

## تحلیل ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو تقویت شده با نانولوله‌های نیتريدبور بر روی بستر ارتجاعی

ایلدا عبداللهی<sup>۱</sup>، محمدحسین یاس<sup>۲\*</sup>

\*نویسنده مسئول: yas@razi.ac.ir

### چکیده

### واژه‌های کلیدی

کامپوزیت، نانولوله‌های نیتريدبور، تیر تیموشنکو، روش دیفرانسیل کوادریچر، بستر الاستیک، ارتعاش آزاد

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد تیر نانوکامپوزیتی پایه پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های نیتريدبور بر روی بستر الاستیک پرداخته شده است. نانولوله‌ها صاف، بدون نقص و با جهت گیری یکنواخت و مستقیم در ماتریس در نظر گرفته شده است. نحوه توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت تیر به صورت یک توزیع یکنواخت و سه توزیع هدفمند متفاوت در نظر گرفته شده است. خواص تیر نانوکامپوزیتی با استفاده از یک مدل میکرومکانیکی بدست آمده و معادلات حاکم بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته حل شده و فرکانس‌های طبیعی تیر بدست آمده است. در ادامه تاثیر پارامترهای مختلف از قبیل کسر حجمی نانولوله، نحوه توزیع نانولوله در راستای ضخامت تیر، نوع بستر الاستیک، شرایط مرزی مختلف و نسبت لاغری تیر بر روی فرکانس طبیعی بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که تغییر هر کدام از این پارامترها تاثیر بسزایی بر روی فرکانس طبیعی دارد.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه رازی کرمانشاه

۲- استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه رازی کرمانشاه

## ۱- مقدمه

ارتقای خواص مکانیکی و حرارتی بوده و تاکنون ارتعاشات این مواد تحلیل و بررسی نشده است. ژری و همکارانش در سال ۲۰۰۸ در یک کار آزمایشگاهی خواص کامپوزیت پایه پلیمر PMMA تقویت شده با نانولوله‌ی نیتريدبور را مورد بررسی قرار دادند [۶]. یانگ و همکارانش در سال ۲۰۰۸ بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۱</sup> و با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر ارتعاشات آزاد و اجباری تیر هدفمند تحت بار حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند [۷]. که و همکارانش در سال ۲۰۰۹ ارتعاشات آزاد و کمانش الاستیک یک تیر هدفمند ترک‌دار را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو<sup>۲</sup> با روش تحلیلی بررسی کردند [۸]. یینگ و همکارانش در سال ۲۰۰۸ یک حل دقیق برای ارتعاشات آزاد تیر اورتوتروپیک<sup>۳</sup> هدفمند بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک بر اساس تیوری الاستیسیته دوبعدی به‌دست آوردند [۹]. یان و همکارانش در سال ۲۰۱۱ به تحلیل دینامیکی تیر هدفمند ترک‌دار تحت تاثیر بار متحرک و بر روی بستر ارتجاعی بر اساس تیوری تیر تیموشنکو و با استفاده از قانون توزیع نمایی پرداختند [۱۰]. یاس و صمدی در سال ۲۰۱۱ با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته و با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو ارتعاشات آزاد و کمانش تیر هدفمند تقویت شده با نانولوله های کربنی را مورد بررسی قرار دادند [۱۱]. یاس و حشمتی در سال ۲۰۱۱ با استفاده از روش المان محدود و براساس تئوری تیر تیموشنکو و اویلر برنولی و به کمک قانون موری-تاناکا تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر هدفمند تقویت شده با نانولوله های کربنی را مورد بررسی قرار دادند [۱۲].

خواص منحصر به فرد نانولوله‌های نیتريد بور آن‌ها را به تقویت‌کننده‌های خوبی برای کامپوزیت‌ها تبدیل کرده است. نانولوله‌های نیتريد بور دارای مدول الاستیک بالا در حدود ۱ TPa بوده و هدایت حرارتی آن بسته به قطر نانولوله از ۳۰۰ W/M k تا ۳۰۰۰ W/M k متغیر می‌باشد. نانولوله‌ی نیتريد بور برخلاف نانولوله‌ی کربنی که بسته به نوع کایرالیته‌اش دارای خاصیت رسانایی یا شبه فلزی است، یک نارساناست که این خاصیت وابسته به کایرالیته‌ی آن نیست. یکی از مهم‌ترین و شگفت‌انگیزترین خواص نانولوله‌های نیتريد بور پایداری حرارتی بسیار بالای آن تا دمای حدود ۹۰۰°C الی ۹۵۰°C است. این در حالی است که نانولوله‌های کربنی در دمای حدود ۵۰۰°C شروع به سوختن می‌کند. کامپوزیت‌های تقویت شده با این نانولوله‌ها استحکام مکانیکی، پایداری حرارتی، مقاومت شیمیایی و هدایت حرارتی قابل توجه و در عین حال ضریب انبساط حرارتی پایینی دارند. از ویژگی‌های حائز اهمیت کامپوزیت‌های پایه پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور حفظ خاصیت دی‌الکتریک پلیمر در عین ارتقای باقی خواص می‌باشد. که این خاصیت در کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی حفظ نمی‌شود. [۱ تا ۵]

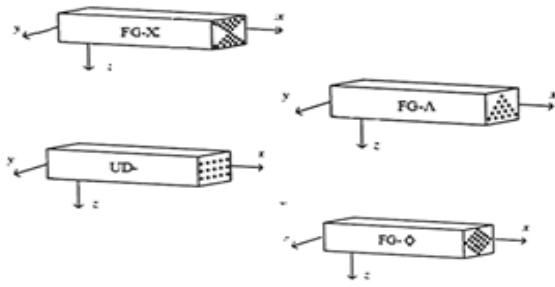
در این مقاله، ارتعاشات آزاد تیر هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور، بر روی بستر الاستیک بررسی می‌شود. معادلات حاکم بر ارتعاش تیر با استفاده از اصل همیلتون و تری تیر تیموشنکو استخراج شده و روش دیفرانسیل کوادریچر برای حل معادلات و استخراج فرکانس طبیعی تیر به کار گرفته شده است.

تاکنون بررسی‌های انجام شده بر روی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور بیشتر معطوف به

<sup>۱</sup>First order shear deformation theory

<sup>۲</sup>Timoshenko beam theory

<sup>۳</sup>Orthotropic



شکل (۱) انواع توزیع نانولوله در راستای ضخامت تیر

$$FG - \phi : V_{bnnt} = 2 - 4 \frac{|z|}{h} V_{bnnt}^* \quad (۴)$$

$$FG - X : V_{bnnt} = 4 \frac{|z|}{h} V_{bnnt}^* \quad (۵)$$

$$FG - \Lambda : V_{bnnt} = (1 - \frac{2z}{h}) V_{bnnt}^* \quad (۶)$$

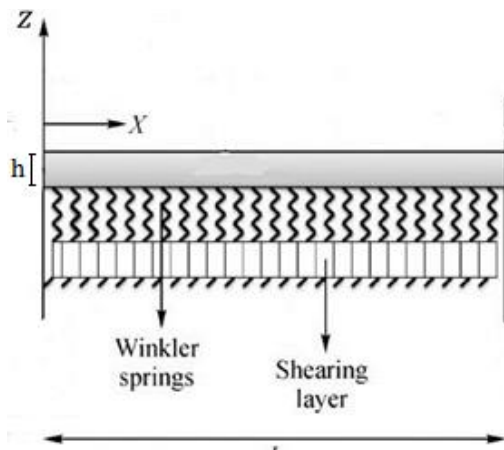
$$UD : V_{bnnt} = V_{bnnt}^* \quad (۷)$$

که  $V_{bnnt}^*$  بیانگر درصد حجمی نانولوله‌های نیتريد بور در ماتریس میباشد و به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_{bnnt}^* = \frac{W_{bnnt}}{W_{bnnt} + (\rho^{bnnt} / \rho^m)(1 - W_{bnnt})} \quad (۸)$$

$W_{bnnt}$ ،  $\rho^{bnnt}$  و  $\rho^m$  به ترتیب بیانگر کسر جرمی نانولوله، چگالی نانولوله و چگالی ماتریس می باشند.

همانطور که در شکل (۲) ملاحظه می شود؛ تیر مورد بررسی، یک تیر تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور به طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  می باشد که بر روی بستر ارتجاعی در حال ارتعاش آزاد است و شرایط مرزی مختلف بر دو سر تیر اعمال می شود.



شکل (۲) هندسه تیر مورد بررسی

## ۲- خواص مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور (BNNTRC)

به منظور انجام تحلیل‌های مختلف بر روی مواد BNNTRC ابتدا لازم است خواص مکانیکی این نانو کامپوزیت‌ها محاسبه شود. برای این منظور، بر اساس یک مدل میکرو مکانیکی، مدول یانگ، مدول برشی چگالی جرمی و ضریب پواسون موثر مواد BNNTRC به صورت زیر بیان می شود [۱۳]

$$E_{11} = \frac{1+2(l_{bnnt}/d_{bnnt})\eta_l V_{bnnt} E_m}{1-\eta_l V_{bnnt}} \quad (الف-۱)$$

$$\eta_l = \frac{(E_{bnnt}/E_m) - 1}{(E_{bnnt}/E_m) + 2(l_{bnnt}/d_{bnnt})}$$

$$E_{22} = \frac{1+2\eta_T V_{bnnt} E_m \eta_T}{1-\eta_T V_{bnnt}} \quad (ب-۱)$$

$$G_{12} = \frac{1+\eta_G V_{bnnt} G_m \eta_G}{1-\eta_G V_{bnnt}} \quad (ج-۱)$$

که در آن  $G_m$  و  $G_{bnnt}$  به ترتیب مدول برشی مربوط به نانولوله‌های نیتريد بور و ماتریس ایزوتروپیک می باشد. ضریب پواسون و چگالی جرمی نیز به این صورت تعریف می شود:

$$v_{12} = V_{bnnt} v^{bnnt} + V_m v^m, \quad v_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} v_{12} \quad (۲)$$

$$\rho_c = V_{bnnt} \rho^{bnnt} + V_m \rho^m \quad (۳)$$

که  $v_{12}$  و  $v_{21}$  به ترتیب ضریب پواسون بزرگ<sup>۱</sup> و ضریب پواسون کوچک<sup>۲</sup> می باشند.

به منظور بررسی تاثیر نحوه توزیع نانولوله‌ها در ماتریس، چهار توزیع که شامل یک توزیع یکنواخت<sup>۳</sup> و سه توزیع هدفمند<sup>۴</sup> از نانولوله در راستای ضخامت تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۱).

<sup>۱</sup>Major poisson ratio

<sup>۲</sup>Minor poisson ratio

<sup>۳</sup>Uniformly distribution(UD)

<sup>۴</sup>Functionally graded(FG)

در این مدل نیروی عکس العمل بستر عبارت است از:

$$p = k_w w - k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (9)$$

که در این رابطه  $W$ ،  $k_s$  و  $k_w$  به ترتیب بیانگر تغییر مکان عرضی تیر، ضریب الاستیک لایه ی وینکلر و ضریب الاستیک لایه ی برشی می باشند و  $p$  نیروی عکس العمل بستر بر واحد سطح است. این رابطه که مربوط به عکس العمل بستر پسترناک می باشد با مساوی صفر قرار دادن  $k_s$  به مدل وینکلر تبدیل شده و صفر قرار دادن هر دو ضریب بیانگر عدم وجود بستر الاستیک می باشد.

بر اساس تئوری تیر تیموشنکو میدان تغییر مکان محوری  $U(x, z, t)$  و تغییر مکان عرضی  $W(x, z, t)$  در هر نقطه تیر به صورت زیر بیان می شود [۱۴]:

$$U(x, z, t) = u_0(x, t) + z \Psi(x, t), \quad (10)$$

$$W(x, z, t) = w_0(x, t)$$

$u_0$  و  $w_0$  مؤلفه های تغییر مکان در صفحه میانی تیر و  $\Psi$  دوران سطح مقطع تیر حول محور می باشند. روابط کرنش-تغییر مکان خطی و تنش نرمال و تنش برشی به صورت رابطه ی (۱۱) و (۱۲) بیان می شود:

$$\epsilon_x = \frac{du_0}{dx} + z \frac{d\Psi}{dx}, \quad \gamma_{xz} = \frac{dw_0}{dx} + \Psi \quad (11)$$

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \epsilon_x, \quad \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (12)$$

که:

$$Q_{11}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad Q_{55}(z) = G_{12}(z) \quad (13)$$

نیروی محوری  $N_x$ ، ممان خمشی  $M_x$  و نیروی برش عرضی  $Q_x$  که منتهج های تنش می باشند به صورت زیر تعریف می شوند

$$N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (14-الف)$$

$$M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (14-ب)$$

$$Q_x = \kappa A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi \right) \quad (14-ج)$$

$\kappa$  ضریب تصحیح برشی<sup>۱</sup> است که مقدار آن به سطح مقطع بستگی دارد و برای سطح مقطع مستطیلی (۵/۶) می باشد [۸].

مؤلفه های سختی<sup>۲</sup> و ترم های اینرسی<sup>۳</sup> به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_0^L Q_{11}(z) (l, z, z^2) dz,$$

$$A_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55}(z) dz$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_0^L \rho(z) (l, z, z^2) dz \quad (15)$$

### ۳- معادلات حرکت

معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج می شود. اصل همیلتون به صورت رابطه زیر بیان می شود:

$$\delta \int_0^t (T - U + V) dt = 0 \quad (16)$$

که در این رابطه  $T$  انرژی جنبشی،  $U$  انرژی پتانسیل سیستم که مجموع انرژی کرنشی تیر و انرژی پتانسیل بستر الاستیک می باشد و  $V$  نیز کار انجام شده توسط نیروهای خارجی وارد بر سیستم می باشد. که در بحث ارتعاشات آزاد، نیروی خارجی بر سیستم وارد نشده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$T = \frac{b}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \dot{u}_i dz dx$$

$$U = \frac{b}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dz dx$$

$$+ \frac{b}{2} \int_0^l (k_w w^2 - k_s \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2) dz dx \quad (17)$$

که  $\rho(z)$  چگالی تیر می باشد.

با قرار دادن روابط (۱۱) و (۱۲) در رابطه ی (۱۷) و در نهایت در رابطه ی (۱۶) و انتگرال گیری جز به جز و با قرار دادن ضرایب  $\delta u$ ،  $\delta w$  و  $\delta \Psi$  برابر با صفر معادلات حرکت به صورت زیر ظاهر شده که با جایگذاری روابط (۱۴) در معادلات حرکت، معادلات حرکت بر حسب تغییر مکانها به شکل زیر نمایان می شود:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (18-الف)$$

$$= I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

<sup>2</sup> Stiffness components

<sup>3</sup> Inertia terms

<sup>1</sup> Shear correction factor

$$c_{ij}^{(n)} = n \left( c_{ii}^{(n-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right), i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j, n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (22)$$

$$c_{ii}^{(n)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N c_{ij}^{(n)} \quad i = 1, 2, \dots, N, n = 1, 2, \dots, N-1$$

در این تحلیل از نقاط نمونه چپی شف-گوس-لوباتو استفاده

شده است که به صورت زیر بیان می شود و N تعداد کل

نقاط نمونه گیری استفاده شده در هر راستا می باشد.

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right), i = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

برای به دست آوردن فرکانس طبیعی، تغییر مکانها با

استفاده از تابع زمانی به صورت مسئله مقدار ویژه نوشته

می شود.

$$\begin{aligned} \bar{W}(x, t) &= w(x)e^{-i\omega t} \\ \bar{U}(x, t) &= U(x)e^{-i\omega t} \\ \psi(x, t) &= \psi(x)e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (24)$$

$u(x), w(x)$  و  $\psi(x)$  مود شکل مربوط به حرکت عرضی،

محوری و چرخشی می باشند و  $i = \sqrt{-1}$ .

با قراردادن روابط (۲۰) در معادلات حاکم (۱۸) و بی بعد

سازی با استفاده از روابط (۱۹) و در نهایت اعمال روش

دیفرانسیل کوادریچر معادلات حرکت به صورت نهایی زیر

درمی آیند:

$$a_{11} \sum_{j=1}^N B_{ij} u_j + b_{11} \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi_j \quad (25-الف)$$

$$= -\bar{I}_1 \omega^2 u_i - \bar{I}_2 \omega^2 \psi_i$$

$$\kappa a_{55} \left( \sum_{j=1}^N B_{ij} w_j + \sum_{j=1}^N A_{ij} \psi_j \right) - k_1 w_i \quad (25-ب)$$

$$+ k_2 \sum_{j=1}^N B_{ij} w_j = -\bar{I}_1 \omega^2 w_i$$

$$\begin{aligned} \kappa a_{55} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - k_w w + k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (18-ب)$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \kappa a_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi \right) \\ = I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (18-ج)$$

می توان معادلات را با تغییر متغیر به صورت زیر بی بعد کرد

[۸]:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{L}, (\bar{U}, \bar{W}) = \frac{(u_0, w_0)}{h}, k_1 \\ = \frac{k_w L^2}{A_{110}}, k_2 = \frac{k_s}{A_{110}}, (\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3) \\ = \left( \frac{I_1}{I_{10}}, \frac{I_2}{I_{10} h}, \frac{I_3}{I_{10} h^2} \right), \eta = \frac{L}{h}, \psi = \Psi \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (a_{11}, a_{55}, b_{11}, d_{11}) = \\ \left( \frac{A_{11}}{A_{110}}, \frac{A_{55}}{A_{110}}, \frac{B_{11}}{A_{110} h}, \frac{D_{11}}{A_{110} h^2} \right), \omega = \\ \Omega L \sqrt{\frac{I_{10}}{A_{110}}}, \tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{A_{110}}{I_{10}}} \end{aligned}$$

#### ۴- اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر

قوانین دیفرانسیل کوادریچر برای مشتقات یک تابع فرضی

مانند  $f(x)$  به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} = \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(n)} f(x_k), i = 1, \dots, N, n \\ = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (20)$$

که در رابطه ی فوق  $c_{ik}^{(n)}$  ضرایب وزنی مرتبه n در راستای X

و N تعداد نقاط شبکه در راستای X می باشد

بر اساس روش دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته، ضرایب

وزنی مرتبه ی اول به این ترتیب به دست می آیند [۱۵]:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) M^{(1)}(x_i)}, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$$

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N c_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N (x_i - x_j), i = 1, 2, \dots, N$$

و ضرایب وزنی مرتبه بالاتر از رابطه بازگشتی زیر به دست

می آیند:

در مراجع [۸] و [۱۰] مقایسه می شود. در این تحلیل توزیع خواص تیر با استفاده از قانون نمایی  $P(z) = P_0 e^{az}$  بیان می شود، که در آن  $P_0$  خواص تیر در صفحه میانی  $(z = 0)$  و  $\alpha$  ثابت بیان کننده چگونگی توزیع خواص در ضخامت تیر می باشد.

در این تحلیل  $E_2/E_1 = 5$  که در آن  $E_1$  و  $E_2$  به ترتیب مدول یانگ در صفحه پایینی و بالایی تیر بوده و خواص مکانیکی تیر در صفحه بالایی به صورت  $\rho_1 = 2780 \text{ kg/m}^3$  و  $E_1 = 70 \text{ Gpa}$  و  $\nu = 0.33$  در نظر گرفته شده است. همان طور که در جدول (۱) در پیوست می بینیم نتایج بدست آمده در این تحلیل با نتایج ذکر شده در مراجع از تطابق خوبی برخوردار بوده و سرعت همگرایی روش ارائه شده بسیار بالا می باشد. نتایج ارتعاشات آزاد تیر BNTRC برای شرایط مرزی مختلف، توزیع های متفاوت نانولوله و ضرایب مختلف بستر ارتجاعی در جدول (۲) تا (۵) در پیوست آورده شده است.

خواص هندسی تیر  $V_{bnnt}^* = 15$  و  $L/h = 0.1$  و ماتریس تیر پلی متیل متاکرلیت (PMMA) و نانولوله ی نیتريد بور (۱۰ و ۱۰) به عنوان تقویت کننده ی ماتریس در نظر گرفته شده است. که خواص ماتریس و نانولوله به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \rho_m &= 1190 \text{ kg/m}^3, \nu_m = 0.3, E_m = 2.5 \text{ Gpa} \\ \rho_{bnnt} &= 2270 \text{ kg/m}^3, \nu_{bnnt} = 0.14, E_{bnnt} \\ &= 1.064 \text{ Tpa}, G_{bnnt} \\ &= 0.841 \text{ Tpa}, l_{bnnt}/d_{bnnt} \\ &= 300 \end{aligned}$$

همانطور که در جدول های (۲) تا (۵) در پیوست مشاهده می شود با افزایش کسر حجمی نانولوله فرکانس طبیعی تیر افزایش می یابد. هم چنین فرکانس طبیعی ارتعاش تیر بر روی بستر الاستیک به مراتب بیشتر از فرکانس طبیعی ارتعاش تیر بدون بستر الاستیک می باشد و فرکانس طبیعی

$$\begin{aligned} b_{11} \sum_{j=1}^N B_{ij} u_j + d_{11} \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi_j \\ - \kappa \eta a_{55} \left( \sum_{j=1}^N A_{ij} w_j \right. \\ \left. + \eta \psi_i \right) \\ = -\bar{I}_2 \omega^2 u_i - \bar{I}_3 \omega^2 \psi_i \end{aligned} \quad (ج-۲۵)$$

که در معادلات فوق  $A_{ij}$  و  $B_{ij}$  به ترتیب ضرایب وزنی مرتبه اول و دوم در راستای  $x$  می باشند. به طور مشابه روش دیفرانسیل کوادریچر بر شرایط مرزی بی بعد شده اعمال می شود

### ۵- استخراج فرکانس های طبیعی تیر

به منظور استخراج سیستم معادلات مقدار ویژه، متغیرها در تمام دامنه محاسباتی به دو بخش تقسیم می شوند. متغیرهای نقاط داخلی که با زیرنویس  $d$  و متغیرها در مرزها با زیرنویس  $b$  مشخص می شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned} \{U_d\} &= \{\{U_d\}, \{W_d\}, \{\Psi_d\}\}^T \\ \{U_b\} &= \{\{U_b\}, \{W_b\}, \{\Psi_b\}\}^T \end{aligned} \quad (۲۲)$$

معادلات (۲۷) را با اعمال شرایط مرزی می توان به شکل زیر خلاصه کرد:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{bd}] \\ [A_{db}] & [A_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_b\} \\ \{U_d\} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [\bar{I}_i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_b\} \\ \{U_d\} \end{Bmatrix} \quad (۲۶)$$

منظور از  $[\bar{I}_i]$  ماتریس ضرایب ترم های اینرسی می باشد.

به این ترتیب سیستم معادلات مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آید

$$([A] - \omega^2 [\bar{I}_i]) \{U_d\} = \{0\} \quad (۲۷)$$

که

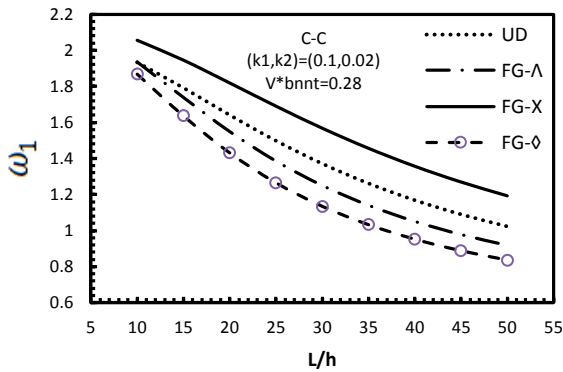
$$[A] = [A_{dd}] - [A_{db}] [A_{bb}]^{-1} [A_{bd}] \quad (۲۸)$$

فرکانس های طبیعی مقادیر ویژه ی معادله ی (۲۷) می باشند.

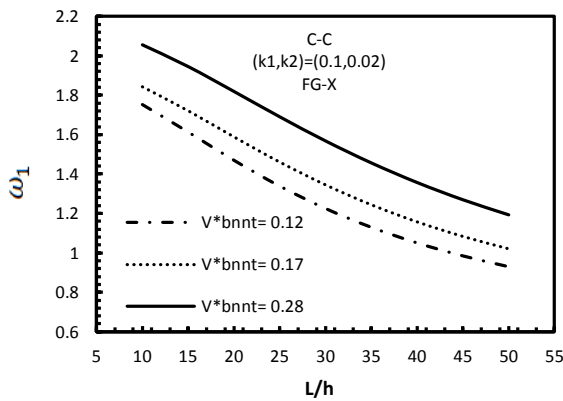
### ۶- تحلیل نتایج عددی

در ابتدا برای اعتباردهی به نتایج این تحلیل، ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو FGM بر روی بستر الاستیک بررسی شده و فرکانس بی بعد بدست آمده با فرکانس بی بعد بدست آمده

تغییرات فرکانس بی بعد به طور نمونه برای توزیع FG-X و کسر حجمی ۰/۲۸ بررسی شده است.

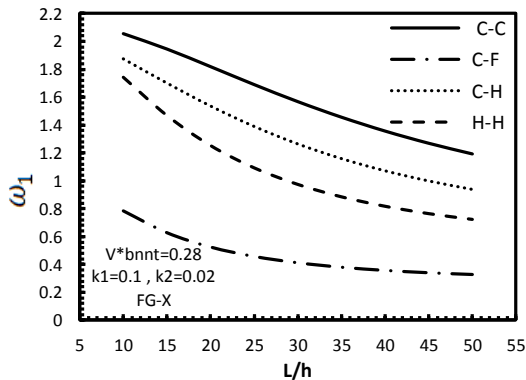


شکل (۱) تاثیر نحوه توزیع نانولوله در راستای ضخامت بر فرکانس طبیعی



شکل (۲) تاثیر کسر حجمی نانولوله بر فرکانس طبیعی

در شکل (۳) تاثیر شرایط مرزی بر روی اولین فرکانس طبیعی بی بعد ارتعاش تیر بر روی بستر پسترناک بررسی شده است این شکل نشان می دهد که بیشترین فرکانس مربوط به تیر C-C بوده و تیر C-F دارای کمترین فرکانس بی بعد می باشد.



شکل (۳) تاثیر شرط مرزی بر فرکانس طبیعی

ارتعاش بر روی بستر پسترناک نسبت به فرکانس طبیعی ارتعاش بر روی بستر وینکلر بیشتر است که البته به طور استثنا در تیر C-F خلاف این قضیه مشاهده می شود. هم چنین با مقایسه فرکانس های طبیعی در حالت های مختلف توزیع نانولوله در ضخامت تیر می توان دریافت که بیشترین کمترین فرکانس ارتعاشی به ترتیب مربوط به توزیع های هدفمند FG-X و FG-◊ بوده، به عبارت دیگر توزیع های هدفمند و متقارن نانولوله بیشترین قابلیت را برای کاهش و یا افزایش فرکانس طبیعی تیر دارند.

با مقایسه فرکانس های طبیعی تیر مورد بررسی در شرایط مرزی مختلف می توان مشاهده کرد که بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به تیر C-C بوده و پس از آن فرکانس طبیعی به ترتیب در تیر C-H، تیر H-H و تیر C-F کاهش می یابد. در شکل های (۱) تا (۵) نحوه تغییرات اولین فرکانس طبیعی بی بعد، نسبت به نسبت لاغری تیر و تاثیر پارامترهای مختلف بر روی آن نشان داده شده است.

در شکل (۱) تاثیر نحوه توزیع نانولوله در ضخامت تیر بر روی اولین فرکانس بی بعد برای تیر C-C بر روی بستر پسترناک بررسی شده، همان طور که در این شکل مشاهده می شود با افزایش نسبت لاغری تیر فرکانس بی بعد کاهش می یابد و همچنین بیشترین فرکانس طبیعی تیر مربوط به تیر هدفمند با توزیع FG-X می باشد. به همین دلیل در بقیه ی شکل ها نحوه تغییرات فرکانس بی بعد به طور نمونه برای این توزیع از نانولوله بررسی شده است.

شکل (۲) تاثیر کسر حجمی نانولوله را بر روی اولین فرکانس طبیعی بی بعد نشان می دهد. همان طور که ملاحظه می شود فرکانس طبیعی تیر با افزایش نسبت لاغری تیر کاهش یافته اما با افزایش کسر حجمی نانولوله فرکانس بی بعد نیز بیشتر می شود. به همین دلیل در بقیه ی شکل ها نحوه

نانولوله‌ها با جهت‌گیری یکنواخت و مستقیم<sup>۱</sup> در ماتریس توزیع شده و همچنین توزیع نانولوله‌ها در ماتریس به صورت یکنواخت و یا هدفمند در راستای ضخامت تیر در نظر گرفته شد، خواص تیر نانوکامپوزیتی بر اساس یک مدل میکرومکانیکی بیان شده و معادلات حاکم بر ارتعاش تیر با استفاده از اصل همیلتون و تئوری تیر تیموشنکو استخراج شده و روش ديفرانسیل کوادریچر برای حل معادلات و استخراج فرکانس طبیعی تیر به کار گرفته شده است. در این تحلیل تاثیر کسر حجمی نانولوله و انواع توزیع آن در راستای ضخامت تیر، شرایط مرزی مختلف، نسبت لاغری تیر و همچنین پارامترهای بستر ارتجاعی بر روی فرکانس طبیعی بررسی شده است.

➤ با افزایش کسر حجمی نانولوله، فرکانس طبیعی تیر نیز افزایش می‌یابد.

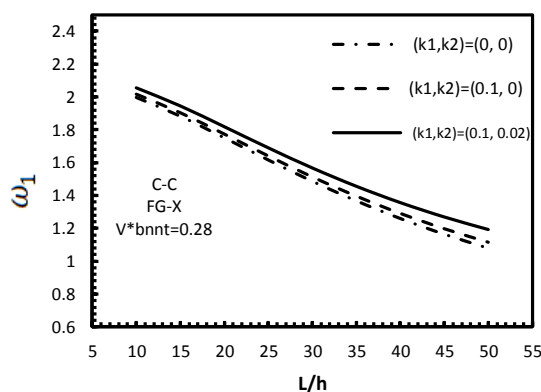
➤ توزیع متقارن FG-X بیشترین فرکانس طبیعی را داشته و پس از آن به ترتیب توزیع UD، توزیع نامتقارن FG-A و توزیع متقارن FG- $\diamond$  نسبت به هم فرکانس بیشتری دارند.

➤ در شرط مرزی C-C، تیر بیشترین فرکانس طبیعی را داشته و پس از آن به ترتیب در شرایط مرزی C-H، C-F و H-H فرکانس کاهش می‌یابد.

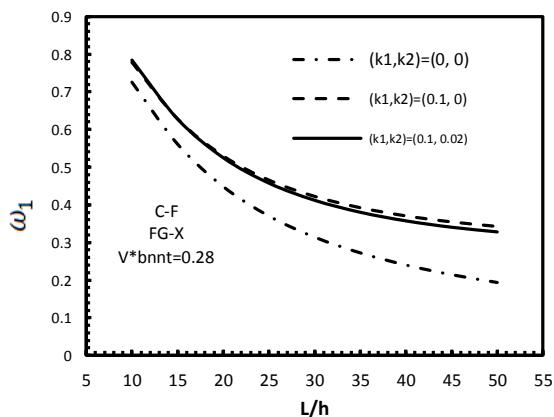
➤ فرکانس طبیعی ارتعاش تیر بر روی بستر ارتجاعی بالاتر از فرکانس طبیعی ارتعاش تیر بدون بستر ارتجاعی است.

➤ در شرایط مرزی C-H، C-H و H-H و C-C فرکانس طبیعی تیر مرتعش بر روی بستر پسترناک بالاتر از فرکانس طبیعی تیر مرتعش بر بستر وینکلر است. اما در شرط مرزی C-F خلاف این قضیه مشاهده می‌شود.

شکل (۴) و (۵) نشان‌دهنده‌ی تاثیر پارامترهای بستر الاستیک بر روی فرکانس طبیعی بی بعد در تیر های C-C و C-F می‌باشد. همانطور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود در تیر C-C بیشترین فرکانس مربوط به ارتعاش تیر بر روی بستر پسترناک بوده و پس از آن تیر مرتعش بر روی بستر وینکلر فرکانس بیشتری نسبت به تیر مرتعش بدون بستر دارد. اما شکل (۵) نشان‌دهنده‌ی روندی متفاوت در تیر یک C-F است، در این شرایط مرزی فرکانس بی بعد تیر مرتعش بر روی بستر وینکلر بیشتر از فرکانس تیر مرتعش بر روی بستر پسترناک می‌باشد.



شکل (۴) تاثیر فاکتورهای بستر ارتجاعی بر فرکانس طبیعی تیر C-C



شکل (۵) تاثیر فاکتورهای بستر ارتجاعی بر فرکانس طبیعی در تیر C-F

## ۷- نتیجه‌گیری

در این تحلیل، ارتعاشات آزاد تیر هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور بر روی بستر الاستیک بررسی شد،

<sup>1</sup>Aligned



## پیوست:

جدول (۱) اعتباردهی نتایج با نتایج بدست آمده در مراجع

(k1, k2)	BCs	N=5	N=7	N=9	N=11	N=13	Ref[10]	Ref[8]
C-C								
(0, 0)		0.8662	0.8598	0.86	0.86	0.86	0.86	0.8494
(0.05, 0)		0.8915	0.8852	0.8854	0.8854	0.8854	0.8715	
(0.05, 0.01)		0.9414	0.9397	0.9398	0.9398	0.9398	0.8967	
C-F								
(0, 0)		0.1486	0.1557	0.1556	0.1556	0.1556	0.1556	0.1547
(0.05, 0)		0.2582	0.2623	0.2623	0.2623	0.2623	0.2101	
(0.05, 0.01)		0.2535	0.2513	0.2512	0.2512	0.2512	0.2033	
H-H								
(0, 0)		0.4526	0.46	0.4598	0.4598	0.4598	0.4597	0.4543
(0.05, 0)		0.499	0.5057	0.5055	0.5055	0.5055	0.4806	
(0.05, 0.01)		0.5794	0.5855	0.5854	0.5854	0.5854	0.5196	

جدول (۲) سه فرکانس اول طبیعی بی بعد شده تیر BNNTRC برای شرایط مرزی C-C (L/h=15)

	UD			FGA			FGX			FG◇		
$V_{bnnt}^*$	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28
$(k_1, k_2) = (0, 0)$												
$\omega_1$	1.41	1.52	1.72	1.30	1.43	1.66	1.52	1.64	1.88	1.20	1.32	1.55
	12	65	33	36	02	73	62	33	28	32	97	93
$\omega_2$	2.98	3.17	3.53	2.84	3.06	3.50	3.15	3.35	3.80	2.69	2.92	3.35
	96	94	16	44	1	59	08	14	21	74	01	89
$\omega_3$	4.80	5.07	5.58	4.62	4.94	5.61	5.00	5.28	5.96	4.44	4.76	5.43
	34	06	8	96	04	55	45	88	06	61	62	56
$(k_1, k_2) = (0.1, 0)$												
$\omega_1$	1.44	1.55	1.74	1.33	1.46	1.69	1.55	1.66	1.90	1.24	1.36	1.58
	28	46	62	77	01	1	54	94	39	18	46	
$\omega_2$	3.00	3.19	3.54	2.86	3.07	3.51	3.16	3.36	3.81	2.71	2.93	3.37
	46	3	28	01	51	72	51	42	26	4	48	07
$\omega_3$	4.81	5.07	5.59	4.63	4.94	5.62	5.01	5.29	5.96	4.45	4.77	5.44
	27	92	52	93	91	25	35	7	73	62	52	29
$(k_1, k_2) = (0.1, 0.02)$												
$\omega_1$	1.50	1.61	1.79	1.40	1.52	1.73	1.61	1.72	1.94	1.31	1.42	1.63
	56	02	16	64	02	86	3	07	52	52	72	61
$\omega_2$	3.12	3.29	3.63	2.98	3.18	3.60	3.27	3.46	3.89	2.84	3.05	3.46
	12	85	06	3	49	58	57	44	42	41	03	35
$\omega_3$	4.97	5.22	5.71	4.80	5.10	5.74	5.17	5.43	6.08	4.63	4.93	5.57
	54	77	99	74	11	64	01	98	45	1	25	07

جدول (۳) سه فرکانس اول طبیعی بی بعد شده تیر BNNTRC برای شرایط مرز C-F (L/h=15)

	UD			FGA			FGX			FG◇		
$V_{bnnt}^*$	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28
$(k_1, k_2) = (0, 0)$												
$\omega_1$	0.32 74	0.37 75	0.46 16	0.27 78	0.32 1	0.39 68	0.39 29	0.45 34	0.56 1	0.24 17	0.27 92	0.34 39
$\omega_2$	1.56 2	1.71 7	1.97 73	1.40 97	1.56 84	1.85 64	1.73 38	1.89 94	2.21 95	1.28 09	1.43 36	1.70 37
$\omega_3$	3.44 76	3.71 28	4.18 02	3.21 44	3.50 29	4.06 26	3.70 55	3.98 45	4.56 68	3.00 24	3.29 03	3.83 11
$(k_1, k_2) = (0.1, 0)$												
$\omega_1$	0.44 42	0.47 85	0.54 1	0.40 89	0.43 54	0.48 69	0.49 44	0.54 05	0.62 8	0.38 53	0.40 56	0.44 49
$\omega_2$	1.59 04	1.74 19	1.99 73	1.44 11	1.59 56	1.87 76	1.75 95	1.92 2	2.23 74	1.31 54	1.46 33	1.72 68
$\omega_3$	3.46 06	3.72 44	4.18 97	3.22 82	3.51 51	4.07 23	3.71 76	3.99 53	4.57 55	3.01 73	3.30 33	3.84 14
$(k_1, k_2) = (0.1, 0.02)$												
$\omega_1$	0.43 53	0.47 2	0.53 75	0.39 73	0.42 58	0.47 99	0.48 9	0.53 76	0.62 77	0.37 22	0.39 4	0.43 57
$\omega_2$	1.67 08	1.81 44	2.05 75	1.52 67	1.67 17	1.93 89	1.83 51	1.99 04	2.29 34	1.40 7	1.54 43	1.79 18
$\omega_3$	3.59 1	3.84 34	4.28 98	3.36 33	3.63 69	4.17 15	3.84 3	4.10 99	4.66 98	3.15 9	3.43 02	3.94 42

جدول (۴) سه فرکانس اول طبیعی بی بعد شده تیر BNNTRC برای شرایط مرز C-H (L/h=15)

	UD			FGA			FGX			FG◇		
$V_{bnnt}^*$	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28	0.12	0.17	0.28
$(k_1, k_2) = (0, 0)$												
$\omega_1$	1.13 84	1.25 59	1.45 05	1.04 8	1.17 15	1.39 42	1.27 05	1.39 43	1.62 92	0.92 28	1.03 68	1.23 7
$\omega_2$	2.83 99	3.05 42	3.43 13	2.66 35	2.90 06	3.36 03	3.04 52	3.26 79	3.73 66	2.47 43	2.71 23	3.15 73
$\omega_3$	4.72 29	5.00 7	5.53 91	4.52	4.85 01	5.53 86	4.95 21	5.24 82	5.92 81	4.29 88	4.63 89	5.32 05
$(k_1, k_2) = (0.1, 0)$												
$\omega_1$	1.17 73	1.28 99	1.47 77	1.09 01	1.20 78	1.42 25	1.30 55	1.42 5	1.65 35	0.97 03	1.07 77	1.26 88
$\omega_2$	2.85 57	3.06 83	3.44 29	2.68 02	2.91 55	3.37 21	3.05 99	3.28 11	3.74 73	2.49 24	2.72 82	3.16 99
$\omega_3$	4.73 24	5.01 57	5.54 63	4.52 99	4.85 89	5.54 58	4.96 12	5.25 64	5.93 48	4.30 92	4.64 82	5.32 8
$(k_1, k_2) = (0.1, 0.02)$												
$\omega_1$	1.25 38	1.35 67	1.53 13	1.17 32	1.27 97	1.47 87	1.37 37	1.48 49	1.70 1	1.06 44	1.15 92	1.33 27
$\omega_2$	2.97 72	3.17 74	3.53 28	2.80 95	3.03 37	3.46 37	3.17 37	3.38 34	3.83 02	2.63 16	2.85 07	3.26 74
$\omega_3$	4.89 79	5.16 62	5.67 22	4.70 19	5.01 37	5.67 13	5.11 96	5.40 05	6.05 28	4.48 98	4.80 98	5.45 86

## مراجع

- [10] Yan T., Kitipornchai S., Yang J., Qiao H., Dynamic behaviour of edge-cracked shear deformable functionally graded beams on an elastic foundation under a moving load, *Composite Structures*, Vol. 93, 2011, pp. 2992–3001.
- [11] Yas M.H., Samadi N., Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, 2012, pp. 119-128.
- [12] Heshmati M., Yasa M.H., Dynamic analysis of functionally graded multi-walled carbon nanotube-polystyrene nanocomposite beams subjected to multi-moving loads, *Materials and Design*, Vol. 49, 2013, pp. 894–904.
- [13] Mallick P.K., Fiber-reinforced composites: materials, *manufacturing, and design by Taylor & Francis Group, LLC*, 2008.
- [14] Reddy J.N., Mechanics of Laminated Composite Plates. *CRC Press, New York*, 1997.
- [15] Shu C., Differential Quadrature and Its Application in Engineering, *Springer, Berlin*, 2000.
- [16] Atlıhan G., Çallioglu H., Free Vibration Analysis of the Laminated composite Beams by Using DQM, *Plastics and Composites*, Vol. 28, 1998, pp. 881-890.
- [1] Zhi C., Bando Y., Tang C., Golberg Boron, D., nitride nanotubes, *Materials Science and Engineering*, Vol. 70, 2010, pp. 92–111.
- [2] Dolati S., Fereidoon A., Kashyzadeh K.R., A Comparison Study between Boron nitride Nanotubes and Carbon Nanotubes, *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering* ISSN 2250-2459, Vol. 2, Issue 10, 2012.
- [3] Verma V., Jindal V.K., Dharamvir K., Elastic moduli of a boron nitride nanotube, *Nanotechnology*, Vol. 18, 2007, 435711, 6pp.
- [4] Golberg, D., Bando, Y., Tang, C., Zhi, C., Functional Boron Nitride Nanotubes, *Materials Science and Engineering*, Vol. 70, 2010, pp. 92–111.
- [5] Terrones M., Romo-Herrera J. M., Cruz-Silva E., López-Urías F., Muñoz-Sandoval E., Velázquez-Salazar J.J., Terrones H., Bando Y., Golberg D., Pure and doped boron and nitride nanotubes, *materials today*, Vol. 10, No. 5, 2007, pp. 30-38.
- [6] Zhi C.Y., Bando Y., Wang W.L., Tang C.C., Kuwahara H., Golberg D., Mechanical and Thermal Properties of Polymethyl Methacrylate-BN Nanotube Composites, *Journal of Nanomaterials*, 2008, Article ID 642036, 5 pages.
- [7] Yang J., Chen Y., Xiang Y., Jia X.L., Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 312, pp. 166-181.
- [8] Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S., Xiang Y., Flexural Vibration and Elastic Buckling of a Cracked Timoshenko Beam Made of Functionally Graded Materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 16, 2009, pp. 488-502.
- [9] Ying J., Lu C.F., Chen W.Q., Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 84, No. 3, 2008, pp. 209–219.

