

## روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت برای حل مسائل ارتجاعی سه بعدی مواد دارای خواص تابعی

محمد جواد کاظم زاده پارسی<sup>۱\*</sup>

فرهنگ دانشمند<sup>۲</sup>

\*نویسنده مسئول: [mjk@iaushiraz.net](mailto:mjk@iaushiraz.net)

### چکیده

در این مقاله با استفاده از یک شبکه غیرمنطبق بر مرز، کاربرد روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت در حل مسائل ارتجاعی خطی سه بعدی مواد دارای خواص تابعی بررسی شده است. در شبکه‌های غیر منطبق بر مرز، وجوه المان‌ها بر مرز مسئله منطبق نبوده و گره‌های مرزی که در روش المان محدود استاندارد برای اعمال شرایط مرزی از آنها استفاده می‌شود، وجود ندارد. از این رو محاسبه ماتریس سختی المان‌های متقاطع با مرز و اعمال شرایط مرزی باید با دقت کافی انجام شود. در روش پیشنهادی، ماتریس سختی المان‌های متقاطع با مرز از طریق در نظر گرفتن انرژی کرنشی قسمت داخلی آنها و انتگرال‌گیری عددی روی این قسمت‌ها حاصل شده و شرایط مرزی اساسی مسئله توسط روش تابع جریمه اعمال شده است. برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، چند مثال عددی حل شده و نتایج با نتایج حاصل از روش المان محدود استاندارد مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که هر دو روش از تطابق خوبی برخوردار هستند.

**واژه های کلیدی:** روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت، شبکه‌های غیر منطبق بر مرز، تحلیل سه بعدی ارتجاعی خطی، مواد دارای خواص تابعی.

۱- استادیار، بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، عضو باشگاه پژوهشگران جوان.

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز.

## ۱- مقدمه

روش المان محدود، روش کارآمدی است که به دلیل قابلیت‌های فراوان، در بسیاری از شاخه‌های مهندسی کاربرد گسترده‌ای دارد [۱]. این روش برخلاف توانایی‌های چشمگیر دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشد که استفاده از آن را در بعضی مسائل با مشکلاتی روبه‌رو کرده است. یکی از محدودیت‌های روش المان محدود، وابستگی آن به شبکه المانی است. به عبارت دیگر برای حل مسئله توسط این روش نیاز است که ناحیه هندسی مسئله توسط شبکه‌ای از المان‌های منطبق بر مرز پوشیده شود. هرچند امروزه الگوریتم‌های کارآمدی برای تولید خودکار شبکه بر روی نواحی دلخواه دوبعدی موجود است، اما تولید خودکار شبکه روی نواحی سه‌بعدی همچنان یکی از مراحل مشکل و پرهزینه در انجام یک حل عددی به شمار می‌رود [۲]. از طرف دیگر تولید شبکه برای مسائلی که دارای ناحیه متغیر<sup>۱</sup> می‌باشند نیز فرایندی پیچیده است. زیرا شبکه بایستی در هر مرحله که مرز هندسی مسئله دچار تغییر می‌شود، تغییرات مرز را دنبال کرده و همواره سازگاری شبکه بر مرز حفظ شود. در مسائلی که به روش‌های تطبیقی حل می‌شوند نیز تطبیق شبکه همواره بایست با رعایت سازگاری شبکه بر مرز انجام شود.

وابستگی روش المان محدود به شبکه‌های مرسوم زمینه انجام تحقیقات فراوانی در راستای کاهش این وابستگی بوده و تاکنون روش‌های متعددی برای غلبه بر این مشکل توسط محققین مختلف ارائه شده است. به عنوان نمونه می‌توان به روش‌های بدون المان که در طی دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفت اشاره کرد [۳]. در این گونه روش‌ها از یک شبکه گرهی که درون ناحیه مسئله توزیع شده‌اند برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده می‌شود. این روش‌ها به‌رغم عدم وابستگی به شبکه المانی دارای محدودیت‌هایی نیز هستند. از جمله مهم‌ترین این محدودیت‌ها، حجم محاسبات زیاد و مشکلاتی است که در هنگام اعمال شرایط مرزی در این گونه روش‌ها ایجاد می‌شود [۴].

راهکار دیگری که برای کاهش وابستگی روش المان محدود به شبکه‌های مرسوم استفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز<sup>۲</sup> است. از جمله چنین روش‌هایی می‌توان به روش المان محدود شبکه ثابت<sup>۳</sup> اشاره کرد که تاکنون در مسائل دوبعدی [۵] و سه‌بعدی [۶] الاستیسیته به کار برده شده است. در این روش، شبکه استفاده شده می‌تواند بر مرزهای مسئله منطبق نبوده و تغییرات مرز را دنبال نکند. در این صورت مرز جسم با شبکه المانی برخورد کرده و المان‌هایی به‌وجود خواهند آمد که قسمتی از آنها در داخل و قسمتی دیگر در خارج از ناحیه مسئله قرار می‌گیرد. روش المان محدود شبکه ثابت به‌رغم توانایی‌های آن، دارای نارسایی‌هایی نیز هست. از مهم‌ترین مشکلات این روش دقت کم این روش در محاسبه ماتریس سختی المان‌های متقاطع با مرز و نحوه اعمال شرایط مرزی است [۷ و ۸].

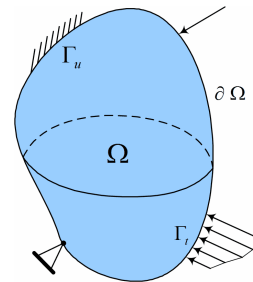
مواد دارای خواص تابعی<sup>۴</sup> مواد جدیدی هستند که به دلیل ویژگی‌های مکانیکی منحصر به فردی که دارند بسیار مورد توجه قرار گرفته و کاربردهای خاصی نیز در صنایع پیشرفته از جمله صنایع هوا فضا دارند [۹]. در تحقیق حاضر، روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت [۱۰] تا [۱۲] برای حل مسائل ارتجاعی خطی سه‌بعدی مواد دارای خواص تابعی به کار برده شده است. در این روش از انتگرال‌گیری عددی برای محاسبه ماتریس سختی المان‌های متقاطع با مرز استفاده شده است. علاوه بر آن شرایط مرزی اساسی در این روش به کمک تابع جریمه اعمال شده است. در این مقاله پس از بیان روش پیشنهادی، برای بررسی کارایی روش، چند مثال عددی حل شده و نتایج حاصل با نتایج حاصل از روش المان محدود استاندارد مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که می‌توان از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز بطور مؤثری در حل مسائل سه‌بعدی ارتجاعی استفاده کرد.

2. Non boundary fitted mesh  
3. Fixed grid finite element method  
4. Functionall graded material

1. Variable domain

## ۲- معادلات دیفرانسیل حاکم

معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل الاستیک خطی جسمی که ناحیه  $\Omega$  با مرز  $\partial\Omega$  را در فضای سه بعدی اشغال کرده است به همراه شرایط مرزی حاکم بر آن به صورت زیر بیان می شود. طرح شماتیکی از چنین مسئله ای در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱) ناحیه مسئله  $\Omega$  و مرز  $\partial\Omega$  تحت اثر شرایط مرزی سازه ای

$$(1) \quad \nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \Omega \quad \text{در ناحیه}$$

$$(2) \quad u = \bar{u} \quad \Gamma_u \quad \text{روی}$$

$$(3) \quad \sigma \cdot n = \bar{t} \quad \Gamma_t \quad \text{روی}$$

در روابط فوق، مرز ناحیه یا  $\partial\Omega$  به دو قسمت مجزای  $\Gamma_u$  و  $\Gamma_t$  تقسیم شده است که به ترتیب شرایط مرزی اساسی و طبیعی بر روی آنها اعمال می شود.  $\bar{u}$  مقدار از پیش تعیین شده جابجایی روی مرز اساسی و  $\bar{t}$  نیز مقدار از پیش تعیین شده تنش های سطحی روی مرز طبیعی می باشد. مطابق اصل مانا بودن انرژی پتانسیل کلی برای یک سیستم مکانیکی با نیروهای پایستار، تابع انرژی پتانسیل کلی  $\Pi$  باید نسبت به هر تغییر کوچکی در میدان جابه جایی مانا باشد. به عبارت دیگر  $\delta\Pi = 0$ . انرژی پتانسیل کلی به صورت زیر بیان می شود [۱].

$$\Pi = \Pi^S - \Pi^L$$

$$\Pi^S = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega \quad (4)$$

$$\Pi^L = \int_{\Omega} u^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} u^T \bar{t} d\Gamma + \sum_{i=1}^m u^T(x_i) F_i$$

در رابطه فوق  $\sigma$  بردار تنش،  $\epsilon$  بردار کرنش،  $u$  بردار جابجایی،  $b$  بردار نیروهای حجمی و  $\bar{t}$  بردار تنش های سطحی می باشد.  $F_i$  نیرو متمرکز اعمال شده در نقطه  $x_i$  می باشد.

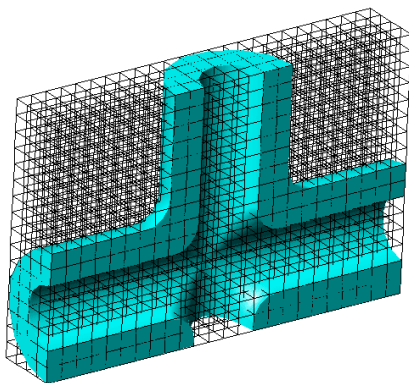
رابطه تنش-کرنش در یک جسم الاستیک خطی دارای خواص تابعی بدون وجود تنش یا کرنش های اولیه از قانون عمومی هوک پیروی می کند که به صورت زیر بیان می شود [۹].

$$\sigma = D\epsilon \quad (5)$$

ماتریس  $D$  در رابطه فوق، ماتریس الاستیسیته می باشد که در در مواد دارای خواص تابعی به صورت تابعی از مؤلفه های مختصات در نظر گرفته می شود.

## ۳- شبکه های غیر منطبق بر مرز

همان طور که بیان شد، در روش المان محدود استاندارد ناحیه مسئله به تعدادی المان تقسیم بندی شده و از این شبکه المانی جهت ساخت توابع تقریب استفاده می شود. اولین شرطی که این شبکه المانی بایستی داشته باشد تطابق شبکه بر مرز ناحیه است. در این نوع شبکه ها وجوه المان ها بر مرز منطبق بوده و گره های مرزی دقیقاً روی مرز جسم قرار گرفته و شرایط مرزی روی این گره ها اعمال می شوند. دسته دیگری از شبکه های محاسباتی را می توان برشمرد که دارای چنین ویژگی هایی نباشند. شبکه هایی که در آن مرز ناحیه بر وجوه المان ها منطبق نباشد اصطلاحاً شبکه های غیر منطبق بر مرز نامیده می شود. نمونه ای از یک چنین شبکه ای در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل (۲) نمونه ای از یک شبکه غیر منطبق بر مرز

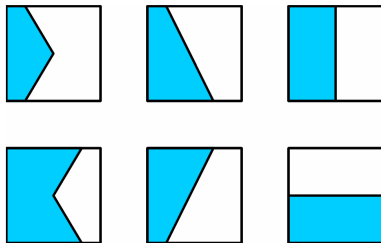
در شبکه های غیر منطبق بر مرز، عبور مرز از درون مجموعه المان ها باعث می شود که گره ها و المان های شبکه بر حسب موقعیتشان نسبت به مرز به چند دسته مجزا تقسیم

که در این رابطه  $r$  نسبت حجمی قسمت داخلی المان است و به صورت زیر محاسبه می شود.

$$r = V_i / V \quad (7)$$

که در آن  $V_i$  و  $V$  به ترتیب حجم قسمت داخلی المان و حجم کل المان متقاطع با مرز می باشد.

تکنیک همگن سازی برخلاف سادگی دارای اشکالاتی نیز می باشد. زیرا در این روش تنها از نسبت قسمت داخلی المان برای محاسبه خواص مکانیکی آنها استفاده می شود و این که مرز در چه موقعیتی نسبت به المان قرار گرفته باشد هیچ تاثیری در فرمول بندی المان های متقاطع با مرز نخواهد داشت. به عنوان مثال در شکل (۳) چند المان متقاطع با مرز متفاوت نشان داده شده است. در این شکل قسمت داخلی المان ها با رنگ تیره نشان داده شده و همگی دارای نسبت حجمی یکسانی هستند. بنابراین از دید روش همگن سازی تمامی این المان ها با وجود تفاوت در نحوه عبور مرز از درون آنها، خواص مکانیکی و در نتیجه ماتریس سختی یکسانی خواهند داشت. این مطلب باعث می شود که استفاده از روش همگن سازی، با خطای قابل توجهی در بیان المان های متقاطع با مرز همراه باشد [۱۲].



شکل (۳) قسمت داخلی و خارجی چند المان متقاطع با مرز که نسبت حجمی یکسانی دارند

در روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت<sup>۲</sup> از همگن سازی برای المان های متقاطع با مرز استفاده نشده بلکه شکل واقعی قسمت داخلی المان های متقاطع با مرز برای محاسبه انرژی کرنشی آنها در نظر گرفته می شود.

از دیگر مشکلات روش المان محدود شبکه ثابت، دقت کم این روش در نحوه اعمال شرایط مرزی است [۷، ۸ و ۱۲]. به طور کلی اعمال شرایط مرزی یکی از پیچیدگی های

شوند. دسته اول المان هایی است که تماماً در داخل ناحیه قرار دارند و المان های داخلی نامیده می شوند. دسته دوم المان هایی است که تماماً در خارج از مرز قرار دارند و المان های خارجی نامیده می شوند. دسه سوم المان هایی هستند که قسمتی از آنها در داخل و قسمتی دیگر در خارج از ناحیه مسئله قرار گرفته اند و المان های متقاطع با مرز نامیده می شوند. در این تحقیق مجموعه المان های داخلی و المان های متقاطع با مرز، المان های فعال نامیده شده و گسسته سازی معادلات تنها بر اساس المان های فعال صورت می گیرد. مجموعه گره هایی که بر روی المان های فعال قرار گرفته اند نیز گره های فعال نامیده می شوند.

#### ۴- روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت

یکی از نقاط ضعف روش المان محدود شبکه ثابت دقت کم این روش در برآورد ماتریس سختی المان های متقاطع با مرز است [۷ - ۸]. در این روش از تکنیک همگن سازی<sup>۱</sup> برای محاسبه ماتریس سختی المان های متقاطع با مرز استفاده می شود [۱۳]. در روش همگن سازی فرض می شود ابعاد هندسی مسئله محدود به مرز جسم نبوده بلکه فراتر از مرز نیز گسترش یافته است. بنابراین ناحیه ای بزرگ تر از ابعاد جسم به طوری که جسم کاملاً در آن محاط شود به عنوان ناحیه محاسباتی در نظر گرفته شده و به طور یکنواخت شبکه بندی می گردد. سپس فرض می شود قسمت های خارجی از ماده ای بسیار نرم تر از جسم واقعی تشکیل شده باشند. اگر  $E$  مدول ارتجاعی مسئله اصلی باشد، مدول ارتجاعی قسمت های خارجی به صورت  $\alpha E$  که در آن  $\alpha \ll 1$  در نظر گرفته می شود. در روش همگن سازی از نسبت حجم قسمت داخلی المان به حجم کل المان به عنوان معیاری برای محاسبه خواص مکانیکی المان های متقاطع با مرز استفاده می شود [۱۳]. به این صورت که اگر که  $E_b$  مدول ارتجاعی المان های متقاطع با مرز در نظر گرفته شود به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$E_b = rE + (1-r)\alpha E \quad (6)$$

مرز شکسته می‌شود. به عبارت دیگر اگر جملات زیر انتگرال‌های دامنه‌ای را به صورت  $f(x,y,z)$  نشان دهیم در این صورت انتگرال‌های دامنه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \sum_{i \in S_1} \int_{\Omega_i} f d\Omega + \sum_{i \in S_2} \int_{\omega_i} f d\Omega \quad (13)$$

در رابطه فوق  $S_1$  مجموعه المان‌های داخلی و  $S_2$  مجموعه المان‌های متقاطع با مرز است. دامنه المان‌های داخلی با  $\Omega_i$  و قسمت داخلی المان‌های متقاطع با مرز با  $\omega_i$  نشان داده شده است. با استفاده از این تکنیک، بردار بارگذاری را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$R = \sum_{i \in S_1} \int_{\Omega_i} N^T b d\Omega + \sum_{i \in S_2} \int_{\omega_i} N^T b d\Omega + \sum_{i \in S_3} \int_{\Gamma_i} N^T \bar{t} d\Gamma + \sum_{i \in S_4} \int_{\gamma_i} N^T \bar{t} d\Gamma + \sum_i N^T(x_i) F_i \quad (14)$$

در این رابطه  $S_3$  و  $S_4$  به ترتیب مجموعه المان‌های منطبق و غیر منطبق بر مرز است که شرط مرزی طبیعی بر روی آنها اعمال شده است و  $\Gamma_i$  و  $\gamma_i$  نیز به ترتیب قسمت‌هایی از مرز این المان‌ها است که شرایط مرزی طبیعی بر روی آنها اعمال شده است. مانند قبل، انتگرال‌گیری روی  $\Gamma_i$  به دلیل شکل هندسی مشخص آن به آسانی امکان پذیر است. در صورتی که انتگرال‌گیری روی نواحی  $\gamma_i$  به دلیل شکل هندسی پیچیده آن نیازمند عملیات بیشتری است. جمله آخر رابطه فوق بیانگر سهم نیروهای متمرکز در بردار بارگذاری می‌باشد. با توجه به رابطه (۱۴) دیده می‌شود نیروهای متمرکز و گسترده نیز بدون در نظر گرفتن موقعیت آنها نسبت به شبکه در هر جای ناحیه قابل اعمال هستند.

## ۶- انتگرال گیری عددی

همان طور که بیان شد، انتگرال‌گیری در روش پیشنهادی روی المان‌های داخلی و قسمت داخلی المان‌های متقاطع با

استفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز می‌باشد. در این مقاله از تابع جریمه برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده شده و شرایط مرزی طبیعی از طریق انتگرال‌گیری از نیروهای سطحی اعمال می‌شود. بنابراین تابع انرژی پتانسیل کلی به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi^S - \Pi^L + \frac{1}{\gamma} \alpha_1 \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u})^T (u - \bar{u}) d\Gamma + \quad (8)$$

$$\frac{1}{\gamma} \alpha_2 \sum_i (u(x_i) - \bar{u}_i)^T (u(x_i) - \bar{u}_i)$$

در رابطه فوق  $\Pi^S$  و  $\Pi^L$  در رابطه (۴) داده شده و  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  پارامترهای جریمه برای اعمال شرایط اساسی می‌باشند. بردارهای  $u$ ،  $\varepsilon$  و  $\sigma$  به صورت زیر توسط ماتریس توابع شکل  $N$  بر حسب بردار جابه‌جایی‌های گرهی  $U$  نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned} u &= NU \\ \varepsilon &= Bu = BNU \\ \sigma &= D\varepsilon = BDNU \end{aligned} \quad (9)$$

که  $B$  اپراتور مشتقی کرنش می‌باشد. با استفاده از اصل مانا بودن انرژی پتانسیل کلی، معادلات حاکم به صورت زیر گسسته می‌شوند.

$$KU = R \quad (10)$$

که در آن ماتریس سختی  $K$  و بردار بارگذاری  $R$  به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$K = \int_{\Omega} (BN)^T D(BN) d\Omega + \alpha_1 \int_{\Gamma_u} N^T N d\Gamma + \alpha_2 \sum_i N_i^T N_i \quad (11)$$

$$R = \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma_i} N^T \bar{t} d\Gamma + \sum_i N^T F_i + \quad (12)$$

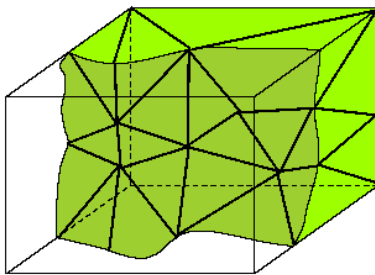
$$\alpha_1 \int_{\Gamma_u} N^T \bar{u} d\Gamma + \alpha_2 \sum_i N_i^T \bar{u}_i$$

انتگرال‌های دامنه‌ای ظاهر شده در روابط فوق به انتگرال روی المان‌های داخلی و قسمت داخلی المان‌های متقاطع با



شکل (۴) نقاط انتگرال گیری گوس بر روی قسمت داخلی المان‌های متقاطع با مرز

که در آن  $\omega_i^k$  زیر ناحیه‌های انتگرال گیری است که در داخل دامنه مسئله واقع شده‌اند. استفاده از این روش باعث می‌شود که انتگرال گیری با دقت بالایی انجام شود اما از طرف دیگر نیازمند ساخت زیر ناحیه‌های انتگرال گیری است. در شکل (۵) نمونه‌ای از زیر ناحیه‌های ساخته شده برای یک المان متقاطع با مرز نشان داده شده است.



شکل (۵) زیر ناحیه‌های انتگرال گیری ساخته شده روی قسمت داخلی یک المان متقاطع با مرز

## ۸- مثال های عددی

جهت بررسی کارآیی روش پیشنهادی، در این بخش دو مثال عددی حل شده و نتایج حاصل با روش المان محدود استاندارد مورد مقایسه قرار گرفته است. به عنوان اولین مثال، یک تیر یک سر درگیر خمیده که از یک انتها بارگذاری شده در نظر گرفته شده است. ابعاد هندسی، تکیه گاه و نحوه بارگذاری تیر در شکل (۶) نشان داده شده است. در این مثال فرض شده است که مدول الاستیک یانگ برای این تیر تابعی از مختصات مکانی  $z$  بوده و مقدار آن بطور خطی از  $200 \text{ GPa}$  در لایه‌های زیری تا  $2 \text{ GPa}$  در لایه‌های رویی تیر تغییر کند.

مرز انجام می‌شود. انتگرال گیری روی المان‌های داخلی به سادگی با استفاده از روش انتگرال گیری گوس قابل انجام است. اما انتگرال گیری روی قسمت داخلی المان‌های متقاطع با مرز از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. زیرا قسمت داخلی این المان‌ها شکل هندسی مشخصی ندارند و نمی‌توان مستقیماً از روش گوس برای انتگرال گیری استفاده کرد. برای حل این مشکل به دو راه می‌توان اشاره کرد. روش اول استفاده از تابع پله و سپس استفاده از روش گوس برای انتگرال گیری می‌باشد. تابع پله بایستی به نحوی انتخاب شود که مقدار آن به ازاء نقاط داخل دامنه برابر یک و برای نقاط خارجی برابر صفر باشد. به عبارت دیگر اگر  $f(x, y, z)$  بیانگر عبارت زیر انتگرال باشد، انتگرال گیری به صورت زیر انجام می‌شود.

$$\int_{\omega_i} f(x, y, z) d\Omega = \int_{\Omega_i} f(x, y, z) s(x, y, z) d\Omega \quad (15)$$

که تابع پله به صورت زیر تعریف می‌شود.

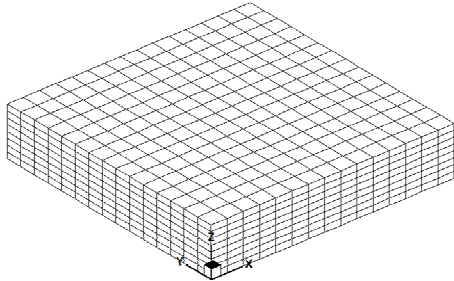
$$s(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (x, y, z) \in \Omega \\ 0 & \text{اگر } (x, y, z) \notin \Omega \end{cases} \quad (16)$$

در روابط فوق  $s(x, y, z)$  تابع پله و  $\omega_i$  بخش داخلی المان مورد نظر و  $\Omega_i$  کل دامنه آن است. در این روش به علت ایجاد یک ناپوستگی در عبارت زیر انتگرال باید با انتخاب مناسب تعداد نقاط گوس خطای انتگرال گیری را کاهش داد. در شکل (۴) یک المان متقاطع با مرز و نقاط انتگرال گیری گوس که درون قسمت داخلی المان توزیع شده‌اند نشان داده شده است.

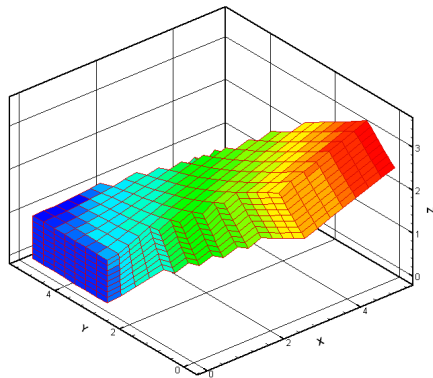
روش دیگر این است که المان‌های متقاطع با مرز خود به چند زیرناحیه کوچکتر تقسیم شده و انتگرال گیری روی این زیر ناحیه‌های انجام شود. در این صورت انتگرال گیری به صورت زیر انجام می‌شود.

$$\int_{\omega_i} f(x, y, z) d\Omega = \sum_k \int_{\omega_i^k} f(x, y, z) d\Omega \quad (16)$$

استفاده از روش پیشنهادی رسم شده است. در این شکل تنها المان‌های فعال که عبارت است از المان‌های داخلی و المان‌های متقاطع با مرز نشان داده شده است.

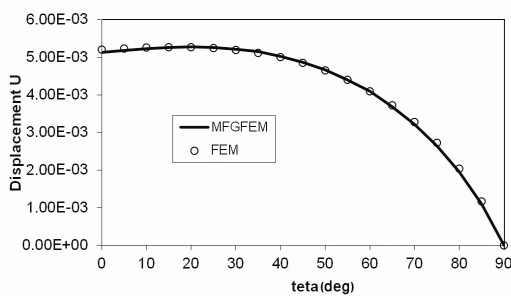


شکل (۹) شبکه غیر منطبق بر مرز مورد استفاده در تحلیل تیر خمیده

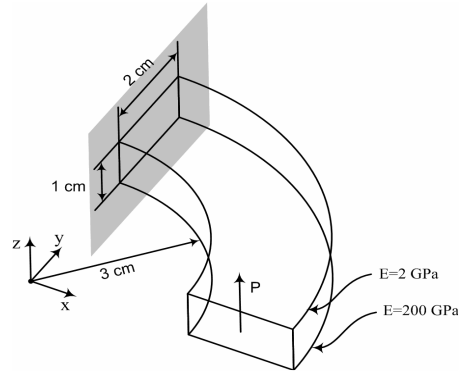


شکل (۱۰) نمای تغییر شکل یافته تیر خمیده با استفاده از روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت

در شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) نمودارهای مؤلفه‌های جابه‌جایی به ترتیب در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  برای نقاطی که در سطح داخلی تیر خمیده قرار دارند برحسب موقعیت زاویه‌ای آنها با استفاده از روش المان محدود استاندارد و روش پیشنهادی رسم شده است. همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، نتایج حاصل از هر دو روش‌ها از تطابق خوبی برخوردار هستند.

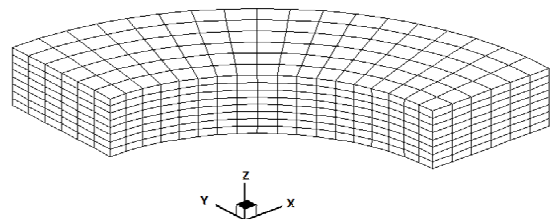


شکل (۱۱) مقایسه مؤلفه جابه‌جایی  $U$  برای نقاط واقع شده روی سطح داخلی تیر خمیده با استفاده از دو روش عددی متفاوت

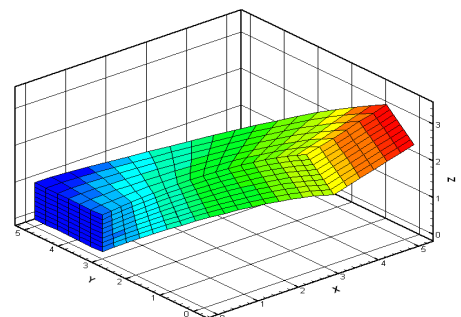


شکل (۶) ابعاد هندسی، شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری مربوط به مثال تیر خمیده

مسئله با دو روش المان محدود استاندارد و روش پیشنهادی در این مقاله حل شده است. در شکل (۷) شبکه المانی منطبق بر مرز برای حل مسئله با روش المان محدود نشان داده شده است. در شکل (۸) نمای تغییر شکل یافته تیر خمیده با استفاده از روش المان محدود نشان داده شده است.



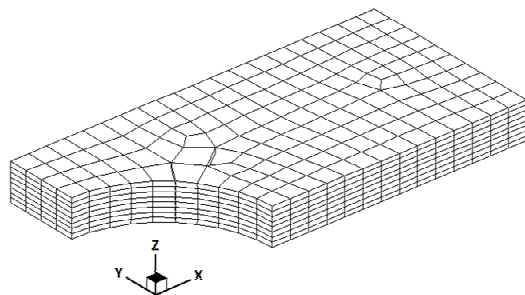
شکل (۷) شبکه منطبق بر مرز برای تحلیل تیر خمیده به روش المان محدود استاندارد



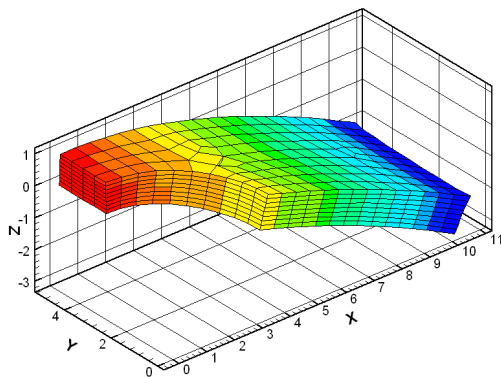
شکل (۸) نمای تغییر شکل یافته تیر خمیده با استفاده از روش المان محدود استاندارد

در شکل (۹) شبکه غیر منطبق بر مرز مورد استفاده در حل مسئله با روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود شبکه کاملاً مستقل از شکل هندسی مسئله ساخته شده است. البته ابعاد شبکه باید طوری انتخاب شود که مسئله مورد نظر بطور کامل در آن محاط شود. در شکل (۱۰) نمای تغییر شکل یافته مسئله با

به دلیل وجود دو صفحه تقارن در مسئله، تنها یک چهارم دامنه مسئله مدل‌سازی شده و شرایط مرزی مناسب بر روی آن قرار گرفته است. در ابتدا یک شبکه منطبق بر مرز ساخته شده و مسئله با روش المان محدود استاندارد مورد تحلیل واقع شده است. شبکه مورد استفاده در شکل (۱۵) نشان داده شده است. نمای تغییر شکل یافته مسئله با استفاده از روش المان محدود در شکل (۱۶) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل نشان داده شده است با وجود این که بارگذاری به صورت محوری اعمال شده و مؤلفه خمشی در بارگذاری وجود ندارد اما به دلیل تغییر مدول یانگ در راستای ضخامت، ورق دچار نوعی خمش شده است.

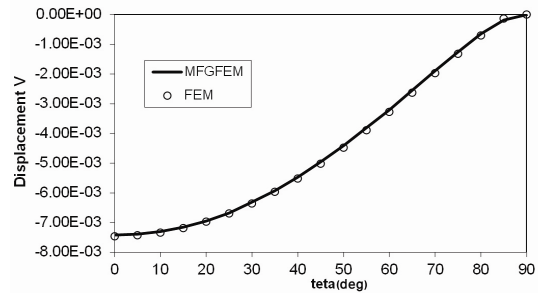


شکل (۱۵) شبکه منطبق بر مرز مورد استفاده در تحلیل المان محدود ورق سوراخدار

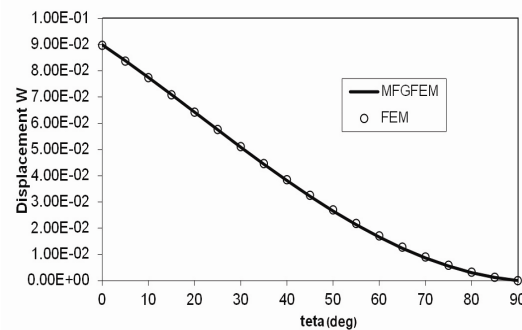


شکل (۱۶) نمای تغییر شکل یافته ورق سوراخدار با استفاده از روش المان محدود

علاوه بر حل المان محدود، یک شبکه غیر منطبق بر مرز نیز برای مسئله ساخته شده و با روش پیشنهادی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل (۱۷) شبکه غیر منطبق بر مرز رسم شده است. در اینجا نیز شبکه بدون توجه به جزئیات هندسی طوری ساخته شده است که یک چهارم دامنه مسئله

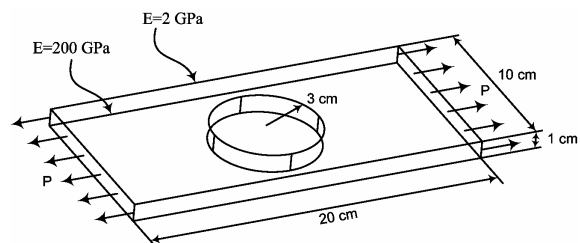


شکل (۱۲) مقایسه مؤلفه جابه‌جایی  $V$  برای نقاط واقع شده روی سطح داخلی تیر خمیده با استفاده از دو روش عددی متفاوت



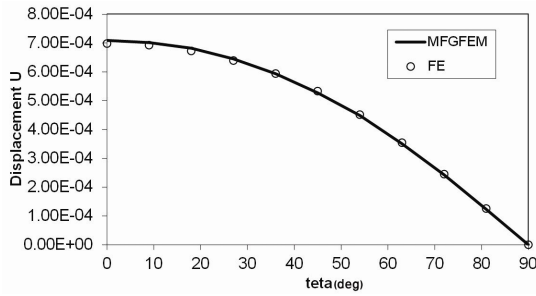
شکل (۱۳) مقایسه مؤلفه جابه‌جایی  $W$  برای نقاط واقع شده روی سطح داخلی تیر خمیده با استفاده از دو روش عددی متفاوت

مثال دومی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است یک ورق تخت مستطیلی با یک حفره دایره‌ای در مرکز آن است که در یک راستا تحت بار کششی قرار گرفته است. ابعاد هندسی و نحوه بارگذاری مسئله در شکل (۱۴) نشان داده شده است. همانند مثال قبل، در اینجا نیز فرض شده است که مدول الاستیک یانگ مواد تشکیل دهنده تابعی از مختصات مکانی  $z$  بوده و مقدار آن بطور خطی از  $200 \text{ GPa}$  در لایه‌های زیری تا  $2 \text{ GPa}$  در لایه‌های رویی تیر تغییر کند.

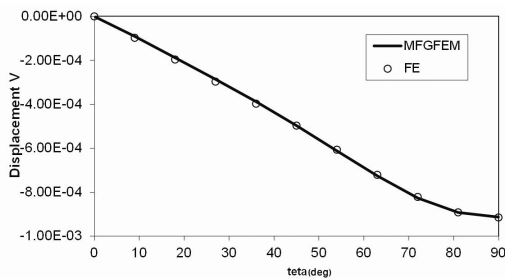


شکل (۱۴) ابعاد هندسی و بارگذاری مربوط به مسئله ورق دارای حفره تحت کشش

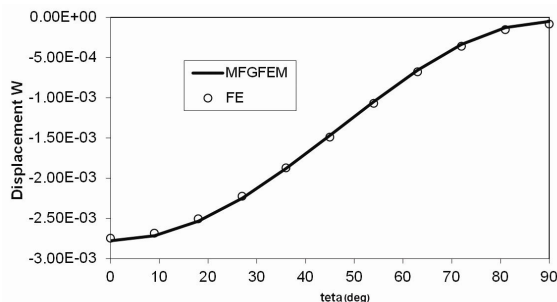




شکل (۱۹) مقایسه مؤلفه جابجایی  $U$  برای نقاط واقع شده روی سطح داخلی سوراخ با استفاده از دو روش عددی متفاوت



شکل (۲۰) مقایسه مؤلفه جابجایی  $V$  برای نقاط واقع شده روی سطح داخلی سوراخ با استفاده از دو روش عددی متفاوت

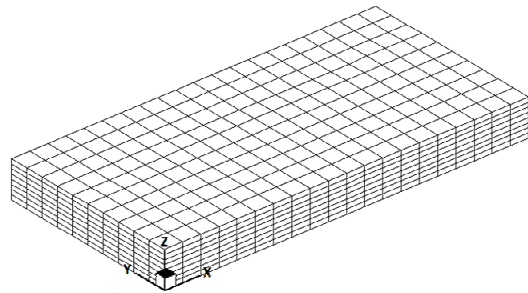


شکل (۲۱) مقایسه مؤلفه جابجایی  $W$  برای نقاط واقع شده روی سطح داخلی سوراخ با استفاده از دو روش عددی متفاوت

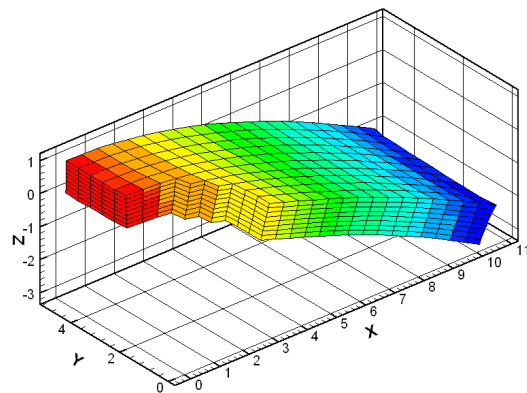
## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله راهکاری مبنی بر استفاده از شبکه‌های غیر منطبق برمرز در حل مسائل سه‌بعدی مد نظر می‌باشد. ویژگی مهم یک شبکه غیر منطبق برمرز سادگی تولید آن است. این ویژگی در مسائل سه‌بعدی بسیار قابل توجه می‌باشد. در تحقیق حاضر کاربرد روش جدید بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت در حل مسائل الاستیک سه‌بعدی مواد دارای خواص تابعی بررسی شده است. در این روش تابع انرژی پتانسیل کلی با توجه به شکل قسمت داخلی المان‌های متقاطع

درون آن محاط شود. نمای تغییر شکل یافته مسئله با استفاده از روش پیشنهادی در شکل (۱۸) رسم شده است.



شکل (۱۷) شبکه غیر منطبق بر مرز مورد استفاده در حل مسئله ورق سوراخدار



شکل (۱۸) نمای تغییر شکل یافته ورق سوراخدار با استفاده از روش بهبود یافته المان محدود شبکه ثابت

در شکل‌های (۱۹) تا (۲۱) نمودارهای مؤلفه‌های جابجایی به ترتیب در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  برای نقاطی که در سطح داخلی حفره قرار گرفته‌اند برحسب موقعیت زاویه‌ایشان با استفاده از هر دو روش رسم شده است. همانند مثال قبل، در اینجا نیز مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از هر دو این روش‌ها از تطابق خوبی برخوردار هستند.

با توجه به مثال‌های فوق، بطور کلی می‌توان بیان کرد که روش پیشنهادی مقاله حاضر را می‌توان بطور مؤثری در حل مسائل سه‌بعدی ارتجاعی مواد دارای خواص تابعی به کار برد و هزینه حل عددی را بطور قابل توجهی کاهش داد زیرا قسمت بزرگی از هزینه هر حل عددی مربوط به مدل‌سازی هندسی و شبکه‌بندی آن می‌باشد که در روش پیشنهادی انجام شبکه‌بندی غیر منطبق بر مرز بسیار کم هزینه خواهد بود.

- [4] Liu G.R., Mesh free methods: moving beyond the finite element method, CRC Press, New York, 2003.
- [5] Garcia M.J. and Steven G.P., Fixed grid finite elements in elasticity problems, *Engineering Computations*, Vol. 16, 1999, pp. 145-164.
- [6] Garcia M.J., Ruiz O.E. and Henaio M.A., Fixed grid finite element analysis for 3D structural problems, *International Journal of Computational Methods*, Vol. 22, 2004.
- [7] Kim H., Garcia M.J., Querin O.M., Steven G.P. and Xie Y.M., Fixed grid finite element analysis in evolutionary structural optimization, *Engineering Computations*, Vol. 17, 2000, pp. 427-439.
- [8] Garcia M.J. and Gonzalez C.A., Shape optimization of continuum structures via evolution strategies and fixed grid finite element analysis, *Journal of structural and multidisciplinary optimization*, Vol. 26, 2004, pp. 92-98.
- [9] Birman V. and Byrd L.W., Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 160, 2007, pp. 195-216.
- [۱۰] دانشمند ف.، فرید م. و کاظم زاده پارسی م.ج.، روش اصلاح شده المان محدود شبکه ثابت در تحلیل مسائل دو بعدی ارتجاعی خطی، مجله علمی پژوهشی استقلال، دانشگاه صنعتی اصفهان، سال ۲۷، شماره ۲، اسفند ۱۳۸۷، صص ۱۰۳-۱۲۲.
- [۱۱] کاظم زاده پارسی م.ج.، دانشمند ف. و فرید م.، روش اصلاح شده المان محدود شبکه ثابت و کاربرد آن در حل مسائل سه بعدی ارتجاعی خطی، مجموعه مقالات سیزدهمین کنفرانس مهندسی مکانیک ایران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ۱۳۸۴.
- [12] Daneshmand F. and Kazemzadeh-Parsi M.J., Static and dynamic analysis of 2D and 3D elastic solids using the modified FGFEM, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, 2009, pp. 755-765.
- [13] Bensoe M. and Kikuchi N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, 1988, pp. 197-224.

با مرز از طریق انتگرال گیری عددی روی این نواحی محاسبه شده است. شرایط مرزی اساسی توسط روش تابع جریمه به تابع انرژی پتانسیل اضافه شده است. در این مقاله پس از معرفی روش پیشنهادی چند مثال عددی برای بررسی کارایی آن حل شده و نتایج حاصل با نتایج حاصل از روش المان محدود استاندارد مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج حاصل نشان داد که به کمک روش پیشنهادی می توان بطور مؤثری از شبکه های غیر منطبق بر مرز در حل مسائل سه بعدی ارتجاعی خطی استفاده کرد.

### فهرست علائم

$\sigma$	بردار تنش
$\varepsilon$	بردار کرنش
$\Pi$	تابع انرژی پتانسیل کلی
$b$	بردار بار گذاری های حجمی
$B$	عملگر مشتقی کرنش
$D$	ماتریس الاستیسیته
$K$	ماتریس سختی
$N$	ماتریس توابع شکل
$R$	بردار بار گذاری
$t$	بردار تنش های سطحی
$u$	بردار جابجایی
$U$	بردار درجات آزادی

### مراجع

- [1] Reddy J.N., An introduction to the finite element method, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
- [2] Thompson J.F., Soni B.K. and Weatherill N.P., Handbook of grid generation, CRC press, New York, 1999.
- [3] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P., Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp. 3-47.