می‌باشند لذا مطابق شکل (۱) شرایط مکانیکی حاکم در این تحلیل بصورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_r=\tau_{xr}=\tau_{r\theta}=0 \quad \text{در} \quad r=R_i\,\&\,R_o \qquad (۶)$$




شکل(۱) شکل هندسی و دستگاه مختصات پوسته کامپوزیت به همراه لایه‌های پیزوالکتریک بصورت حسگر و عملگر

شرایط مرزی الکتریکی با توجه به اینکه لایه داخلی حسگر و لایه خارجی عملگر هستند، در سطح داخلی بصورت مدار باز (open-circuit) و در سطح خارجی بصورت اتصال کوتاه (short-circuit) می‌باشد. یعنی:

$$\begin{aligned} &\psi=0 && \text{در}\ r=R_o \\ &D_r=0 && \text{در}\ r=R_i \end{aligned} \qquad (۷)$$

در دو انتهای پوسته موردنظر تکیه‌گاهها بصورت ساده می-باشد یعنی:

$$u_r=u_\theta=\sigma_x=0 \qquad \text{در}\ x=0\ \&\ L \qquad (۸)$$

همچنین در راستای طولی شرط مرزی الکتریکی بصورت اتصال کوتاه و بدون هیچگونه پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته شده است. بنابراین:

$$\psi = 0 \qquad \text{در } x = 0 \,\&\, L \tag{۹}$$

به منظور ارضاء شرایط مرزی در راستای x و همچنین ارضاء شرایط هندسی در راستای، تنش، پتانسیل الکتریکی و جابجایی‌ها بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_r(r)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)\mathrm{Sin}(P_n x)e^{i\omega t}\\
u_r &= u_r(r)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)\mathrm{Sin}(P_n x)e^{i\omega t}\\
u_\theta &= u_\theta(r)\mathrm{Sin}(\beta_m\theta)\mathrm{Sin}(P_n x)e^{i\omega t}\\
u_x &= u_x(r)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)\mathrm{Cos}(P_n x)e^{i\omega t}\\
\tau_{xr} &= \tau_{xr}(r)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)\mathrm{Cos}(P_n x)e^{i\omega t}\\
\tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}(r)\mathrm{Sin}(\beta_m\theta)\mathrm{Sin}(P_n x)e^{i\omega t}\\
D_r &= D_r(r)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)\mathrm{Sin}(P_n x)e^{i\omega t}\\
\psi &= \psi(r)\mathrm{Cos}(\beta_m\theta)\mathrm{Sin}(P_n x)e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در روابط فوق و معادلات ۲، ۳ و ۵ معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغییر هستند که به سادگی قابل حل نمی‌باشند. بدین منظور از فرضیه سونگ [۱ و۷] استفاده می‌شود و با استفاده از روابط زیر که برای لایه k ام نوشته شده‌اند این معادلات به معادلاتی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_k}\left(1-\eta_k\right) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_k^2}\left(1-2\eta_k\right) \tag{۱۱}$$

که:

$$\eta_k = r - R_k \tag{۱۲}$$

با ترکیب معادلات فوق و جایگذاری روابط (۱۰) در معادلات بدست آمده در نهایت دستگاه معادلات خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت بصورت زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\delta = G\delta \tag{۱۳}$$

که در رابطه فوق برای پوسته کامپوزیت:

$$\delta = \begin{bmatrix}\sigma_r & \tau_{xr} & \tau_{r\theta} & u_r & u_x & u_\theta\end{bmatrix}^T \tag{۱۴}$$

و برای پوسته پیزوالکتریک:

$$\delta = \begin{bmatrix}\sigma_r & \tau_{xr} & \tau_{r\theta} & u_r & u_x & u_\theta & D_r & \psi\end{bmatrix}^T \tag{۱۵}$$

که ماتریس G برای لایه‌های کامپوزیت و پیزوالکتریک در پیوست نشان داده شده‌اند.

حل کلی معادله (۱۳) برای لایه K ام بصورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\delta}(\eta_k) = \exp m[G^k h_k]\,\bar{\delta}(\eta_{k-1}) \tag{۱۶}$$

به همین ترتیب برای لایه K+1 داریم:

$$\bar{\delta}(\eta_{k+1}) = \exp m[G^{k+1} h_{k+1}]\,\bar{\delta}(\eta_k) \tag{۱۷}$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در رابطه فوق:

$$\bar{\delta}(\eta_{k+1}) = \exp m[G^{k+1} h_{k+1}]\exp m[G^k h_k]\,\bar{\delta}(\eta_{k-1}) \tag{۱۸}$$

و اگر این روند را برای تمام لایه‌ها ادامه دهیم، برای لایه کامپوزیت داریم:

$$\bar{\delta}(R_n) = T_c\bar{\delta}(R_m) \tag{۱۹}$$

و همچنین برای لایه حسگر:

$$\bar{\delta}(R_m) = M^s\bar{\delta}(R_i) \tag{۲۰}$$

و همچنین برای لایه عملگر:

$$\bar{\delta}(R_o) = M^a\bar{\delta}(R_n) \tag{۲۱}$$

که در روابط فوق:

$$\begin{aligned}
T_c &= \prod_{k=N}^{1}\exp m[G_c^k h_k]\\
M^s &= \prod_{k=p}^{1}\exp m[G_s^k h_k]\\
M^a &= \prod_{k=p}^{1}\exp m[G_a^k h_k]
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در روابط فوق N وp به ترتیب تعداد لایه‌های کامپوزیت و پیزوالکتریک بعد از اعمال فرضیه سونگ هستند.

## ۳-معادلات کاربردی

با استفاده از معادله (۲۱) و اعمال شرط مرزی الکتریکی در سطح خارجی پوسته موردنظر داریم:

$$D_r(R_N)=-\frac{1}{m_{87}^a}\times[m_{8j}^a]\,\bar{\delta}(R_N) \qquad (۲۳)$$

که در رابطه فوق . ماتریس سطری تشکیل شده از سطر ۸ و ستون‌های۱ تا ۶ ماتریس و درایه سطر ۸ و ستون ۷ ماتریس می‌باشند. پس از جاگذاری رابطه (۲۳) در معادله (۲۱) و در نظر گرفتن ۶ سطر اول این معادله داریم:

$$\bar{\delta}(R_o)=T_a\,\bar{\delta}(R_n) \qquad (۲۴)$$

که:

$$T_a=[m_{ij}^a]-\{m_{i7}^a\}\times\frac{1}{m_{87}^a}\times[m_{8j}^a] \qquad i,j=1,2,...,6 \qquad (۲۵)$$

با استفاده از معادله (۲۰) و اعمال شرط مرزی الکتریکی روی سطح داخلی، برای لایه حسگر نیز داریم:

$$\psi(R_i)=-\frac{1}{m_{88}^s}[m_{8j}^s]\,\bar{\delta}(R_i) \qquad (۲۶)$$

با استفاده از معادله (۲۰) و جایگذاری رابطه فوق در آن:

$$\bar{\delta}(R_m)=T_s\,\bar{\delta}(R_i) \qquad (۲۷)$$

که:

$$T_s=[m_{ij}^s]-\{m_{i8}^s\}\times\frac{1}{m_{88}^s}\times[m_{8j}^s] \qquad i,j=1,2,...,6 \qquad (۲۸)$$

در بدست آوردن روابط فوق باید این نکته را در نظر داشت که در لایه‌های داخلی و خارجی پوسته کامپوزیت، پتانسیل الکتریکی وجود ندارد.

با ترکیب معادلات (۱۹)، (۲۴) و (۲۷) داریم:

$$\bar{\delta}(R_o)=S\,\bar{\delta}(R_i) \qquad S=T_a\,T_c\,T_s \qquad (۲۹)$$

با اعمال شرایط مرزی مکانیکی در دو سطح داخلی و خارجی، معادله زیر بدست می‌آید که با حل آن فرکانس-های طبیعی حاصل می‌شوند.

$$\left|S_{ij}\right|=0 \qquad i=1,2,3 \quad j=4,5,6 \qquad (۳۰)$$

## ۴-نتایج عددی و بحث پیرامون آن

در این بررسی از فرکانس طبیعی بی‌بعد طبق رابطه زیر استفاده شده است.

$$\omega^*=\omega h\sqrt{\frac{\rho_c}{E_2}} \qquad (۳۱)$$

که در رابطه فوق ضخامت کل پوسته، و چگالی و مدول الاستیسیته مربوط به پوسته کامپوزیت می‌باشند. برای پوسته-های پیزوالکتریک طرفین رابطه فوق در ضرب می‌شود که چگالی مربوط به پوسته پیزوالکتریک بوده که برای لایه‌های حسگر و عملگر چگالی مربوط به هر لایه منظور می گردد.

به منظور بررسی پوسته مورد نظر برای لایه‌های کامپوزیت از گرافیت- اپوکسج[۳] ، برای لایه حسگر از و برای لایه عملگر از ، مطابق مرجع [۲] استفاده شده است که در جداول(۱) و (۲) مشخصات مربوط به این مواد ذکر شده است. در این تحقیق ضخامت هر یک از لایه‌های کامپوزیت و پیزوالکتریک یکسان در نظر گرفته شده‌اند.

به منظور اطمینان از درستی مراحل کار، با توجه به عدم وجود منابع لازم، نتایج برای پوستهٔ صرفاً کامپوزیتی با نتایج حاصل از مرجع [۶] مقایسه شده‌اند که در جدول (۳) به این مقایسه و میزان خطا در حالت‌های مختلف هندسی اشاره شده است. با توجه به تفاوت شیوه‌های بدست آوردن معادلات، نتایج بدست آمده قابل قبول بوده و به این ترتیب به بررسی ارتعاشات پوسته، با لایه پیزو پرداخته شده است.

در جدول (۴) سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد، برای نسبت طول به شعاع متوسط یک و نسبت شعاع متوسط به ضخامت‌های مختلف برای دو حالت چیدمان متفاوت لایه-های کامپوزیت ارائه شده است.

جدول(۱) خصوصیات کامپوزیت گرافیت-اپوکسی

| $E_1$(Gpa) | $E_2$(Gpa) | $E_3$(Gpa) | $G_{12}$(Gpa) | $G_{13}$(Gpa) | $G_{23}$(Gpa) | $\upsilon_{12}$ | $\upsilon_{13}$ | $\upsilon_{23}$ | $\rho(kg/m^3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 181 | 10.3 | 10.3 | 7.17 | 7.17 | 3.87 | 0.28 | 0.28 | 0.33 | 1580 |

جدول(۲) خصوصیات مکانیکی و الکتریکی پیزوالکتریکها

| | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{22}$ | $C_{23}$ | $C_{33}$ | $C_{44}$ | $C_{55}$ | $C_{66}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PZT-4 | ۱۳۹ | ۷۸ | ۷۴ | ۱۳۹ | ۷۴ | ۱۱۵ | ۲۵/۶ | ۲۵/۶ | ۳۰/۵ |
| $Ba_2NaNb_5O_{15}$ | ۲ | ۱۰۴ | ۵ | ۲۴۷ | ۵۲ | ۱۳۵ | ۶۵ | ۶۶ | ۷۶ |
| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\eta_3$ | $\rho$ |
| PZT-4 | -۵/۲ | -۵/۲ | ۱۵/۱ | ۱۲/۷ | ۱۲/۷ | ۶۵۰ | ۶۵۰ | ۵۶۰ | ۷۵۰۰ |
| $Ba_2NaNb_5O_{15}$ | -۰/۴ | -۰/۳ | ۴/۳ | ۳/۴ | ۲/۸ | ۱۹۶ | ۲۰۱ | ۲۸ | ۵۳۰۰ |

**واحدها:** $C_{ij}$ (Gpa), $e_i$ $(C/m^2)$, $\eta(10^{-11} F/m)$

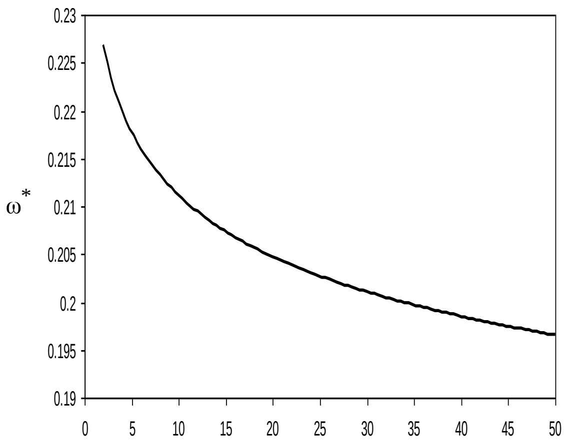
جدول(۳) مقایسه نتایج برای پوسته کامپوزیتی با نتایج مرجع[۶] در حالت (s = 2)

| | L/R=1 | | L/R=2 | |
|---|---|---|---|---|
| | ۹۰/۰ | ۹۰/۰/۹۰ | ۹۰/۰ | ۹۰/۰/۹۰ |
| مرجع [۶] | ۰/۹۵۴۸ | ۰/۹۰۴۷ | ۰/۴۶۸۲ | ۰/۳۹۸۶ |
| روش حاضر | ۰/۹۵۸۲ | ۰/۸۷۲۱ | ۰/۴۵۹۱ | ۰/۴۱۰۱ |
| درصد خطا | ٪۰/۳۵ | ٪۳/۷۴ | ٪۱/۹۸ | ٪۲/۸۰ |

جدول(۴) سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای $(L/R = 1)$ و $(s = R/h)$ مختلف در ۲ حالت چیدمان متفاوت لایه‌های کامپوزیت

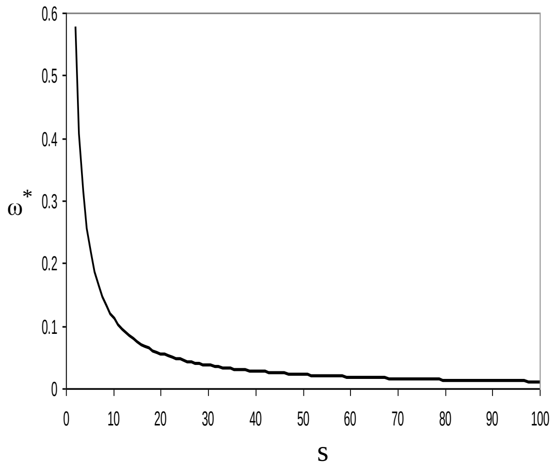
| چیدمان لایه‌ها | S=5 | | | S=20 | | | S=50 | | | S=100 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | I | II | III | I | II | III | I | II | III |
| ۹۰/۰ | ۰/۳۹۳ | ۰/۸۰۵ | ۱/۳۰۷ | ۰/۰۸۹ | ۰/۲۰۲ | ۰/۳۷۳ | ۰/۰۳۵ | ۰/۰۸ | ۰/۱۵ | ۰/۰۱۸ | ۰/۰۴ | ۰/۰۷۵ |
| ۹۰/۰/۹۰ | ۰/۴۰۷ | ۰/۸۴۱ | ۱/۳۳۸ | ۰/۰۹۳ | ۰/۲۱۱ | ۰/۳۶۲ | ۰/۰۳۷ | ۰/۰۸۴ | ۰/۱۴۵ | ۰/۰۱۹ | ۰/۰۴۲ | ۰/۰۷۲ |

نمودار (۱) تأثیر افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت بر اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد به ازاء ضخامت کل یکسان و برای و در حالت چیدمان را نشان می‌دهد. با توجه به یکسان بودن ضخامت لایه‌ها، با افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت و ثابت بودن ضخامت کل، ضخامت هر لایه کاهش یافته و به تبع آن ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک نیز کم می‌شود. مطابق نمودار با افزایش تعداد لایه‌ها فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که این امر ناشی از کاهش ضخامت هر لایه می‌باشد.



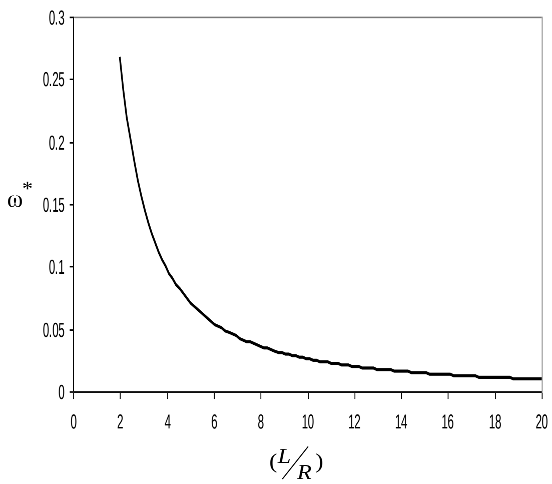

نمودار(۱) تأثیر افزایش تعداد لایه بر فرکانس طبیعی در $(L/R = 2)$, $(s = 5)$ در حالت چیدمان ...0/90/0/ برای لایه‌های کامپوزیت

نمودار (۲) تغییرات اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب تغییرات برای و چیدمان برای دو لایه کامپوزیت، را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌گردد که با افزایش فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که این امر ناشی از کاهش صلبیت پوسته مورد نظر می‌باشد.




نمودار(۲) تأثیر افزایش s بر فرکانس طبیعی در ($L/R = 2$) و چیدمان (0/90) دو لایه کامپوزیت

نمودار (۳) تغییرات اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب تغییرات برای و چیدمان سه لایه‌ای برای لایه‌های کامپوزیت را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش نسبت فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که این امر نیز ناشی از کاهش صلبیت پوسته مورد نظر می‌باشد.




نمودار(۳) تأثیر افزایش ($L/R$) بر فرکانس طبیعی برای (s=5) و چیدمان (0/90/0) سه لایه کامپوزیت

## مراجع


[1] Alibeigloo A, and Shakeri M, Elasticity solution for the free vibration analysis of laminated cylindrical panels using the differential quadraure method. *Journal of Composite Structures*, vol. 81, 2007, pp. 105-113

[2] Chen W.Q, Bian Z.G, Lv C.F, Ding H.J, 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid. *Journal of Solid and Structure*, vol. 41, 2004, pp. 947-964

[3] Yun L.H, Yong L.Q, Xing L.Z, Chao W, Active control of the peizoelastic laminated cylindrical shell's vibration under hydrostatic pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol.24, 2003, pp. 182-195

[4] Santos H, M. Soares C, Reddy J.N, A finite element model for the analysis of 3D axisymmetric laminated shells with piezoelectric sensors and actuators: bending and free vibration, *Journal of Computer and Structures*, 2007

[5] Alibeigloo A, Madoliat R, Static analysis of cross-ply laminated plates with integrated surface piezoelectric layers using differential quadrature, *Journal of Composite Structures*, 2008.

[6] Malekzadeh P, Farid M, Zahedinejad P, A three-dimensional layerwise-differential quadrature free vibration analysis of laminated cylindrical shells. *Journal of Pressure Vessels and piping*, vol. 85, 2008, pp. 450-458

[7] Soong T.V, Asub devisional method for linear system, *Journal of AIAA/ASME Structures*, 1970, pp. 211-223

## پیوست

$$G_{comp}=\begin{bmatrix}
\frac{C_{23}}{C_{33}}-1 & RP_n & -\beta_m & \frac{1}{R}(C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}})-\frac{RE_2\omega^{*2}}{h} & P_n(\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}-C_{12}) & \frac{\beta_m}{R}(C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}}) \\
-RP_n\frac{C_{13}}{C_{33}} & -1 & 0 & P_n(\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}-C_{12}) & -RP_n^2(\frac{C_{13}^2}{C_{33}}-C_{11})+\frac{\beta_m^2}{R}C_{66}-\frac{RE_2\omega^{*2}}{h} & \beta_m P_n(\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}-C_{12}-C_{66}) \\
\beta_m\frac{C_{23}}{C_{33}} & 0 & -2 & \frac{\beta_m}{R}(C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}}) & \beta_m P_n(\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}-C_{12}-C_{66}) & \frac{\beta_m^2}{R}(C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}})+RP_n^2C_{66}-\frac{RE_2\omega^{*2}}{h} \\
\frac{R}{C_{33}} & 0 & 0 & -\frac{C_{23}}{C_{33}} & RP_n\frac{C_{13}}{C_{33}} & -\beta_m\frac{C_{23}}{C_{33}} \\
0 & \frac{R}{C_{55}} & 0 & -RP_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{R}{C_{44}} & \beta_m & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$G_{peizo}=\begin{bmatrix}
\frac{b_2}{\alpha}-1 & RP_n & -\beta_m & \frac{1}{R}(C_{22}-C_{23}\frac{b_2}{\alpha}+e_2\frac{b_4}{\alpha})-b_5 & -P_n(C_{12}-C_{23}\frac{b_1}{\alpha}+e_2\frac{b_3}{\alpha}) & \frac{\beta_m}{R}(C_{22}-C_{23}\frac{b_2}{\alpha}+e_2\frac{b_4}{\alpha}) & -\frac{b_4}{\alpha} & 0 \\
-RP_n\frac{b_1}{\alpha} & -1 & 0 & -P_n(C_{12}-C_{13}\frac{b_2}{\alpha}+e_1\frac{b_4}{\alpha}) & \frac{\beta_m^2}{R}C_{66}+RP_n^2(C_{11}-C_{13}\frac{b_1}{\alpha}+e_1\frac{b_3}{\alpha})-b_5 & -\beta_m P_n(C_{12}+C_{66}-C_{13}\frac{b_2}{\alpha}+e_1\frac{b_4}{\alpha}) & RP_n\frac{b_3}{\alpha} & 0 \\
\beta_m\frac{b_2}{\alpha} & 0 & -2 & \frac{\beta_m}{R}(C_{22}-C_{23}\frac{b_2}{\alpha}+e_2\frac{b_4}{\alpha}) & -\beta_m P_n(C_{12}+C_{66}-C_{23}\frac{b_1}{\alpha}+e_2\frac{b_3}{\alpha}) & RP_n^2C_{66}+\frac{\beta_m^2}{R}(C_{22}-C_{23}\frac{b_2}{\alpha}+e_2\frac{b_4}{\alpha})-b_5 & -\beta_m\frac{b_4}{\alpha} & 0 \\
\frac{\eta_3 R}{\alpha} & 0 & 0 & -\frac{b_2}{\alpha} & RP_n\frac{b_1}{\alpha} & -\beta_m\frac{b_2}{\alpha} & \frac{e_3R}{\alpha} & 0 \\
0 & \frac{R}{C_{55}} & 0 & -RP_n & 0 & 0 & 0 & -RP_n\frac{e_5}{C_{55}} \\
0 & 0 & \frac{R}{C_{44}} & \beta_m & 0 & 1 & 0 & \beta_m\frac{e_4}{C_{44}} \\
0 & RP_n\frac{e_5}{C_{55}} & -\beta_m\frac{e_4}{C_{44}} & 0 & 0 & 0 & -1 & -b_6 \\
\frac{e_3R}{\alpha} & 0 & 0 & \frac{b_4}{\alpha} & -RP_n\frac{b_3}{\alpha} & \beta_m\frac{b_4}{\alpha} & -\frac{CC_3R}{\alpha} & 0
\end{bmatrix}$$

$$\alpha=C_{33}\eta_3+e_3^2 \qquad b_1=C_{13}\eta_3+e_1e_3 \qquad b_2=C_{23}\eta_3+e_2e_3$$

$$b_3=e_1C_{33}-e_3C_{13} \qquad b_4=e_2C_{33}-e_3C_{23} \qquad b_5=\frac{\rho_{peizo}}{\rho_{comp}}\frac{RE_2\omega^{*2}}{h}$$

$$b_6=RP_n^2(\frac{e_5^2}{C_{55}}+\eta_1)+\frac{\beta_m^2}{R}(\frac{e_4^2}{C_{44}}+\eta_2)$$