

طراحی مسیر بهینه یک بازوی مکانیکی ماهر با پایه متحرک برای عبور از میان موانع فضایی

مصطفی غیور^{۱*}، مصطفی شریعتی نیا^۲

* نویسنده مسئول: ghayour@cc.iut.ac.ir

واژه‌های کلیدی

ربات پایه متحرک، بهینه‌سازی، طراحی مسیر، بازوی مکانیکی ماهر، الگوریتم ژنتیک.

چکیده

در این تحقیق روشی برای طراحی مسیر یک سیستم ربات پایه متحرک فضایی شامل پایه غیرهولونومیک و بازوی سه عضوی در حضور موانع ثابت و متحرک ارائه شده است. در اینجا از توابع پیوسته و هموار مانند توابع چندجمله‌ای به منظور مسیریابی ربات استفاده شده است. روش ارائه شده شامل به دست آوردن تاریخچه زمانی حرکت محرک‌های ربات می‌شود که تحت رفتار این محرک‌ها، ربات به پیکربندی نهایی خود می‌رسد. پایه به کار رفته در این تحقیق، پایه با رانش دیفرانسیلی است که از انواع پر کاربرد پایه‌هاست. بازوی مکانیکی واقع بر پایه نیز بازوی سه درجه آزادی فضایی است. ترکیب بازو و پایه باعث می‌شود که ربات در فضای کاری وسیع تری عمل کند. هر چند بررسی این نوع سیستم‌ها شامل بررسی مسئله به نام افزونگی درجات آزادی می‌شود که به پیچیدگی مسئله می‌افزاید، ولی افزونگی درجات آزادی در ربات، قابلیت‌های ویژه‌ای از نظر کاربردی برای آنها ایجاد می‌کند. در ربات‌های دارای افزونگی درجات آزادی در یک فضای کاری مشخص، مسیرهای متعددی برای ربات وجود دارد. یک راه برای انتخاب یک مسیر مناسب از بین مسیرهای ممکن، انتخاب یک اندیس مناسب و بهینه کردن آن است. نتایج عددی و نمودارها جهت طراحی مسیر بهینه برای یک مجموعه ربات پایه متحرک در حضور موانع با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک آورده شده است. موانع به کار رفته در مسئله نیز فضایی بوده و موانع ثابت و متحرک را شامل می‌شود.

۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

۲- دانشجوی دکتری مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان.

۱- مقدمه

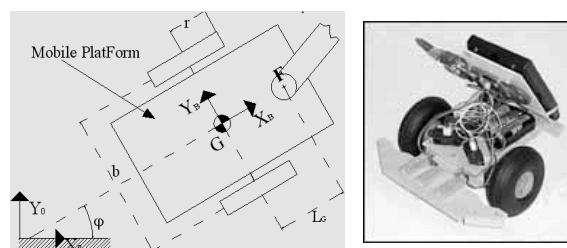
ربات‌ها در صنعت به منظور جایگزینی نیروی انسانی در کارهای تکراری و خطرناک به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. بازوهای مکانیکی ماهر از انواع متداول رباتها هستند.

امروزه با به وجود آمدن نیازهای جدید در صنایع فضایی و هسته‌ای و همچنین نیاز به کار در محیط‌های خطرناک برای انسان و انجام کارهای سنگین و تکراری از قبیل اکتشاف، کار در معادن، مین رویی، اطفای حریق در جنگلها، پاکسازی محیط‌های آلوده بر اثر انفجارات شیمیایی یا هسته‌ای و کارهایی که نیاز به سرعت و دقت خاصی دارند، ربات‌های با پایه متحرک مورد توجه قرار گرفته‌اند. این دسته از ربات‌ها به بازوهای پایه متحرک مشهور شده‌اند.

تعریف عام برای بازوی پایه متحرک عبارت است از بازویی که بر روی یک پایه‌ی متحرک^۱ نصب شده است. تواناییهای بازوی با پایه متحرک در جایی اهمیت خود را نشان می‌دهد که مهارت بازوی ربات و بزرگی فضای کاری^۲ هر دو مورد نیاز باشد.

بخش بزرگی از ربات‌های پایه متحرک را ربات‌های چرخدار تشکیل می‌دهند که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود. مطالعات انجام گرفته روی ربات‌های چرخدار شامل مباحث طراحی مسیر، عدم برخورد با موانع و هدایت پایه می‌باشد.

یکی از پرکاربردترین پایه‌های مورد استفاده در ربات‌های چرخدار پایه بارانش دیفرانسیلی^۳ است. مطابق شکل (۱) این نوع پایه دارای دو چرخ در دو طرف پایه بوده که هر چرخ به‌طور مستقل از دیگری می‌تواند چرخش کند و در نتیجه پایه دارای دو درجه آزادی است.



شکل (۱) پایه با رانش دیفرانسیلی [۸].

در میان مباحث مختلف مرتبط با ربات‌های پایه متحرک، مسیریابی ربات از اهمیت خاصی برخوردار است. هدف از این مبحث یافتن مسیری است که ربات از نقطه شروع تا نقطه پایان می‌پیماید. با توجه به کاربردهای ربات‌های متحرک در صنعت، یافتن مسیر بدون برخورد با موانع اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کنند. عدم برخورد با موانع بدون شک مسئله مهمی در طراحی مسیر ربات‌های پایه متحرک است، اما اگر بتوان مسئله طراحی مسیر را با در نظر گرفتن یک معیار بهینه حل کرد، بازده بیشتری دارد. معیار بهینه سازی با توجه به نوع مسئله تعریف می‌شود؛ یافتن کوتاه ترین مسیر ممکن، طی مسیر در کوتاه ترین زمان ممکن، به دست آوردن مسیری که توسط ربات با حداکثر سرعت ممکن پیموده شود و یا به دست آوردن مسیر به طوری که مجموع گشتاورهای وارده به پایه متحرک و عضوها حداقل شود، نمونه‌هایی از معیارهای مختلف بهینه سازی است.

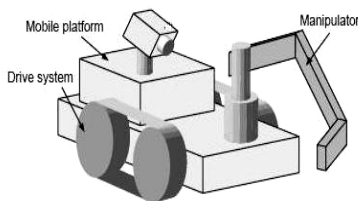
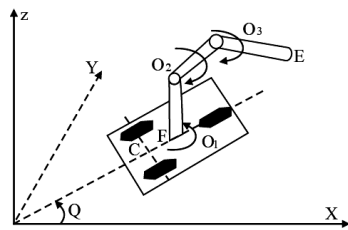
روش‌های مسیریابی ربات‌های پایه متحرک را می‌توان به دو دسته کلی روش‌های خارج خط^۴ و برخط^۵ تقسیم نمود. در روش اول فرض بر آن است که شکل و موقعیت هندسی موانع موجود در محیط حرکت ربات مشخص است، در حالی که در روش مسیریابی بر خط هیچ گونه اطلاعاتی در مورد وضعیت محیط، شکل و موقعیت هندسی موانع در دسترس نیست، بلکه ربات با استفاده از اطلاعات به‌دست آمده از سنسورها موقعیت موانع اطراف خود را به صورت لحظه‌ای شناسایی می‌کند.

در زمینه طراحی مسیر بازوهای مکانیکی ماهر و ربات‌های پایه متحرک کارهای زیادی انجام شده که به برخی از آنها اشاره می‌شود. در اغلب این مطالعات هدف به دست آوردن مسیری بوده است که ربات بتواند در محیطی بدون مانع، و یا در محیطی همراه با مانع موجود در مسیر، بدون برخورد با موانع از نقطه شروع به نقطه هدف برسد.

گارلیکی و همکارانش طراحی مسیر بهینه بدون برخورد را برای بازوی ماهر با افزونگی درجات آزادی ارائه دادند. آنها با محدود کردن حرکت بازوها، قیدی سینماتیکی به مسئله

همچنین طراحی مسیر بوسیله چند جمله‌ای‌های پارامتریک شامل معیار عدم برخورد توسط گوو و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت [۷].

در این مقاله، پس از بررسی سینماتیکی مسئله و ارائه‌ی روش طراحی مسیر و فرمولاسیون آن، مسئله بهینه‌سازی شامل تابع هدف و قیود مورد نظر ارائه می‌شود. پس از حل مسئله بهینه‌یابی، دو نمونه عددی برای یک ربات فضایی تحلیل و شبیه‌سازی شده و سپس نتایج گرافیکی و تحلیلی ارائه می‌شود. برای این کار مطابق شکل (۲) یک بازوی مکانیکی ماهر با سه درجه آزادی روی پایه متحرک فرض می‌شود که باید از موقعیت اولیه به موقعیت نهایی ثابت برسد و از برخورد با یک سری موانع با اندازه‌های مختلف پرهیز کند. ایده یافتن مسیری است که یک شاخص را بهینه کند. برای این منظور از تکنیک‌های بهینه‌سازی مانند الگوریتم ژنتیک برای یافتن مسیر بهینه بین موانع استفاده می‌شود.



شکل (۲) نمونه پایه متحرک ربات فضایی مورد بررسی [۲].

در اینجا فرض می‌شود موقعیت اولیه و نهایی نقطه F (متناظر با نقطه اتصال بازو به پایه) و زوایای مفصلی اولیه و نهایی بازو داده شده است. موانع شبیه‌سازی شده در این مقاله موانع استوانه‌ای است. در این تحقیق سینماتیک و دینامیک ترکیب بازوی سه درجه آزادی فضایی با پایه با رانش دیفرانسیلی بررسی می‌شود. قید غیرهولونومیک حاکم بر این پایه متحرک ربات را به دست آورده و معادلات دینامیکی ارائه می‌شود. در نهایت مسیر حرکت ربات طوری به دست می‌آید که قید

اضافه کردند و با استفاده از روشهای بهینه‌سازی سعی به کوتاه کردن طول مسیر طی شده توسط پنجه داشتند، این روش بر پایه روش میزان پتانسیل و کمینه کردن معیارهای انتگرالی بنا شده بود [۱].

پاپادوپولوس و همکارانش روشی برای تولید مسیر پایه متحرک و بازوی یک پایه متحرک ربات ارائه دادند به طوری که سیستم از یک موقعیت اولیه مشخص به موقعیت نهایی از پیش تعیین شده برسد و قید غیرهولونومیک را نقض نکند، مسیر پیشنهادی آنها یک تابع چند جمله‌ای هموار و پیوسته بود [۲].

لاوی و همکارانش از الگوریتم ژنتیک برای بهینه کردن مسیر حرکت یک بازوی مکانیکی ماهر با افزونگی درجات آزادی استفاده کردند. آنها کمینه کردن حرکت عضوها در حین حرکت پنجه را بعنوان معیاری برای بهینه‌سازی قرار دادند [۳].

پاپادوپولوس و همکارش، روشی برای طراحی مسیر یک بازوی ماهر نصب شده بر روی پایه متحرک با رانش دیفرانسیلی، در حضور موانع ارائه دادند. در این روش مسیر حرکت پایه و عضوها به صورت چند جمله‌ای در نظر گرفته شده است. به طوری که شرایط مرزی را ارضا کرده و قید غیرهولونومیک پایه را نقض نکند. هدف آنها تنها به دست آوردن مسیر بود و سعی به بهینه‌سازی آن نداشتند. همچنین موانع و بازوی به کار رفته در این ربات همگی صفحه‌ای فرض شده بودند. [۴].

هو و همکارانش مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی یک بازوی ماهر فضایی با پایه متحرک را با استفاده از فرمول لاگرانژ شرح دادند. در این مقاله از روش میدان پتانسیل برای مسیریابی ربات بدون حضور موانع استفاده شده است [۵].

حداد و همکارانش، طراحی مسیر بهینه برای یک بازوی مکانیکی ماهر را در حضور موانع انجام دادند. آنها یک تابع هدف متشکل از دو جمله (زمان طی مسیر و مربع میانگین گشتاور مفاصل) را تحت برخی قیود سینماتیکی و دینامیکی و قیود عدم برخورد مینیمم کرده و مسیر را بر اساس آن طراحی نمودند [۶].

پارامترهای هندسی بازو نیز در جدول (۲) ارائه شده است؛

جدول (۲) پارامترهای هندسی بازو.

پارامتر	توضیحات
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	موقعیت زاویه‌ای هر یک از اعضا
	نسبت به عضو قبلی
l_1, l_2, l_3	طول اعضا
r_1, r_2, r_3	فاصله مرکز جرم هر عضو از ابتدای آن

سرعت مرکز جرم پایه (G) بر محور چرخ‌ها عمود است و مؤلفه‌های آن در راستای X و Y عبارت است از:

$$\dot{x} = v_G \cos \varphi, \quad \dot{y} = v_G \sin \varphi \quad (1)$$

با حذف v_G از رابطه (۱) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

این رابطه قید سرعت یک قید غیر هیلونومیک است و قابل انتگرالگیری نیست. متغیرهای کنترل پایه، سرعت چرخ‌های چپ و راست $(\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l)$ می‌باشد. هدف آن است که سرعت‌های تعمیم یافته پایه $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi})$ را به صورت تابعی از سرعت‌های مستقل ورودی پایه $(\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l)$ نوشته شود. با نوشتن روابط میان سرعت‌ها، سرعت زاویه‌ای پایه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{D} (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \quad (3)$$

به همین ترتیب مقدار سرعت مرکز جرم پایه را می‌توان محاسبه نمود:

$$v_G = \frac{R}{\gamma} (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \quad (4)$$

با توجه به شرط عدم لغزش چرخ‌ها، راستای سرعت مرکز جرم پایه، v_G همواره بر محور چرخ‌ها عمود است. حال مؤلفه‌های سرعت مرکز جرم پایه در دستگاه مرجع به صورت زیر است:

$$\dot{x} = v_G \cos \varphi = \frac{R}{\gamma} \cos \varphi (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \quad (5)$$

$$\dot{y} = v_G \sin \varphi = \frac{R}{\gamma} \sin \varphi (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l)$$

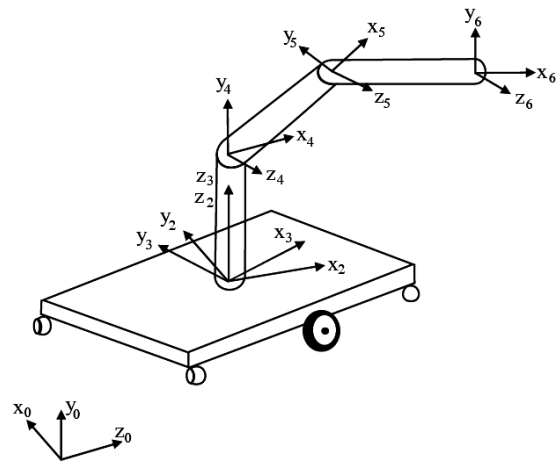
با انتخاب بردار $q = [x \ y \ \varphi \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ به عنوان مختصات تعمیم یافته، معادله قید رابطه (۲) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$A(q) \dot{q} = 0 \quad (6)$$

غیرهیلونومیک نقض نشود، پایه و بازو به مانع یا موانع برخورد نکنند، و همزمان مسیر طی شده توسط پنجه و پایه و مجموع گشتاورهای وارد به محرک‌ها حداقل شود.

۲- سینماتیک و دینامیک ربات

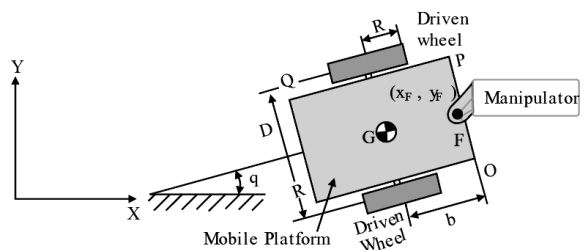
مطابق شکل (۳) یک بازوی مکانیکی ماهر فضایی بر روی پایه قرار گرفته است. این بازو سه درجه آزادی داشته و هر مفصل توسط یک موتور حرکت می‌کند. عضو ۱ بازو می‌تواند حول محور قائم دوران کند و عضوهای ۲ و ۳ می‌توانند در جهات بالا و پایین حرکت کنند. جدول (۱) و شکل (۴) پارامترهای هندسی پایه را نشان می‌دهد:



شکل (۳) نمای شماتیک بازوی مکانیکی ماهر فضایی [۵].

جدول (۱) پارامترهای هندسی پایه.

پارامتر	توضیحات
D	عرض پایه (فاصله بین دو چرخ)
l	طول پایه
φ	زاویه چرخش پایه
x, y	موقعیت مرکز جرم پایه
θ_l, θ_r	جابجایی زاویه‌ای چرخ‌ها
R	شعاع چرخ‌ها



شکل (۴) نمای شماتیک پایه ربات [۸].

حال با در نظر گرفتن $\dot{X} = [\dot{x}_E \ \dot{y}_E \ \dot{z}_E \ \dot{x} \ \dot{y}]$ و همچنین داشتن $v = [\dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]$ ، رابطه (۵) و (۱۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{X} = Jv \quad (13)$$

که J ، ماتریس ژاکوبین و مؤلفه های آن در پیوست (۱) ارائه شده است.

برای استخراج مدل دینامیکی ربات از روش ضرایب لاگرانژ بهره گرفته می شود. بازوی مکانیکی ماهر با پایه متحرک به دلیل وجود قید غیر هلونومیک، یک سیستم مقید است. معادلات لاگرانژ برای یک سیستم مقید به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q + A^T \lambda \quad (14)$$

که در آن $L = T - U$ لاگرانژین کل سیستم، T انرژی جنبشی کل سیستم، U انرژی پتانسیل سیستم، A ماتریس ضریب در فرم پافین معادله قید ($A\dot{q} = 0$)، λ ضرایب لاگرانژ و Q نیروهای تعمیم یافته می باشند.

برای محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل کل سیستم، فرض می شود. فاصله مرکز هر یک از اعضا از ابتدای آن عضو در بازو، r_1 ، r_2 و r_3 باشد. مختصات مرکز جرم عضو ۱ بازو را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_F = x + b \cos \varphi \\ y_1 &= y_F = y + b \sin \varphi \\ z_1 &= r_1 \end{aligned} \quad (15)$$

به همین ترتیب مختصات مرکز جرم عضوهای ۲ و ۳ بازو نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + r_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1) \\ y_2 &= y_1 + r_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1) \\ z_2 &= l_1 + r_2 \sin \theta_2 \\ x_3 &= x_1 + l_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + r_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\varphi + \theta_1) \\ y_3 &= y_1 + l_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + r_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\varphi + \theta_1) \\ z_3 &= l_1 + l_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (16)$$

انرژی جنبشی و پتانسیل کل سیستم را می توان به صورت زیر نوشت:

که در آن:

$$A(q) = [\sin \varphi \ -\cos \varphi \ 0 \ 0 \ 0] \quad (7)$$

سرعت های تعمیم یافته مستقل را به صورت در نظر می گیریم.

$$v = [\dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]$$

رابطه بین مشتق زمانی مختصات تعمیم یافته و سرعت های تعمیم یافته مستقل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{q} = S(q)v \quad (8)$$

که در آن ماتریس S به صورت زیر به دست می آید:

$$S(q) = \begin{bmatrix} \frac{R}{\gamma} \cos \varphi & \frac{R}{\gamma} \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R}{\gamma} \sin \varphi & \frac{R}{\gamma} \sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R}{D} & -\frac{R}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

برای بررسی سینماتیک بازوی مستقر بر روی پایه ابتدا مختصات پنجه (E) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} x_E &= x_F + l_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\varphi + \theta_1) \\ y_E &= y_F + l_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\varphi + \theta_1) \\ z_E &= l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} x_F &= x + b \cos \varphi \\ y_F &= y + b \sin \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

با مشتق گیری از رابطه (۱۰)، مؤلفه های سرعت پنجه به دست می آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= \dot{x}_F - [l_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\varphi + \theta_1)] (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) \\ &\quad - [l_2 \sin \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\varphi + \theta_1)] \dot{\theta}_2 \\ &\quad - [l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\varphi + \theta_1)] \dot{\theta}_3 \\ \dot{y}_E &= \dot{y}_F + [l_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\varphi + \theta_1)] (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) \\ &\quad - [l_2 \sin \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1) \\ &\quad + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\varphi + \theta_1)] \dot{\theta}_2 \\ &\quad - [l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\varphi + \theta_1)] \dot{\theta}_3 \\ \dot{z}_E &= [l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 \\ &\quad + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (12)$$

در این رابطه ستون‌های S پایه‌هایی برای فضای پوچ^۱ ماتریس A هستند. بنابراین S باید از رتبه ستونی کامل^۲ باشد، پس نتیجه می‌شود:

$$AS = 0 \quad (20)$$

و با مشتق‌گیری از رابطه (۱۹) نتیجه می‌شود:

$$\ddot{q} = \dot{S}v + S\dot{v} \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۲۱) و پیش ضرب آن در S^T نتیجه می‌شود:

$$\overline{M}(q)\dot{v} + \overline{V}(q, \dot{q}) + \overline{G}(q) = \overline{B}(q)\tau \quad (22)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \overline{M}(q) &= S^T M S \\ \overline{V}(q, \dot{q}) &= S^T (V + M \dot{S}v) \\ \overline{G}(q) &= S^T G \\ \overline{B}(q) &= S^T B \end{aligned} \quad (23)$$

۳- طراحی مسیر در حضور موانع

یک سیستم متحرک هنگامی مفید است که هدف خارج از دسترسی بازو باشد، در این صورت قابلیت تحرک پایه کارایی خود را نشان می‌دهد و ربات را قادر می‌سازد تا در پهنه وسیع تری عمل نماید. لازمه استفاده مؤثر از سیستم بازوی مکانیکی متحرک فراهم آوردن روش طراحی است که بتواند یک مسیر ممکن را برای راندن پنجه به سمت هدف مورد نظر بدون نقض کردن قیدهای غیرهولونومیک فراهم کند. به هر حال در بسیاری از کاربردها لازم است که موقعیت و زاویه پایه از قبل مشخص باشد.

در اینجا هدف طراحی مسیر هم برای پایه و هم برای بازو است به طوری که سیستم از یک موقعیت اولیه به یک موقعیت نهایی مشخص برسد. حل این مسئله به یافتن مسیری برای پایه متحرک معطوف شده است که موقعیت اولیه آن را $(x_F^{in}, y_F^{in}, \phi^{in})$ را به موقعیت نهایی $(x_F^{fin}, y_F^{fin}, \phi^{fin})$ متصل کند. باید توجه داشت در حین طراحی مسیر، قید غیرهولونومیک نباید نقض شود. قید غیرهولونومیک به دست آمده برای پایه مورد استفاده را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\dot{x}_F \sin \phi - \dot{y}_F \cos \phi + \dot{\phi} b = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_o (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_o \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ &+ \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} J_2 [(\dot{\phi} + \dot{\theta}_1)^2 + \dot{\theta}_2^2] \\ &+ \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) \\ &+ \frac{1}{2} J_3 [(\dot{\phi} + \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2] \\ U &= m_1 g r_1 + m_2 g (l_1 + r_2 \sin \theta_2) \\ &+ m_3 g [l_1 + l_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin (\theta_2 + \theta_3)] \end{aligned} \quad (17)$$

و با داشتن لاگرانژین کل سیستم و جایگزین کردن مقادیر آن از رابطه (۱۷) در رابطه (۱۴) به رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = B(q)\tau - A(q)^T \lambda \quad (18)$$

که در آن $M(q)$ ماتریس جرم، $V(q, \dot{q})$ بردار نیروهای کوریولیس، $G(q)$ بردار نیروهای گرانش بوده و ماتریس $B(q)$ در پیوست ۲ ارائه شده‌اند.

مؤلفه‌های بردار $\tau = [\tau_r \ \tau_l \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]$ به ترتیب گشتاور محرک چرخ راست، گشتاور محرک چرخ چپ و گشتاور محرک عضوهای ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد. این نکته نیز قابل ذکر است که در رابطه‌ی (۱۸) ماتریس جرم $M(q)$ ، یک ماتریس مثبت و متقارن می‌باشد. پارامترهای دینامیکی به کار رفته در روابط در جدول [۳] ارائه شده است.

جدول (۳) پارامترها و متغیرهای دینامیکی پایه و بازو.

پارامتر	توضیحات
m_o	جرم پایه
J_o	ممان اینرسی پایه حول محور z
m_1, m_2, m_3	جرم عضوهای بازو
J_2, J_3	ممان اینرسی عضوهای ۲ و ۳ نسبت به مرکز جرم
τ_r, τ_l	گشتاورهای وارد به چرخ‌های پایه
τ_1, τ_2, τ_3	گشتاورهای وارد به عضوهای بازو

اکنون برای ساده تر کردن معادله (۱۸) و با هدف حذف ضرایب لاگرانژ از روابط به دست آمده در بخش سینماتیک استفاده می‌شود. از رابطه (۸) که مشتق مختصات تعمیم‌یافته را توسط ماتریس $S(q)$ به سرعت‌های تعمیم‌یافته مستقل $v = [\dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]$ مرتبط می‌نماید، می‌توان نوشت:

$$\dot{q} = S(q)v \quad (19)$$

1- Null Space

2- Full Column Rank

به همین ترتیب می‌تواند چند جمله‌ای یا اسپلاین باشد. با توجه به رابطه (۲۸) باید شرایط اولیه و نهایی حرکت در تابع g صدق کند. در نهایت v نیز از رابطه (۳۲) محاسبه می‌شود. هنگامی که u ، v ، w به دست آمد با معکوس کردن رابطه (۳۱) مختصات پایه به دست می‌آید.

ابتدا فرض می‌شود مانعی در مسیر حرکت قرار ندارد، برای به دست آوردن مسیر پایه طبق روشی که گفته شد، توابع f و g را در رابطه (۳۲) به ترتیب چند جمله‌ای‌های درجه ۵ و ۳ انتخاب می‌کنیم:

$$f(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (33)$$

$$g(w) = b_3 w^3 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0 \quad (34)$$

ضرایب چند جمله‌ای‌های توابع f و g طوری محاسبه می‌شوند که شرایط اولیه و نهایی حرکت ارضا شود. با محاسبه u و v از فرمولهای (۲۸) و (۲۹) در ابتدا و انتهای حرکت چهار شرط مرزی وجود دارد که ضرایب مجهول چند جمله‌ای g به دست می‌آید. با داشتن موقعیت، سرعت و شتاب پایه در ابتدا و انتهای حرکت ضرایب مجهول چند جمله‌ای (۳۳) نیز به دست می‌آید.

برای به دست آوردن شکل تغییرات متغیر مفصلی هر یک از عضوها نیز یک چند جمله‌ای درجه ۵ برحسب زمان منظور شده است:

$$\theta_1(t) = \alpha_5 t^5 + \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0 \quad (35)$$

$$\theta_2(t) = \beta_5 t^5 + \beta_4 t^4 + \beta_3 t^3 + \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0 \quad (36)$$

$$\theta_3(t) = \gamma_5 t^5 + \gamma_4 t^4 + \gamma_3 t^3 + \gamma_2 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_0 \quad (37)$$

با داشتن موقعیت، سرعت و شتاب زاویه‌ای هر یک از بازوها در ابتدا و انتهای حرکت، ۶ معادله به دست می‌آید که ۶ ضریب مجهول، هر یک از روابط (۳۵) الی (۳۷) به دست می‌آید.

به منظور جلوگیری از برخورد با موانع، درجه آزادی دیگری باید به مسیر طراحی اضافه شود. یک روش ساده آن است که ضرایب دیگری به چند جمله‌ای $u(w)$ اضافه کرد که تعداد آن به تعداد موانع و موقعیت آنها در فضای کاری بستگی دارد. این ضرایب اضافی نباید روی ارضای شرایط مرزی تأثیر بگذارد، بلکه باید طوری باشد که به کمک آنها بتوان مسیر را تغییر داد. بدین ترتیب مسئله عدم برخورد با موانع را می‌توان به مسئله

این قید از نوع اسکالرونومیک می‌باشد و بنابراین آن را به فرم pfaffian به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$P(x_F, y_F, \varphi) dx_F + Q(x_F, y_F, \varphi) dy_F + R(x_F, y_F, \varphi) d\varphi = 0 \quad (25)$$

که P ، Q ، R به صورت زیر است:

$$P = \sin \varphi, \quad Q = -\cos \varphi, \quad R = b \quad (26)$$

رابطه (۲۵) برای طراحی مسیر مناسب نیست و لی قابل تبدیل به فرم زیر است:

$$du + vdw = 0 \quad (27)$$

استفاده از رابطه (۲۷) به سادگی روند حل کمک می‌کند. u ، v ، w تابع X_F ، y_F ، φ است.

برای تبدیل قید غیرهولونومیک توصیف شده در رابطه (۲۴) به شکل معادل آن یعنی رابطه (۲۷)، u ، v ، w به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u = x_F \sin \varphi - y_F \cos \varphi \quad (28)$$

$$v = b - x_F \cos \varphi - y_F \sin \varphi \quad (29)$$

$$w = \varphi \quad (30)$$

روابط (۲۸) تا (۳۰) در حقیقت تبدیلی از فضای (x_F, y_F, φ) به فضای (u, v, w) است. اگر این روابط را به فرم ماتریسی نوشته شود و داریم:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_F \\ y_F \\ \varphi \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

بنابراین به یک ماتریس دست یافتیم که قید غیرهولونومیک رابطه (۲۴) را به معادل آن رابطه (۲۷) تبدیل می‌کند. برای ارضای این قید کافی است u ، v ، w را به صورت زیر انتخاب شود:

$$\begin{aligned} w &= f(t) \\ u &= g(w) \end{aligned} \quad (32)$$

$$v = -\frac{du}{dw} = -g'(w)$$

بنابراین مسئله طراحی مسیر انتخاب f و g به نحوی است که شرایط اولیه و نهایی حرکت ربات ارضا شود. به عنوان مثال با توجه به رابطه (۳۲) مقدار f هر تابعی از زمان است که موقعیت زاویه‌ای پایه φ را در شرایط اولیه حرکت و پایان حرکت ارضا کند. این تابع ممکن است چند جمله‌ای، اسپلاین یا هر تابع پیوسته و یکنواخت از زمان باشد. تابع g نیز

$$v_1 = b - x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \quad (45)$$

با معکوس کردن روابط (۴۴) و (۴۵) روابط زیر نتیجه می شود:

$$x_1 = u_1 \sin w + (b - v_1) \cos w \quad (46)$$

$$y_1 = -u_1 \cos w + (b - v_1) \sin w \quad (47)$$

پس از جایگذاری روابط (۴۲)، (۴۳)، (۴۴) و (۴۶) در رابطه (۴۱) به دست می آید:

$$[u_F(w) - u_1(w)]^2 + [v_F(w) - v_1(w)]^2 > R_1^2 \quad (48)$$

رابطه (۴۸) یک رابطه ای است که قید عدم برخورد با موانع استوانه ای را برای نقطه F به ما می دهد که باید در مسئله طراحی مسیر منظور شود. حال روابطی برای عدم برخورد کل سیستم ربات متحرک با موانع استوانه ای استخراج می شود. در حالت کلی هفت حالت برخورد بین سیستم ربات متحرک و موانع وجود دارد؛ چهار حالت مربوط به چهار ضلع پایه متحرک و سه حالت مربوط به طول سه بازو است.

عدم برخورد نقطه F با موانع حالت خاصی از عدم برخورد ضلع OP با موانع است. با توجه به این نکته که مختصات هر نقطه از پایه را می توان براساس مختصات نقطه F نوشت، می توان برای هر نقطه از ربات قید عدم برخورد با موانع را به صورت یک رابطه نامساوی نوشت، به عنوان مثال در نقطه O :

$$x_O = x_F + \frac{D}{\gamma} \sin \varphi \quad (49)$$

$$y_O = y_F - \frac{D}{\gamma} \cos \varphi \quad (50)$$

از طرفی مختصات نقطه O را می توان از فضای $x-y$ به فضای $u-v-w$ به صورت زیر تصویر کرد؛

$$u_O = x_O \sin \varphi - y_O \cos \varphi \quad (51)$$

$$v_O = b - x_O \cos \varphi - y_O \sin \varphi \quad (52)$$

با جایگذاری روابط (۴۹) و (۵۰) در روابط (۵۱) و (۵۲) و پس از ساده سازی روابط زیر نتیجه می شود:

$$u_O = u_F + \frac{D}{\gamma} \quad (53)$$

$$v_O = v_F \quad (54)$$

پس شرط عدم برخورد نقطه O با موانع به صورت زیر بیان می شود:

$$\left(u_F + \frac{D}{\gamma} - u_1\right)^2 + (v_F - v_1)^2 > R_1^2 \quad (55)$$

یافتن مقادیر مناسب برای ضرایب اضافی تبدیل کرد، حل کردن این مسئله از لحاظ تحلیلی کار را راحت می کند. برای شروع ابتدا عدم برخورد یک نقطه از پایه با یک مانع استوانه ای را بررسی و مسئله عدم برخورد برای کل سیستم ربات متحرک در حضور موانع استوانه ای شرح داده می شود. پس فرض بر آن است که یک مانع استوانه ای در مسیر حرکت وجود دارد و بنابراین یک ضریب b_4 به چند جمله ای $u(w)$ اضافه می شود:

$$g(w) = b_4 w^4 + b_3 w^3 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0 \quad (38)$$

از آنجایی که قید غیرهولونومیک باید ارضاء شود، معادلات زیر را برای u و v داریم:

$$u(w) = b_4 w^4 + \sum_{i=0}^3 b_i w^i \quad (39)$$

$$v(w) = -4 b_4 w^3 - \sum_{i=1}^3 i b_i w^{i-1} \quad (40)$$

در حالی که همچنان رابطه (۳۳) برای φ و روابط (۳۵) الی (۳۷) برای θ_1 تا θ_3 برقرار است.

حال برای کامل شدن مسئله طراحی مسیر ربات، مدل ریاضی اجتناب از برخورد ربات با موانع را به شکل قیود نامساوی به مسئله طراحی مسیر اضافه می شود. فرض بر آن است که مرکز مانع استوانه ای و R_1 شعاع استوانه باشد، به منظور به دست آوردن شرطی برای عدم برخورد، فاصله بین مرکز مانع و نقطه F روی پایه باید از شعاع مانع در هر لحظه از حرکت بزرگتر باشد:

$$(x_F - x_1)^2 + (y_F - y_1)^2 > R_1^2 \quad (41)$$

از طرفی با معکوس کردن روابط (۲۸) و (۲۹) x_F, y_F بر حسب u_F, v_F به دست می آید:

$$y_F = -u_F \cos w + (b - v_F) \sin w \quad (42)$$

$$x_F = u_F \sin w + (b - v_F) \cos w \quad (43)$$

با توجه به این نکته که موانع استوانه ای در فضای $x-y$ به استوانه ای با همان شعاع در فضای $u-v-w$ تصویر می شود، بنابراین مرکز استوانه در فضای $x-y$ قابل تبدیل به فضای $u-v-w$ است:

$$u_1 = x_1 \sin \varphi - y_1 \cos \varphi \quad (44)$$

ابتدا مختصات نقاط واقع بر عضو دوم را بر حسب نقطه F به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_{AB} = x_F + x_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1), \quad 0 \leq x_2 \leq l_2 \quad (66)$$

$$y_{AB} = y_F + x_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1), \quad 0 \leq x_2 \leq l_2 \quad (67)$$

با جایگذاری روابط (66) و (67) در روابط (28) و (29) مختصات عضو اول بر حسب مختصات نقطه F در فضای $u-v-w$ به دست می‌آید:

$$u_{AB} = u_F - x_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2 \quad (68)$$

$$v_{AB} = v_F - x_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2 \quad (69)$$

پس نامساوی زیر عدم برخورد عضو دوم با مانع استوانه‌ای را تضمین می‌کند:

$$(u_F - x_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 - u_1)^2 + (v_F - x_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 - v_1)^2 > R_1^2, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2 \quad (70)$$

به همین ترتیب روابطی مشابه می‌توان برای عضو سوم به دست آورد.

۴- طراحی مسیر بهینه

همانگونه که گفته شد، ربات‌های پایه متحرک دارای درجات آزادی اضافه هستند که با توجه به آنها، می‌توان مسیر حرکت را بهینه کرد، با توجه به اینکه موقعیت بازو و پایه در ابتدا و انتهای حرکت مشخص است، آنچه که واضح است سرعت بازو و پایه نیز در ابتدا و انتهای حرکت صفر می‌باشد ولی می‌توان برای بازو و پایه در ابتدا و انتهای حرکت، شتاب متصور بود که مقدار شتاب هر یک از اعضا و پایه را می‌توان به عنوان پارامترهای بهینه سازی در نظر گرفت. از طرفی متغیر b_4 در رابطه مربوط به $g(w)$ دیگر پارامتر بهینه سازی است که به منظور ارضای قیود عدم برخورد با موانع منظور شده است. این پارامترها و تعداد آنها را می‌توان به منظور افزایش کارایی روش ارائه شده و بهبود جواب بهینه به دست آمده، با توجه به نوع مسئله و تعداد موانع موجود در مسیر تغییر داد.

قیود اصلی حاکم بر مسئله شامل قیود سینماتیکی عدم برخورد پایه متحرک (کل نقاط محیطی پایه) و بازوی

به همین ترتیب برای نقطه P, Q, R در شکل (۴) خواهیم داشت:

$$u_P = u_F - \frac{D}{2} \quad v_P = v_F \quad (56)$$

$$u_Q = u_F - \frac{D}{2} \quad v_Q = v_F + l \quad (57)$$

$$u_R = u_F + \frac{D}{2} \quad v_Q = v_F + l \quad (58)$$

پس از بررسی چهار رأس پایه به بررسی ضلع‌های پایه پرداخته می‌شود. بدین منظور ابتدا ضلع OP را بررسی شده است. اگر مختصات نقاط واقع بر ضلع OP بر حسب مختصات نقطه F نوشته شود:

$$x_{OP} = x_F + k \sin \varphi \quad (59)$$

$$y_{OP} = x_F - k \cos \varphi \quad (60)$$

در روابط بالا k متغیر است و در بازه $\left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right]$ تغییر می‌کند. با جایگذاری روابط (59) و (60) در روابط (28) و (29) مختصات ضلع OP در فضای $u-v-w$ بر حسب نقطه F به دست می‌آید:

$$u_{OP} = u_F + k \quad v_{OP} = v_F, \quad -\frac{D}{2} \leq k \leq \frac{D}{2} \quad (61)$$

پس نامساوی زیر شرط عدم برخورد ضلع OP با مانع استوانه‌ای را بیان می‌کند:

$$(u_F + k - u_1)^2 + (v_F - v_1)^2 > R_1^2, \quad -\frac{D}{2} \leq k \leq \frac{D}{2} \quad (62)$$

به همین ترتیب برای اضلاع RO, QR, PQ مختصات اضلاع در فضای $u-v-w$ بر حسب نقطه F به دست می‌آید و نامساوی‌های مشابه حاصل می‌شود:

$$u_{PQ} = u_F - \frac{d}{2} \quad v_{PQ} = v_F + c, \quad 0 \leq c \leq l \quad (63)$$

$$u_{QR} = u_F + k \quad v_{QR} = v_F + l, \quad -\frac{D}{2} \leq k \leq \frac{D}{2} \quad (64)$$

$$u_{RO} = u_F + \frac{d}{2} \quad v_{RO} = v_F + c, \quad 0 \leq c \leq l \quad (65)$$

شرایط عدم برخورد پایه متحرک با مانع بررسی شد. حال شرایط برخورد بازو با مانع نیز باید بررسی شود. از آنجا که عضو اول بازو به صورت قائم بر روی نقطه F قرار دارد، با جلوگیری از برخورد ضلع OP از پایه به موانع، این عضو بازو نیز با موانع برخورد نخواهد داشت. حال کافی است عدم برخورد عضو دوم و سوم بازو بررسی شود. برای این کار

عددی نمونه‌های ارائه شده، در نهایت ضرایب ذکر شده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$W_1 = 1, \quad W_2 = 0.1 \quad (74)$$

در ادامه پس از بیان مشخصات ربات پایه متحرک شبیه‌سازی شده، با چند مثال و نمونه، روش ارائه شده اعمال می‌شود. مشخصات ربات پایه متحرک شبیه‌سازی شده، شامل پارامترهای هندسی پایه و بازو و همچنین پارامترهای دینامیکی در جدول (۴) و (۵) ارائه شده است.

جدول (۴) پارامترهای هندسی پایه و بازو

واحد	مقدار	پارامتر	توضیحات
m	۰/۴	D	عرض پایه (فاصله بین دو چرخ)
m	۰/۵	l	طول پایه
m	۰/۱	R	شعاع چرخ‌ها
m	۰/۲	l _۱	طول عضو ۱
m	۰/۲	l _۲	طول عضو ۲
m	۰/۲	l _۳	طول عضو ۳
m	۰/۱	r _۱	فاصله مرکز جرم عضو ۱ از ابتدای عضو
m	۰/۱	r _۲	فاصله مرکز جرم عضو ۲ از ابتدای عضو
m	۰/۱	r _۳	فاصله مرکز جرم عضو ۳ از ابتدای عضو

جدول (۵) پارامترهای دینامیکی پایه و بازو.

واحد	مقدار	پارامتر	توضیحات
kg	۵۰	m _۰	جرم پایه
kg	۲	m _۱	جرم عضو ۱
kg	۲	m _۲	جرم عضو ۲
kg	۲	m _۳	جرم عضو ۳
kg.m ^۲	۱/۷	J _۰	مان اینرسی پایه
kg.m ^۲	۰/۰۰۶۷	J _۲	مان اینرسی عضو ۲
kg.m ^۲	۰/۰۰۶۷	J _۳	مان اینرسی عضو ۳

۵- مثال (۱) طراحی مسیر بهینه در حضور دو مانع ثابت

برای شبیه‌سازی موقعیت اولیه و نهایی ربات و دو مانع استوانه‌ای به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(x_F^{in}, y_F^{in}, \varphi^{in}, \theta_1^{in}, \theta_2^{in}, \theta_3^{in}) = (-2, 1, -90^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ)$$

موقعیت نهایی ربات:

$$(x_F^{fin}, y_F^{fin}, \varphi^{fin}, \theta_1^{fin}, \theta_2^{fin}, \theta_3^{fin}) = (1, 2, 90^\circ, 60^\circ, 10^\circ, 20^\circ)$$

مکانیکی (کل نقاط روی عضوها) با مانع یا موانع موجود در مسیر حرکت می‌باشد. این قیدها به شدت غیرخطی هستند. قیدهای سینماتیکی در مسئله طراحی مسیر برای ربات‌های دارای افزونگی درجات آزادی به صورت قیود نامساوی در مسئله بهینه‌سازی هستند.

با توجه به افزونگی درجات آزادی ربات، بی‌نهایت جواب قابل قبول به دست می‌آید. از میان این جواب‌ها می‌توان با انتخاب یک یا چند پارامتر مناسب، جواب بهینه را برگزید. شاخص‌هایی که می‌تواند به عنوان تابع هدف مطرح شود و کمینه کردن آنها مطلوب می‌باشد، عبارت‌اند از:

(۱) اندیس دینامیکی (مقدار گشتاور محرک‌ها): این اندیس، شامل گشتاور وارد به پایه و بازو در طی مسیر است:

$$Fobj D = \int_0^T \sqrt{(\tau_r^2 + \tau_l^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)} dt \quad (71)$$

که در آن اعضای بردار گشتاور $\tau = [\tau_r, \tau_l, \tau_1, \tau_2, \tau_3]$ به ترتیب گشتاور محرک چرخ راست، گشتاور محرک چرخ چپ و گشتاور محرک عضوهای ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد. T زمان کل حرکت است.

(۲) اندیس سینماتیکی (مسافت طی شده توسط پایه و پنجه ۱):

با کمینه کردن طول مسیر طی شده توسط پایه و بازو،

ضمن کاهش زمان طی مسیر و افزایش سرعت عمل

ربات، انرژی مصرفی نیز کاهش می‌یابد.

$$Fobj K = Fobj K_1 + Fobj K_2 \\ = \int_{In.Pos.}^{Fin.Pos.} \Delta s_F + \int_{In.Pos.}^{Fin.Pos.} \Delta s_E \quad (72)$$

با در نظر گرفتن یک تابع هدف ترکیبی که شامل اندیس دینامیکی و سینماتیکی باشد می‌توان اندیس‌های ذکر شده را همزمان بهینه نمود:

$$Fobj = W_1 Fobj K + W_2 Fobj D \quad (73)$$

در رابطه فوق W_1 و W_2 ضرایب وزنی برای هر کدام از جملات می‌باشد. با توجه به تاثیر غیرمستقیم اندیس سینماتیکی نسبت به اندیس دینامیکی، $Fobj K$ نسبت به $Fobj D$ از اهمیت بیشتری برخوردار است. همچنین از حل

مانع ۱:

استوانه‌ای به شعاع: $r_1 = 0.45 \text{ m}$

و مرکز: $(x_1, y_1) = (1/2, 0/9)$

مانع ۲:

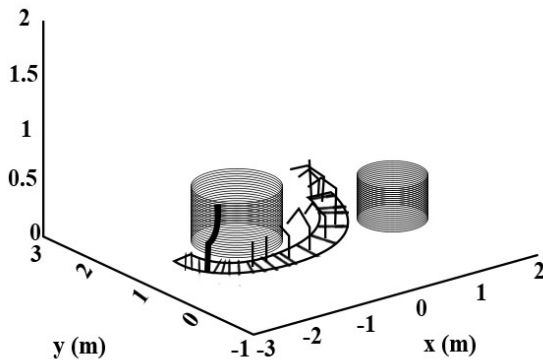
استوانه‌ای به شعاع: $r_2 = 0.6 \text{ m}$

و مرکز: $(x_2, y_2) = (-1, 1/5)$

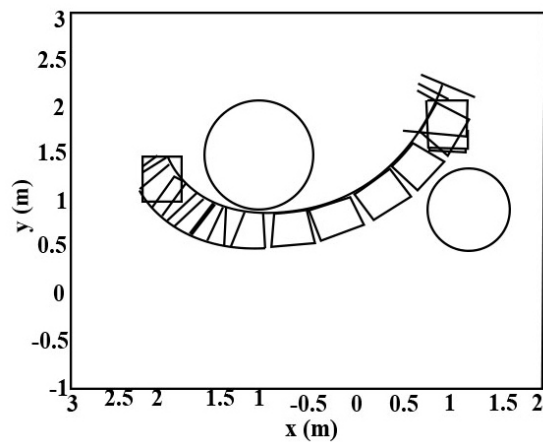
بنابراین در این حالت پارامترهای بهینه‌سازی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} x(1) &= b_5 & x(2) &= b_4 \\ x(3) &= \ddot{\theta}_{1in} & x(4) &= \ddot{\theta}_{1fin} \\ x(5) &= \ddot{\theta}_{2in} & x(6) &= \ddot{\theta}_{2fin} \\ x(7) &= \ddot{\theta}_{3in} & x(8) &= \ddot{\theta}_{3fin} \\ x(9) &= \ddot{\phi}_{in} & x(10) &= \ddot{\phi}_{fin} \end{aligned} \quad (76)$$

$X = [b_5 \ b_4 \ \ddot{\theta}_{1in} \ \ddot{\theta}_{1fin} \ \ddot{\theta}_{2in} \ \ddot{\theta}_{2fin} \ \ddot{\theta}_{3in} \ \ddot{\theta}_{3fin} \ \ddot{\phi}_{in} \ \ddot{\phi}_{fin}]$
پس از اجرای مسئله بهینه‌سازی و استخراج مقادیر بهینه پارامترها، مسیر بهینه ربات متحرک از بین تمامی مسیرهای ممکن به دست می‌آید. برای نمایش مسیر طی شده توسط ربات در زمان داده شده، چند نما از ترکیب ربات در طول زمان حرکت از موقعیت ابتدایی تا موقعیت نهایی را در حضور مانع ثابت مشخص نمایش داده شده است. شکل (۵) نتایج شبیه‌سازی و مسیر بهینه تولید شده مجموعه ربات پایه متحرک در حضور دو مانع استوانه‌ای ثابت را نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

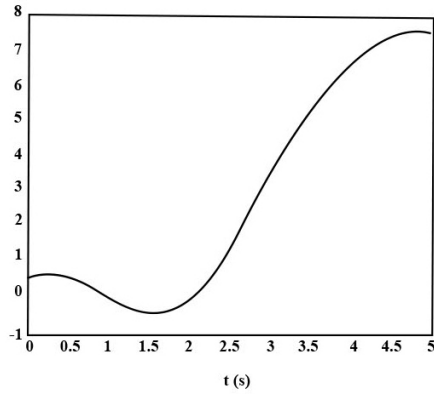
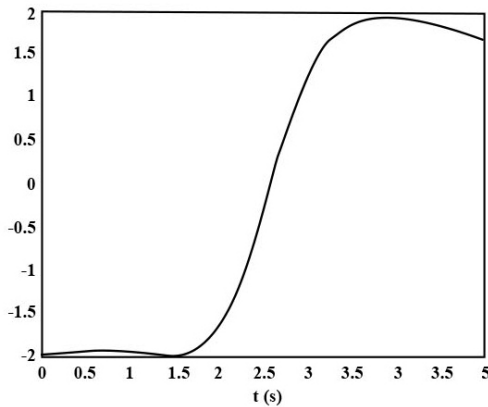
شکل (۵) نتایج شبیه‌سازی و مسیر بهینه در حضور دو مانع استوانه‌ای ثابت. (الف) نمای سه بعدی، (ب) نمای دو بعدی.

برای شبیه‌سازی، زمان حرکت برابر با ۵ ثانیه است. باید توجه کرد که تغییر زمان حرکت ربات فقط در سریعتر یا کندتر انجام شدن وظیفه ربات مؤثر است و در روش حل تأثیری نمی‌گذارد. بهین‌یابی به کمک الگوریتم ژنتیک، روشی مناسب و مطلوب برای طراحی مسیر بهینه برای عبور از بین موانع در رباتیک است. به خاطر اینکه در این موارد معادلات قیود نسبتاً زیاد و به شدت غیر خطی‌اند، روش‌های سنتی و تحلیلی عددی قادر به یافتن مسیر مناسب و قابل قبول نیستند، اما الگوریتم ژنتیک غالباً در صورت اجرای درست و انتخاب مناسب پارامترها به جواب بهینه مطلق دست می‌یابد.

بنابراین از ابزارهای بهینه‌یابی نرم‌افزار Matlab به روش الگوریتم ژنتیک استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که برای بهینه‌سازی به روش‌های معمول، نقطه شروع حل باید به عنوان ورودی به الگوریتم معرفی گردد. در روش الگوریتم ژنتیک، دادن نقطه شروع الزامی نیست، ولی یک حدس اولیه خوب به همگرا شدن الگوریتم کمک می‌کند [۸].

در این مورد بدلیل افزایش تعداد موانع موجود در مسیر، انتخاب چندجمله‌ای با درجه بالاتر برای توابع f و g مطلوب بوده و امکان بررسی مسیرهای بیشتر و انتخاب جواب مناسب تر را ممکن می‌سازد. همچنین در مواردی که چیدمان موانع نسبتاً پیچیده باشد ممکن است چندجمله‌ای با درجه پایین برای توابع f و g جواب قابل قبولی ارائه ندهد، که با افزایش درجه توابع مذکور به ویژه تابع $g(w)$ و اضافه کردن ضرایب چندجمله‌ای می‌توان این مشکل را حل نمود. پس به منظور بالا بردن احتمال یافتن مسیر ممکن، تابع $g(w)$ را یک چند جمله‌ای درجه ۵ انتخاب می‌شود. با بالا رفتن درجه چند جمله‌ای g تعداد پارامترهای بهینه‌سازی نیز افزایش می‌یابد.

$$g(w) = b_5 w^5 + b_4 w^4 + b_3 w^3 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0 \quad (75)$$

2nd Link Torque (N.m) Vs. Time (s)3rd Link Torque (N.m) Vs. Time (s)

شکل (۶) تاریخچه تغییرات گشتاور مجموعه ربات پایه متحرک (چرخ‌ها و مفاصل) بر حسب زمان

۶- مثال (۲) طراحی مسیر بهینه در حضور مانع متحرک

روش ارائه شده در این تحقیق قابل تعمیم به موانع متحرک نیز است. بدین منظور فرض می‌کنیم مختصات مرکز مانع به صورت تابعی از زمان به صورت زیر باشد:

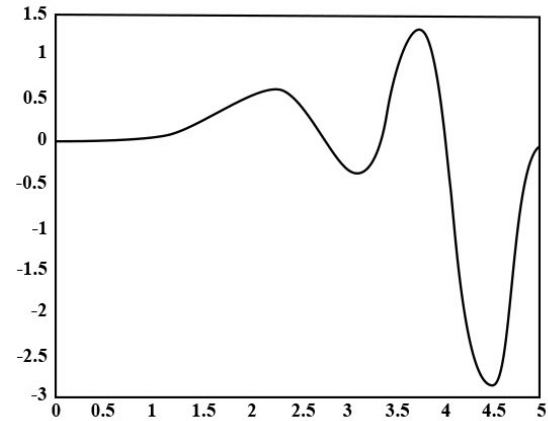
$$x_1 = -0.4t + 2, \quad y_1 = 0.128t^2 - 0.64t + 1.8 \quad (77)$$

در شبیه‌سازی، زمان حرکت برابر ۵ ثانیه در نظر گرفته شده است. در این بازه زمانی و معادلات زمانی داده شده در رابطه فوق مانع استوانه‌ای مسیری سهموی را طی می‌کند. با در نظر گرفتن این مسیر برای مانع متحرک، نقاط ابتدا و انتها عبارت‌اند از:

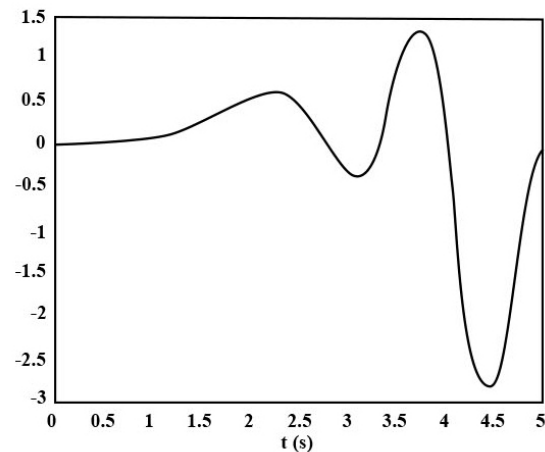
$$(x_1, y_1)^{in} = (2, 1.8), \quad (x_1, y_1)^{fin} = (0, 1.8) \quad (78)$$

مسیر سهموی طی شده توسط مانع استوانه‌ای متحرک در فضای سه بعدی و همچنین نما از بالای مسیر مانع متحرک در شکل (۷) نشان داده شده است.

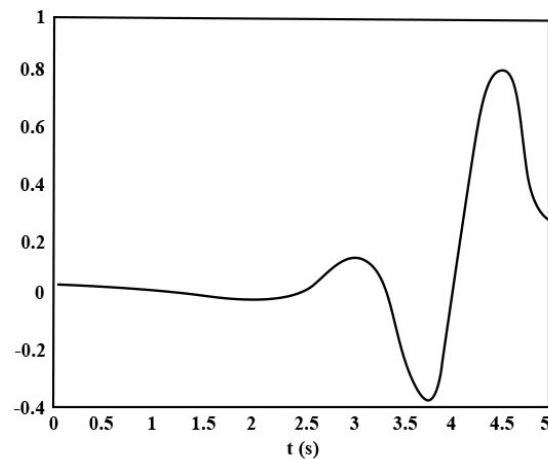
تاریخچه تغییرات گشتاور مجموعه ربات پایه متحرک شبیه سازی شده شامل گشتاور چرخ‌های چپ و راست و مفاصل اول، دوم و سوم در نمودارهای شکل (۶) ارائه شده است.

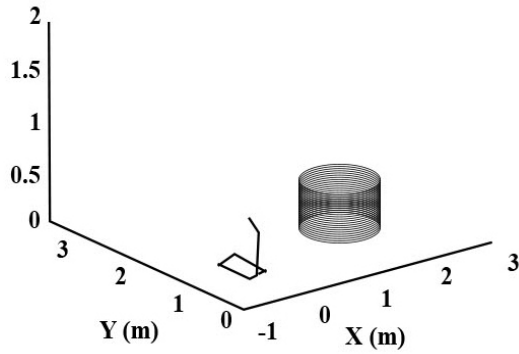


Left Wheel Torque (N.m) Vs. Time (s)

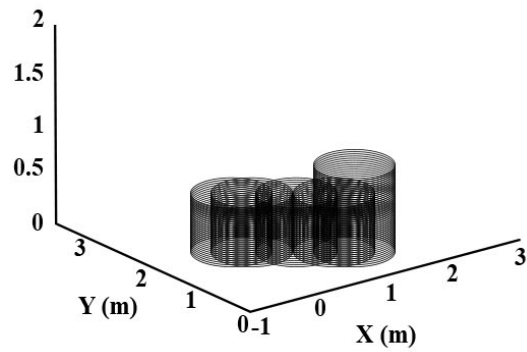


Right Wheel Torque (N.m) Vs. Time (s)

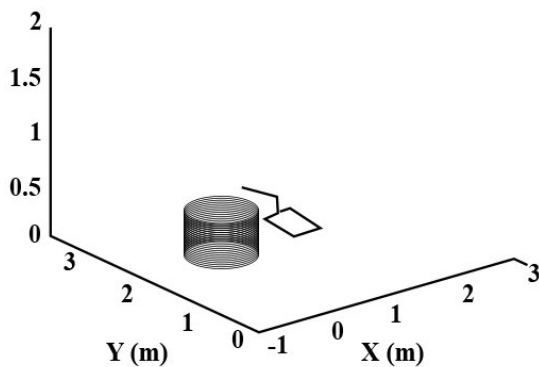
1st Link Torque (N.m) Vs. Time (s)



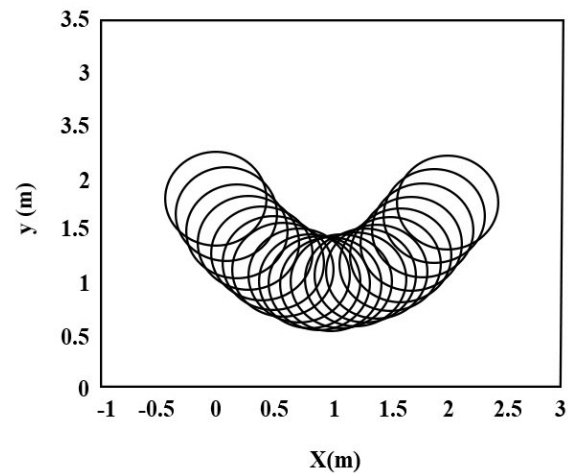
شکل (۸) موقعیت اولیه ربات و مانع.



(الف)



شکل (۹) موقعیت نهایی ربات و مانع.



(ب)

شکل (۷) مسیر طی شده توسط مانع استوانه‌ای متحرک (الف) نمای سه بعدی، (ب) نمای دو بعدی (از بالا).

پس از اجرای مسئله بهینه‌سازی و استخراج مقادیر بهینه پارامترها، مسیر بهینه ربات متحرک از بین تمامی مسیرهای ممکن به دست می‌آید. از آنجا که در این مورد علاوه بر ربات، مانع نیز متحرک می‌باشد، نمایش همزمان ربات و مانع متحرک فقط با تصاویر متحرک امکانپذیر است. برای نمایش مسیر طی شده توسط ربات در زمان داده شده، چند نما از ترکیب ربات در طول زمان حرکت از موقعیت ابتدایی تا موقعیت نهایی برای نمایش عدم برخورد و چگونگی عبور از کنار مانع متحرک در پیوست (۳) نمایش داده شده است. همچنین شکل (۱۰) نتایج شبیه‌سازی و مسیر بهینه تولید شده مجموعه ربات پایه متحرک را نشان می‌دهد.

از آنجایی که نمایش همزمان مسیر طی شده توسط ربات و مانع متحرک در یک شکل امکانپذیر نمی‌باشد و شکل گویایی ارائه نمی‌دهد در پیوست (۳) حرکت ربات و مانع از ابتدا تا انتهای مسیر در فاصله‌های زمانی ۰/۵ ثانیه بطور مجزا ارائه شده است.

پارامترهای هندسی و دینامیکی سیستم ربات پایه متحرک را مانند قبل و موقعیت اولیه و نهایی ربات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

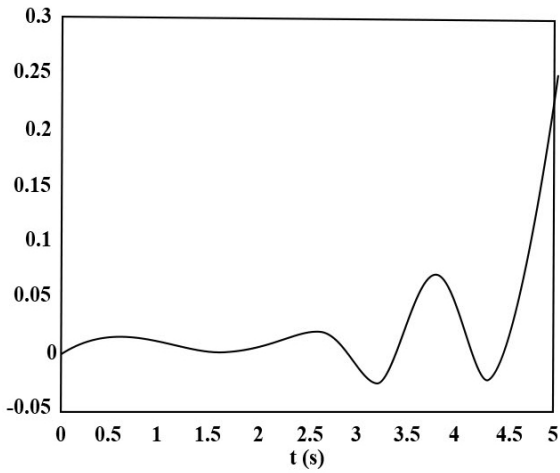
موقعیت اولیه ربات :

$$(x_F^{in}, y_F^{in}, \phi^{in}, \theta_1^{in}, \theta_2^{in}, \theta_3^{in}) = (0, 0/5, -90^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ)$$

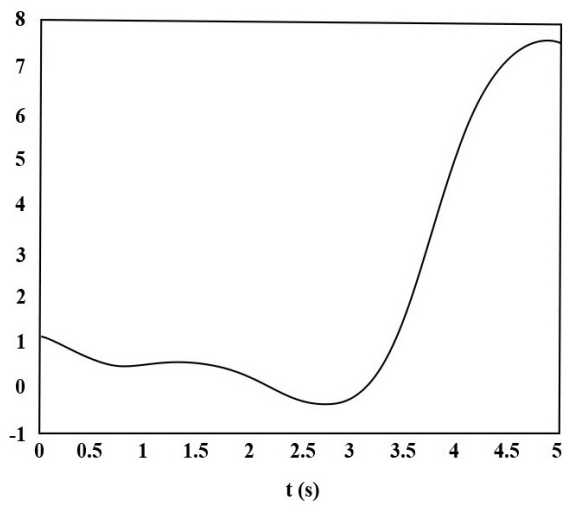
موقعیت نهایی ربات :

$$(x_F^{fin}, y_F^{fin}, \phi^{fin}, \theta_1^{fin}, \theta_2^{fin}, \theta_3^{fin}) = (1/5, 2/5, -90^\circ, 60^\circ, 10^\circ, 20^\circ)$$

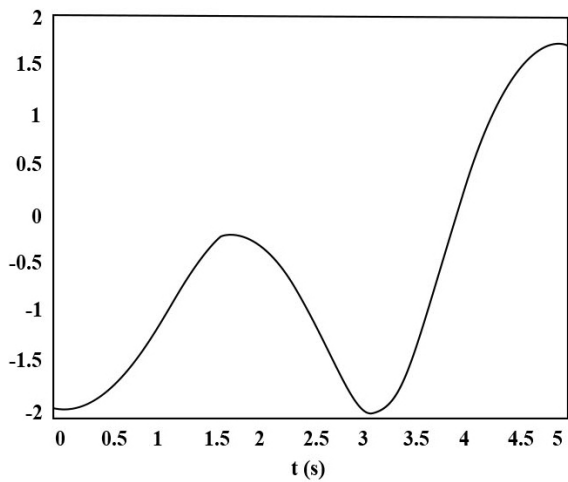
موقعیت اولیه ربات و مانع در شکل (۸) و موقعیت نهایی آنها در شکل (۹) نشان داده شده است.



c) 1st Link Torque (N.m) Vs. Time (s)

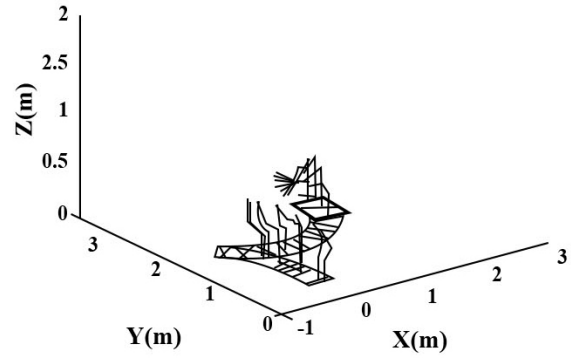


d) 2nd Link Torque (N.m) Vs. Time (s)



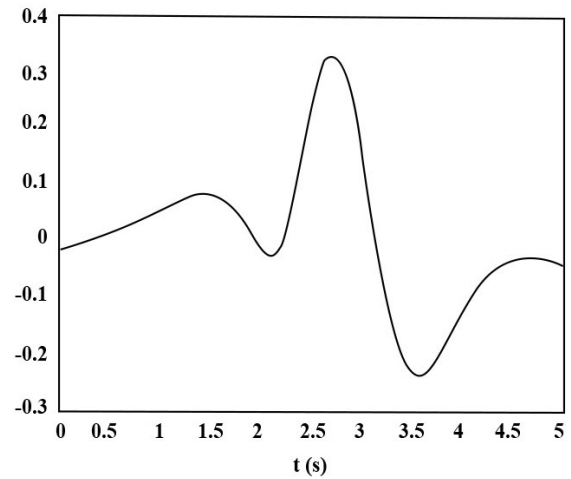
e) 3rd Link Torque (N.m) Vs. Time (s)

شکل (۱۱) تاریخچه تغییرات گشتاور مجموعه ربات پایه متحرک (چرخ‌ها و مفاصل) بر حسب زمان.

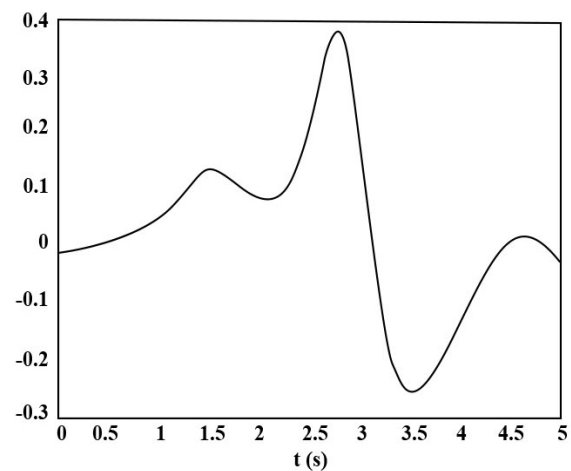


شکل (۱۰) مسیر بهینه مجموعه ربات پایه متحرک در حضور یک مانع استوانه‌ای متحرک.

تاریخچه تغییرات گشتاور مجموعه ربات پایه متحرک شبیه سازی شده شامل گشتاور چرخ‌های چپ و راست و مفاصل اول، دوم و سوم در نمودارهای شکل (۱۱) ارائه شده است.



a) Left Wheel Torque (N.m) Vs. Time (s)



b) Right Wheel Torque (N.m) Vs. Time (s)

۷- نتیجه گیری

چندجمله‌ای‌ها مناسب و متناسب با تعداد موانع بوده و کاملاً آگاهانه انتخاب شود. مزیت دیگر این روش آن است که با اضافه شدن هر مانع به مسیر، تعداد قیود مسئله به طور خطی افزایش می‌یابد و روش کلی طراحی مسیر تغییر نمی‌کند. همچنین به منظور شبیه سازی هر مانع، تنها نیازمند به هندسه و موقعیت مانع نیاز است.

مراجع

- [1] Garlicky M., Optimal Planning of Collision Free Trajectory of Redundant Manipulators, Engineering Application of AI 12, 1992, pp. 549-559.
- [2] Papadopoulos E., Poulakakis I., *Planning and Model-Based Control for Mobile Manipulators*, Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Kagawa University, Takamatsu, Japan, October 2000.
- [3] Lavoie M.H., Boudreau R., *Obstacle Avoidance for Redundant Manipulators Using a Genetic Algorithm*, CCTOMM Symposium, 2001.
- [4] Papadopoulos E., Poulakakis I., *Planning and Obstacle Avoidance for Mobile Robots*, Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2001, Seoul, Korea, 2001.
- [5] Hu Y.M, Guo B.H., *Modeling and Motion Planning of a Three link Wheeled Mobile Manipulator*, 8th International Conference on Control, Automation, Robotics, China, December 2004.
- [6] Haddad M., Chettibi T., Hanchi S., Lehtihet H. E., *Optimal Motion Planner of Mobile Manipulators in Generalized Point-to-Point Task*, IEEE 2006.
- [7] Guo Y., Long Y., Sheng W., *Global Trajectory for Nonholonomic Robots in Dynamic Environment.*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy, April 2007.

[۸]. شریعتی‌نیا، م.، طراحی مسیر بهینه یک بازوی مکانیکی ماهر با پایه متحرک به منظور عدم برخورد با موانع، پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک طراحی کاربردی، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۹.

در این تحقیق، یک روش طراحی مسیر بهینه برای بازوی پایه متحرک همراه با قید غیر هلوئومیک پایه در حضور موانع ارائه شد. روش ارائه شده، به دست آوردن توابعی برای حرکت پایه و هر کدام از اعضاها بر حسب زمان منجر می‌شود. مسیر به دست آمده و تاریخچه حرکت پایه و بازو نیز به دلیل استفاده از توابع چند جمله‌ای، پیوسته و یکنواخت است.

از آنجا که دینامیک یک سیستم رباتیکی اهمیت زیادی دارد، علاوه بر اندیس سینماتیکی، اندیس دینامیکی نیز برای بهینه سازی منظور شده است. در این مسئله طول مسیر طی شده توسط پایه و بازو در اولویت اول قرار دارد و کاهش آن تاثیر مستقیم بر روی کاهش انرژی مصرفی دارد و ضریب وزنی بیشتری برای آن در نظر گرفته شد.

طراحی مسیر بهینه یک سیستم بازوی پایه متحرک همراه با قید غیر هلوئومیک، با در نظر گرفتن دینامیک سیستم و موانع موجود در مسیر، یک مسئله بهینه سازی غیر خطی مقید است که فضای جواب‌های به دست آمده ناپیوسته بوده و شامل مینیمم‌های محلی نیز است. از آنجا که روش‌های بهینه سازی کلاسیک قادر به حل این گونه مسائل نیستند، در این تحقیق از روش‌های بهینه‌سازی محاسبات تکاملی شامل روش الگوریتم ژنتیک استفاده شد و مشاهده شد که الگوریتم ژنتیک غالباً در صورت اجرای درست و انتخاب مناسب پارامترها به جواب بهینه مطلق دست می‌یابد.

تاریخچه مقدار گشتاور پایه و بازو بر حسب زمان به روش ارائه شده رسم و ملاحظه گردید که این روش به جواب‌های مطلوب، معقول، هموار و بهینه منجر می‌شود. با توجه به روش ارائه شده می‌توان چنین نتیجه گرفت که با داشتن فضای کاری نامحدود، در حالتی که تنها یک مانع در مسیر حرکت وجود دارد، روش ارائه شده حتماً به مسیر بهینه منجر می‌شود. همچنین می‌توان راه‌هایی برای افزایش احتمال به دست آوردن مسیر بهینه در صورت افزایش تعداد موانع پیشنهاد داد. یک راه ساده افزایش درجه چندجمله‌ای‌های $f(t)$ و $g(w)$ است. البته باید توجه کرد با افزایش تعداد درجات چندجمله‌ای‌ها، تعداد متغیرهای مسئله افزایش یافته و احتمال همگرایی به نقطه بهینه مطلق کاهش می‌یابد، بنابراین استفاده از چندجمله‌ای‌ها با مرتبه بسیار بالا نیز توصیه نمی‌شود. پس بایستی درجه این

۹- پیوست‌ها

پیوست (۱) ماتریس ژاکوبین (J):

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} \\ \circ & \circ & \circ & J_{34} & J_{35} \\ \frac{R}{\gamma} \cos \varphi & \frac{R}{\gamma} \cos \varphi & \circ & \circ & \circ \\ \frac{R}{\gamma} \sin \varphi & \frac{R}{\gamma} \sin \varphi & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{R}{\gamma} \cos \varphi - \left[b \sin \varphi + l_{\gamma} \cos \theta_{\gamma} \sin(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\varphi + \theta_{\gamma}) \right] \frac{R}{\gamma D} \\ J_{12} &= \frac{R}{\gamma} \cos \varphi - \left[b \sin \varphi + l_{\gamma} \cos \theta_{\gamma} \sin(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\varphi + \theta_{\gamma}) \right] \frac{R}{\gamma D} \\ J_{13} &= -[l_{\gamma} \cos \theta_{\gamma} \sin(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\varphi + \theta_{\gamma})] \\ J_{14} &= -[l_{\gamma} \sin \theta_{\gamma} \cos(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \sin(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\varphi + \theta_{\gamma})] \\ J_{15} &= -[l_{\psi} \sin(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\varphi + \theta_{\gamma})] \\ J_{21} &= \frac{R}{\gamma} \sin \varphi + [b \cos \varphi + l_{\gamma} \cos \theta_{\gamma} \cos(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\varphi + \theta_{\gamma})] \frac{R}{\gamma D} \\ J_{22} &= \frac{R}{\gamma} \sin \varphi - [b \cos \varphi + l_{\gamma} \cos \theta_{\gamma} \cos(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\varphi + \theta_{\gamma})] \frac{R}{\gamma D} \\ J_{23} &= l_{\gamma} \cos \theta_{\gamma} \cos(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\varphi + \theta_{\gamma}) \\ J_{24} &= -[l_{\gamma} \sin \theta_{\gamma} \sin(\varphi + \theta_{\gamma}) + l_{\psi} \sin(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\varphi + \theta_{\gamma})] \\ J_{25} &= -[l_{\psi} \sin(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\varphi + \theta_{\gamma})] \\ J_{34} &= -[l_{\psi} \sin(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\varphi + \theta_{\gamma})] \\ J_{35} &= l_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \end{aligned}$$

پیوست (۲) ماتریس جرم $M(q)$:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_o + m_{\gamma} & \circ & M_{x\phi} & M_{x\theta_{\gamma}} & M_{x\theta_{\psi}} & M_{x\theta_{\psi}} \\ + m_{\gamma} + m_{\psi} & \circ & M_{x\phi} & M_{x\theta_{\gamma}} & M_{x\theta_{\psi}} & M_{x\theta_{\psi}} \\ \circ & m_o + m_{\gamma} & M_{y\phi} & M_{y\theta_{\gamma}} & M_{y\theta_{\psi}} & M_{y\theta_{\psi}} \\ + m_{\gamma} + m_{\psi} & \circ & M_{y\phi} & M_{y\theta_{\gamma}} & M_{y\theta_{\psi}} & M_{y\theta_{\psi}} \\ M_{\phi x} & M_{\phi y} & M_{\phi\phi} & M_{\phi\theta_{\gamma}} & M_{\phi\theta_{\psi}} & M_{\phi\theta_{\psi}} \\ M_{\theta_{\gamma} x} & M_{\theta_{\gamma} y} & M_{\theta_{\gamma}\phi} & M_{\theta_{\gamma}\theta_{\gamma}} & \circ & \circ \\ M_{\theta_{\psi} x} & M_{\theta_{\psi} y} & M_{\theta_{\psi}\phi} & \circ & M_{\theta_{\psi}\theta_{\psi}} & M_{\theta_{\psi}\theta_{\psi}} \\ M_{\theta_{\psi} x} & M_{\theta_{\psi} y} & M_{\theta_{\psi}\phi} & \circ & M_{\theta_{\psi}\theta_{\psi}} & M_{\theta_{\psi}\theta_{\psi}} \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} M_{x\phi} &= M_{\phi x} = -[(m_{\gamma} + m_{\psi} + m_{\psi})d \sin \phi + (m_{\gamma}r_{\gamma} + m_{\psi}l_{\gamma}) \cos \theta_{\gamma} \sin(\phi + \theta_{\gamma}) + m_{\psi}r_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\phi + \theta_{\gamma})] \\ M_{x\theta_{\gamma}} &= M_{\theta_{\gamma} x} = -[m_{\gamma}r_{\gamma} + m_{\psi}l_{\gamma}) \cos \theta_{\gamma} \sin(\phi + \theta_{\gamma}) + m_{\psi}r_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \sin(\phi + \theta_{\gamma})] \\ M_{x\theta_{\psi}} &= M_{\theta_{\psi} x} = -[m_{\gamma}r_{\gamma} + m_{\psi}l_{\gamma}) \sin \theta_{\gamma} \cos(\phi + \theta_{\gamma}) + m_{\psi}r_{\psi} \sin(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\phi + \theta_{\gamma})] \\ M_{x\theta_{\psi}} &= M_{\theta_{\psi} x} = m_{\psi}r_{\psi} \sin(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\phi + \theta_{\gamma}) \\ M_{y\phi} &= M_{\phi y} = (m_{\gamma} + m_{\psi} + m_{\psi})d \cos \phi + (m_{\gamma}r_{\gamma} + m_{\psi}l_{\gamma}) \cos \theta_{\gamma} \cos(\phi + \theta_{\gamma}) + m_{\psi}r_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\phi + \theta_{\gamma}) \\ M_{y\theta_{\gamma}} &= M_{\theta_{\gamma} y} = (m_{\gamma}r_{\gamma} + m_{\psi}l_{\gamma}) \cos \theta_{\gamma} \cos(\phi + \theta_{\gamma}) + m_{\psi}r_{\psi} \cos(\theta_{\gamma} + \theta_{\psi}) \cos(\phi + \theta_{\gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{y\theta_\gamma} &= M_{\theta_\gamma y} = -[m_\gamma r_\gamma + m_\gamma l_\gamma] \sin \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) + m_\gamma r_\gamma \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma) \\
M_{y\theta_\gamma} &= M_{\theta_\gamma y} = -m_\gamma r_\gamma \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma) \\
M_{\phi\gamma} &= m_\gamma r_\gamma^\gamma \cos^\gamma \theta_\gamma + m_\gamma [l_\gamma \cos \theta_\gamma + r_\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma)]^\gamma + [(m_\gamma r_\gamma + m_\gamma l_\gamma) d \cos \theta_\gamma + m_\gamma r_\gamma d \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma)] \\
&\quad \times [\sin \phi \cos(\phi + \theta_\gamma) + \cos \phi \sin(\phi + \theta_\gamma)] \\
M_{\phi\phi} &= M_{\phi\gamma} - M_{\phi x} d \sin \phi + M_{\phi y} d \cos \phi + J_\gamma + J_\gamma \\
M_{\phi\theta_\gamma} &= M_{\theta_\gamma \phi} = M_{\phi\gamma} + J_\gamma + J_\gamma \\
M_{\phi\theta_\gamma} &= M_{\theta_\gamma \phi} = [(m_\gamma r_\gamma + m_\gamma l_\gamma) d \sin \theta_\gamma + m_\gamma r_\gamma d \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma)] \times [\sin \phi \cos(\phi + \theta_\gamma) - \cos \phi \sin(\phi + \theta_\gamma)] \\
M_{\phi\theta_\gamma} &= M_{\theta_\gamma \phi} = m_\gamma r_\gamma d \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) [\sin \phi \cos(\phi + \theta_\gamma) - \cos \phi \sin(\phi + \theta_\gamma)] \\
M_{\theta_\gamma\theta_\gamma} &= m_\gamma r_\gamma^\gamma \cos^\gamma \theta_\gamma + m_\gamma [l_\gamma \cos \theta_\gamma + r_\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma)]^\gamma + J_\gamma + J_\gamma \\
M_{\theta_\gamma\theta_\gamma} &= m_\gamma r_\gamma^\gamma \sin^\gamma \theta_\gamma + m_\gamma [l_\gamma \sin \theta_\gamma + r_\gamma \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma)]^\gamma + J_\gamma + J_\gamma \\
M_{\theta_\gamma\theta_\gamma} &= M_{\theta_\gamma\theta_\gamma} = m_\gamma r_\gamma \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) + [l_\gamma \sin \theta_\gamma + r_\gamma \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma)] + J_\gamma \\
M_{\theta_\gamma\theta_\gamma} &= m_\gamma r_\gamma^\gamma \sin^\gamma(\theta_\gamma + \theta_\gamma) + J_\gamma
\end{aligned}$$

بردار نیروهای توریولیس $V(q, \dot{q})$:

$$V = [V_x \quad V_y \quad V_\phi \quad V_{\theta_\gamma} \quad V_{\theta_\gamma} \quad V_{\theta_\gamma}]^T$$

که در آن؛

$$\begin{aligned}
X_{v_x} &= -r_\gamma \dot{\theta}_\gamma^\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma \dot{\theta}_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma) \sin \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) - r_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) \\
X_{v_y} &= -r_\gamma \dot{\theta}_\gamma^\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) - r_\gamma \dot{\theta}_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma) \sin \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) - r_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) \\
X_{\gamma v_x} &= -l_\gamma \dot{\theta}_\gamma^\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) + l_\gamma \dot{\theta}_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma) \sin \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) - l_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) \\
&\quad - r_\gamma (\dot{\theta}_\gamma + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \cos(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma (\dot{\theta}_\gamma + \dot{\theta}_\gamma) (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma) \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma) \\
&\quad - r_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \cos(\phi + \theta_\gamma) \\
X_{\gamma v_y} &= -l_\gamma \dot{\theta}_\gamma^\gamma \cos \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) - l_\gamma \dot{\theta}_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma) \sin \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) - l_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) \\
&\quad - r_\gamma (\dot{\theta}_\gamma + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma) - r_\gamma (\dot{\theta}_\gamma + \dot{\theta}_\gamma) (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma) \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \cos(\phi + \theta_\gamma) \\
&\quad - r_\gamma (\dot{\phi} + \dot{\theta}_\gamma)^\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma) \\
V_x &= m_\gamma X_{v_x} + m_\gamma X_{\gamma v_x} - (m_\gamma + m_\gamma + m_\gamma) d \dot{\phi}^\gamma \cos \phi \\
V_y &= m_\gamma X_{v_y} + m_\gamma X_{\gamma v_y} - (m_\gamma + m_\gamma + m_\gamma) d \dot{\phi}^\gamma \sin \phi \\
V_\phi &= -m_\gamma [d \sin \phi + r_\gamma \cos \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma)] X_{v_x} + m_\gamma [d \cos \phi + r_\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma)] X_{v_y} \\
&\quad - m_\gamma [d \sin \phi + l_\gamma \cos \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma)] X_{\gamma v_x} \\
&\quad + m_\gamma [d \cos \phi + l_\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \cos(\phi + \theta_\gamma)] X_{\gamma v_y} \\
&\quad - M_{\phi x} d \dot{\phi}^\gamma \cos \phi - M_{\phi y} d \dot{\phi}^\gamma \sin \phi \\
V_{\theta_\gamma} &= -m_\gamma [r_\gamma \cos \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma)] X_{v_x} + m_\gamma [r_\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma)] X_{v_y} \\
&\quad - m_\gamma [l_\gamma \cos \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma)] X_{\gamma v_x} \\
&\quad + m_\gamma [l_\gamma \cos \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma \cos(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \cos(\phi + \theta_\gamma)] X_{\gamma v_y} \\
V_{\theta_\gamma} &= -m_\gamma [r_\gamma \sin \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma)] X_{v_x} - m_\gamma [r_\gamma \sin \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma)] X_{v_y} \\
&\quad - m_\gamma [l_\gamma \sin \theta_\gamma \cos(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \cos(\phi + \theta_\gamma)] X_{\gamma v_x} \\
&\quad - m_\gamma [l_\gamma \sin \theta_\gamma \sin(\phi + \theta_\gamma) + r_\gamma \sin(\theta_\gamma + \theta_\gamma) \sin(\phi + \theta_\gamma)] X_{\gamma v_y} \\
&\quad - M_{\theta_\gamma x} d \dot{\phi}^\gamma \cos \phi - M_{\theta_\gamma y} d \dot{\phi}^\gamma \sin \phi
\end{aligned}$$

$$V_{\theta_{\varphi}} = m_{\varphi} [r_{\varphi} \sin(\theta_{\varphi} + \theta_{\varphi}) \cos(\phi + \theta_{\varphi})] X_{\varphi v, y} - m_{\varphi} [r_{\varphi} \sin(\theta_{\varphi} + \theta_{\varphi}) \sin(\phi + \theta_{\varphi})] X_{\varphi v, y} - M_{\theta_{\varphi, x}} d\dot{\phi} \cos\phi - M_{\theta_{\varphi, y}} d\dot{\phi} \sin\phi$$

بردار نیروهای گرانش $G(q)$:

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial U}{\partial \theta_{\varphi}} & \frac{\partial U}{\partial \theta_{\varphi}} \end{bmatrix}^T$$

که در آن:

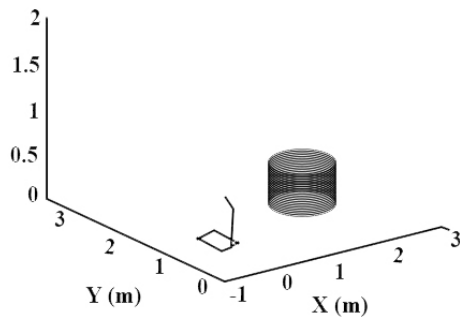
$$\frac{\partial U}{\partial \theta_{\varphi}} = m_{\varphi} g r_{\varphi} \cos\theta_{\varphi} + m_{\varphi} g [l_{\varphi} \cos\theta_{\varphi} + r_{\varphi} \cos(\theta_{\varphi} + \theta_{\varphi})]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_{\varphi}} = m_{\varphi} g r_{\varphi} \cos(\theta_{\varphi} + \theta_{\varphi})$$

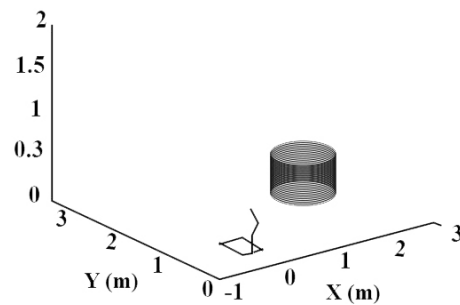
ماتریس $B(q)$:

$$B(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos\phi & \frac{1}{R} \cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sin\phi & \frac{1}{R} \sin\phi & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D}{R} & -\frac{R}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

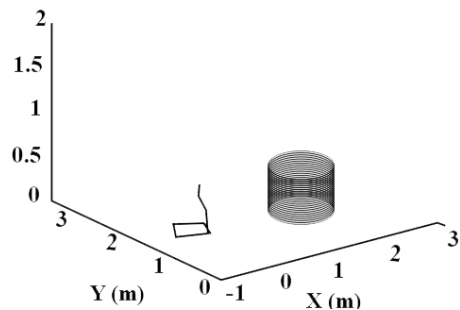
پیوست (۳) موقعیت همزمان ربات و مانع متحرک در فاصله‌های زمانی ۰/۵ ثانیه از ابتدا تا انتهای مسیر:



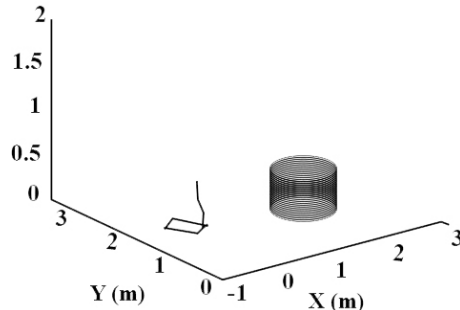
$t = 0.5 \text{ s}$ (ب)



$t = 0 \text{ s}$ (الف)



$t = 1.5 \text{ s}$ (د)



$t = 1 \text{ s}$ (ج)

