دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان و عدد پوچساز در درخت‌ها

نسرین ده‌گردی*

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۷/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۰۲

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. تابع $f: E(G) \to \mathcal{P}(\{1,2\})$ یک تابع احاطه‌گر یالی ۲-رنگین کمان (E2RDF) برای گراف G نامیده می‌شود، هرگاه برای هر یال e با شرط $f(e) = \emptyset$ داشته باشیم $\bigcup_{e' \in N(e)} f(e') = \{1,2\}$ که $N(e)$ همسایگی باز یال e می‌باشد. وزن یک E2RDF برابر است با $\omega(f) = \sum_{e \in E(G)} |f(e)|$. عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان G را که با نماد $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{G})$ نمایش می‌دهیم، کمترین وزن یک E2RDF در گراف G است. فرض کنید S دنباله‌ای از درجات رئوس گراف G باشد که به صورت صعودی مرتب شده‌اند. عدد پوچساز $a(\mathrm{G})$ برابر با ماکسیمم مقدار عدد صحیح k است به طوری که حاصل جمع k جمله اول از دنباله S از تعداد یال‌های گراف G بیشتر نباشد. در حالت کلی این دو پارامتر قابل مقایسه نیستند. در این مقاله رابطه بین عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان و عدد پوچساز در درخت‌ها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم برای هر درخت T از مرتبه $n \geq 2$، $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T}) \leq a(T)$.

واژه‌های کلیدی: تابع احاطه‌گر یالی ۲-رنگین کمان، عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان، عدد پوچساز.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: n.dehgardi@sirjantech.ac.ir

۱- مقدمه

در این مقاله G گرافی با مجموعه رئوس $V=V(G)$ و مجموعه یال‌های $E=E(G)$ است. مرتبه گراف G را با نماد $n=|V|$ و اندازه گراف G را با نماد $m=|E|$ نشان می‌دهیم. برای رأس v، مجموعه رئوسی که با رأس v مجاورند همسایگی باز رأس v نامیده شده و با نماد $\mathrm{N_G(v)}=\mathrm{N}(v)$ نشان می‌دهیم. همچنین همسایگی بسته رأس v به صورت $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ تعریف می‌کنیم. درجه رأس v با $d_G(v)=d(v)=|N(v)|$ برابر است. طول کوتاهترین مسیر موجود بین دو رأس u و v را فاصله u و v نامیده و با نماد $d_G(u,v)$ نشان می‌دهیم. بیشترین فاصله بین رئوس گراف G را قطر G نامیده و با $diam(G)$ نشان می‌دهیم. منظور از $\mathrm{P_n}$ مسیر به طول $n-1$ و $K_{1,\mathrm{t}}$ یک ستاره می‌باشد. برای $S\subseteq V$، $\sum(\mathrm{S,G})=\sum_{\mathrm{v\in S}}d_G(v)$ قرار می‌دهیم.

دو یال e_1 و e_2 مجاور نامیده می‌شوند، هرگاه متمایز بوده و رأس انتهایی مشترک داشته باشند. برای یال e، مجموعه یال‌هایی که با یال e مجاورند، همسایگی باز یال e نامیده شده و با نماد $\mathrm{N_G(e)}=\mathrm{N}(e)$ نشان می‌دهیم. همچنین همسایگی بسته یال e به صورت $N[e]=N(e)\cup\{e\}$ تعریف می‌کنیم.

برگ رأسی از درجه یک، رأس اتکا رأس مجاور با یک برگ و رأس اتکای قوی رأسی مجاور با حداقل دو برگ است. برای $r,s\geq 1$ گراف دو ستاره $S(r,s)$، درختی است با دقیقا دو رأس که برگ نیستند، به طوری که یکی با s برگ و دیگری با r برگ مجاور است. فرض کنید T یک درخت ریشه دار بوده و $v\in V(T)$ باشد. مجموعه فرزندان v را با $C(v)$ و مجموعه نوادگان v را با $D(v)$ نشان می‌دهیم. اگر $D[v]=D(v)\cup\{v\}$، آنگاه زیرگراف القایی توسط $D[v]$ را با نماد T_{v} نشان می‌دهیم. برای اطلاع بیشتر خواننده را به [1] ارجاع می‌دهیم.

تابع $f\colon E(G)\to \mathcal{P}(\{1,2\})$ یک تابع احاطه‌گر یالی ۲-رنگین کمان (E2RDF) برای گراف G نامیده می‌شود، هرگاه برای هر یال e با شرط $f(e)=\emptyset$ داشته باشیم $\bigcup_{e'\in N(e)}\mathrm{f}(e')=\{1,2\}$. وزن یک E2RDF برابر است با $\omega(f)=\sum_{e\in E(G)}|f(e)|$. عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان G را که با نماد $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{G})$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک E2RDF در گراف G است. یک $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{G})$-تابع، یک تابع احاطه‌گر یالی ۲-رنگین کمان با وزن $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{G})$ است. مفهوم عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان در [2] معرفی شده است. برای اطلاع بیشتر خواننده را به [3] ارجاع می‌دهیم. دنباله صعودی S مانند $d_1\leq \mathrm{d}_2\leq\cdots\leq \mathrm{d_n}$ از درجات رئوس گراف G را در نظر می‌گیریم. عدد پوچساز $a(\mathrm{G})$ برابر با ماکسیمم مقدار عدد صحیح k است به طوری که حاصل جمع k جمله اول از دنباله S از تعداد یال‌های گراف G بیشتر نباشد. برای اطلاع بیشتر خواننده را به [4,5,6,7,8,9,10] ارجاع می‌دهیم.

در این مقاله رابطه بین عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان و عدد پوچساز در درخت‌ها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم برای هر درخت T از مرتبه $n\geq 2$، $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T})\leq a(T)$.

در این مقاله از نتایج مفید زیر استفاده می‌کنیم:

گزاره الف. برای $n\geq 1$، $\gamma_{\mathrm{er2}}(P_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$.

گزاره ب. برای $n\geq 1$، $a(P_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$.

نتیجه ۱. برای $n\geq 1$، $a(P_n)=\gamma_{\mathrm{er2}}(P_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$.

۲- نتایج اصلی

زیرتقسیم یال uv از جابجا کردن یال uv با یک مسیر uwv که w رأسی جدید است، به دست می‌آید. گراف زیرتقسیم $S(G)$، گراف حاصل از زیرتقسیم هر یال گراف G است. عنکبوت سالم $\mathrm{S_t}$ از زیرتقسیم هر یال ستاره $K_{1,\mathrm{t}}$ به دست می‌آید. عنکبوت زخمی $\mathrm{S_t}$ از زیرتقسیم s یال ستاره $K_{1,\mathrm{t}}$ که $0\leq \mathrm{s}\leq t-1$ به دست می‌آید. ستاره‌ها عنکبوت‌های زخمی می‌باشند. یک عنکبوت، عنکبوت سالم یا عنکبوت زخمی است.

قضیه ۲. اگر T عنکبوت باشد، آنگاه $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T})\leq a(T)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر T یک عنکبوت سالم $\mathrm{S_t}$ باشد که $t=2,3$ یا $T=P_n$ که $n=1,2,3,4$.

اثبات. فرض کنید T یک عنکبوت سالم S_t باشد که $t \ge 2$. بنابراین $\gamma_{er2}(T) = t+1$ و $a(T) = t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$. در نتیجه $\gamma_{er2}(T) \le a(T)$ و تساوی برقرار است هرگاه $t = 2,3$ باشد. اگر $T = P_n$ که $n = 1,2,3,4$، آنگاه $\gamma_{er2}(T) = a(T)$. حال فرض کنید T یک عنکبوت زخمی بدست آمده بوسیله زیرتقسیم $0 \le s \le t-1$ یال از ستاره $K_{1,t}$ $(t \ge 2)$ باشد. اگر $s = 0$، آنگاه $\gamma_{er2}(T) = 2 \le t = a(T)$ و تساوی برقرار است هرگاه $t = 2$. حال اگر $s > 0$، آنگاه $\gamma_{er2}(T) = s + 1 \le t + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor = a(T)$ و تساوی برقرار است هرگاه $t = 2$ و $s = 1$.

قضیه ۳. اگر T درخت باشد، آنگاه $\gamma_{er2}(T) \le a(T)$ و این کران برای مسیر P_n قابل وصول است.

اثبات. از استقرا بروی تعداد رئوس استفاده می‌کنیم. به وضوح قضیه برای $n = 1,2,3,4$ برقرار است. بنابراین فرض کنید حکم برای تمامی درخت‌ها با کمتر از n رأس برقرار باشد. فرض کنید T درختی با $n \ge 5$ رأس باشد. اگر $T = P_n$ آنگاه از نتیجه ۱، حکم حاصل می‌گردد. اگر $diam(T) = 2$، آنگاه T یک ستاره بوده و با استفاده از قضیه ۲، حکم حاصل می‌گردد. اگر $diam(T) = 3$، آنگاه $T = S(r,s)$ یک دو ستاره بوده و $\gamma_{er2}(T) = 2 \le r + s = a(T)$. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که $diam(T) \ge 4$. فرض کنید T' درخت حاصل از T بوسیله حذف تعدادی رئوس باشد. اگر T' از مرتبه n' و از اندازه m' باشد، آنگاه فرض کنید $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n'}$ دنباله صعودی از درجات رئوس درخت T' باشد و S' مجموعه رئوس متناظر با $a(T')$ جمله اول از دنباله درجات درخت T' باشد. به عبارت دیگر اگر $u_1, u_2, \dots, u_{n'}$ رئوس درخت T' باشند به طوری که $d_{T'}(u_i) = d'_i$، $1 \le i \le n'$، آنگاه $S' = \{u_1, u_2, \dots, u_{a(T')}\}$. در ادامه چند ادعا را اثبات می‌کنیم.

ادعا ۱. درخت T رأس اتکای قوی مانند u ندارد به طوری که گراف حاصل از حذف u و برگ‌های مجاور u همبند باشد.

فرض کنید درخت T رأس اتکای قوی مانند u دارد به طوری که گراف حاصل از حذف u و برگ‌های مجاور u همبند باشد. فرض کنید w رأسی در T باشد به طوری که $d_T(u,w)$ ماکسیمم است. درخت T را از w ریشه دار کرده و فرض کنید v رأس ما قبل u باشد. $T' = T - T_u$ در نظر می‌گیریم. در این صورت هر $\gamma_{er2}(T')$–تابع f را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به‌وسیله قرار دادن $f(uv) = \{1,2\}$ و $f(e) = \emptyset$ برای هر یال دیگر واقع بر u به جز uv تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2$. اگر $v \in S'$، آنگاه $\sum(S',T) = \sum(S',T')$ و اگر $v \notin S'$، آنگاه $\sum(S',T) = \sum(S',T') + 1$. بنابراین $\sum(S',T) - 1 \le \sum(S',T') \le m' \le m - 3$. فرض کنید u_1, u_2 دو برگ مجاور با u باشند و $S = S' \cup \{u_1, u_2\}$. بنابراین $\sum(S,T) = \sum(S',T) + 2 \le m$ و در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 2$. با استفاده از فرض استقرا $\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2 \le a(T') + 2 \le a(T)$.

بنابراین فرض کنید درخت T رأس اتکای قوی مانند u ندارد به طوری که گراف حاصل از حذف u و برگ‌های مجاور u همبند باشد. مسیر قطری $P = v_1 v_2 \dots v_d$ در درخت T را در نظر می‌گیریم و T را از v_d ریشه دار می‌کنیم. اگر $diam(T) = 4$، آنگاه با استفاده از ادعای ۱، T یک عنکبوت بوده و بنا به قضیه ۲، حکم برقرار است. بنابراین فرض کنید $diam(T) \ge 5$. بنابر ادعای ۱، T_{v_3} یک عنکبوت است.

ادعا ۲. $d_T(v_3)=2$.

فرض کنید $d_T(v_3) \ge 3$. در این‌صورت یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

حالت ۲،۱. T_{v_3} یک عنکبوت سالم S_t باشد که $t \ge 2$. $T' = T - T_{v_3}$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه ۲، $\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + t + 1$ و $a(T) \ge a(T') + t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$. بنابراین با استفاده از

فرض استقرا

$$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + \mathrm{t}+1$$
$$\le a(\mathrm{T}') + \mathrm{t} + \left\lfloor \frac{\mathrm{t}}{2} \right\rfloor \le a(T).$$

حالت ۲.۲. T_{v_3} یک عنکبوت زخمی بدست آمده بوسیله زیرتقسیم $1 \le \mathrm{s} \le t-1$ یال از ستاره $K_{1,\mathrm{t}}$ باشد.

$T' = \mathrm{T} - \mathrm{T}_{v_3}$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه ۲، $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T}) \le \gamma_{\mathrm{er2}}(T') + \mathrm{s} +$ و $a(\mathrm{T}) \ge a(T') + \mathrm{t} + \left\lfloor \frac{\mathrm{s}}{2} \right\rfloor$. بنابراین با استفاده از فرض استقرا

$$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + s + 1$$
$$\le a(\mathrm{T}') + \mathrm{t} + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \le a(T).$$

بنابراین فرض کنید $d_T(v_2)= d_T(v_3)=2$.

ادعا ۳. $d_T(v_4)=2$.

فرض کنید $d_T(v_4) \ge 3$. $T' = \mathrm{T} - \mathrm{T}_{v_3}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت هر $\gamma_{\mathrm{er2}}(T')$–تابع f را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به وسیله قرار دادن $f(\mathrm{v_1v_2}) = \{1\}$، $f(\mathrm{v_2v_3}) = \emptyset$ و $f(\mathrm{v_3v_4}) = \{2\}$ تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T}) \le \gamma_{\mathrm{er2}}(T') + 2$. اگر $\mathrm{v_4} \in S'$، آنگاه $S = (S' - \{\mathrm{v_4}\}) \cup \{v_1, \mathrm{v_2}, \mathrm{v_3}\}$ در نظر گرفته و اگر $\mathrm{v_4} \notin S'$، آنگاه $S = S' \cup \{v_1, \mathrm{v_2}\}$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 2$. با استفاده از فرض استقرا

$$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2 \le a(\mathrm{T}') + 2 \le a(T).$$

بنابراین فرض کنید

$d_T(v_2)= d_T(v_3)= d_T(v_4)=2$.

ادعا ۴. $d_T(v_5)=2$.

فرض کنید $d_T(v_5) \ge 3$. در این‌صورت یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

حالت ۱.۴. v_5 با برگ $w \ne v_6$ مجاور است.

$T' = \mathrm{T} - \mathrm{T}_{v_4}$ در نظر می‌گیریم. چون $\bigcup_{u \in N_{v_5}(T')} \mathrm{f}(\mathrm{u}v_5) \ne \emptyset$، می‌توانیم فرض کنیم $\{1\} \subseteq \bigcup_{u \in N_{v_5}(T')} \mathrm{f}(\mathrm{u}v_5)$. در این صورت $\gamma_{\mathrm{er2}}(T')$–تابع f را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به وسیله قرار دادن $f(\mathrm{v_1v_2}) = \{1\}$، $f(\mathrm{v_2v_3}) = f(\mathrm{v_4v_5}) = \emptyset$ و $f(\mathrm{v_3v_4}) = \{2\}$ تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T}) \le \gamma_{\mathrm{er2}}(T') + 2$. حال $S = S' \cup \{v_1, \mathrm{v_2}\}$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 2$. با استفاده از فرض استقرا

$$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2 \le a(\mathrm{T}') + 2 \le a(T).$$

حالت ۲.۴. مسیری مانند xyv_5 در T موجود است به طوری که $y \ne v_6$، $d_T(\mathrm{y})=2$ و $d_T(\mathrm{x})=1$.

$T' = \mathrm{T} - \mathrm{T}_{v_4}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $\gamma_{\mathrm{er2}}(T')$–تابع f موجود است به طوری که $\bigcup_{u \in N_{v_5}(T')} \mathrm{f}(\mathrm{u}v_5) \ne \emptyset$، می‌توانیم فرض کنیم $\{1\} \subseteq \bigcup_{u \in N_{v_5}(T')} \mathrm{f}(\mathrm{u}v_5)$. در این صورت $\gamma_{\mathrm{er2}}(T')$–تابع f را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به وسیله قرار دادن $f(\mathrm{v_1v_2}) = \{1\}$، $f(\mathrm{v_2v_3}) = f(\mathrm{v_4v_5}) = \emptyset$ و $f(\mathrm{v_3v_4}) = \{2\}$ تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T}) \le \gamma_{\mathrm{er2}}(T') + 2$ حال $S = S' \cup \{v_1, \mathrm{v_2}\}$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 2$. با استفاده از فرض استقرا

$$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2 \le a(\mathrm{T}') + 2 \le a(T).$$

حالت ۳.۴. مسیری مانند $xyzv_5$ در T موجود است به طوری که $z \ne v_6$، $d_T(\mathrm{y})= d_T(\mathrm{z})=2$ و $d_T(\mathrm{x})=1$.

$T' = \mathrm{T} - \mathrm{T}_{v_4}$ در نظر می‌گیریم. چون به ازای هر $\gamma_{\mathrm{er2}}(T')$–تابع f ، $|f(xy)|+|f(yz)|+|f(zv_5)| \ge 2$، بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم $\{1\} \subseteq \mathrm{f}(\mathrm{z}v_5)$. در این صورت $\gamma_{\mathrm{er2}}(T')$–تابع f را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به وسیله قرار دادن $f(\mathrm{v_1v_2}) = \{1\}$، $f(\mathrm{v_2v_3}) = f(\mathrm{v_4v_5}) = \emptyset$ و $f(\mathrm{v_3v_4}) = \{2\}$ تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{\mathrm{er2}}(\mathrm{T}) \le \gamma_{\mathrm{er2}}(T') + 2$. حال $S = S' \cup \{v_1, \mathrm{v_2}\}$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 2$. با استفاده

از فرض استقرا
$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2 \le a(T') + 2 \le a(T).$

حالت ۴،۴. مسیری مانند $xyzwv_5$ در T موجود است به طوری که $w \neq v_6$، $d_T(x)=1$ و $d_T(y)= d_T(z)= d_T(w)=2$. $T' = T - T_{v_4}$ در نظر می‌گیریم. به راحتی می‌توان مشاهده کرد، f تابع-$\gamma_{er2}(T')$ موجود است به طوری که $\bigcup_{u\in N_{v_5}(T')} f(uv_5) \neq \emptyset$. می‌توانیم فرض کنیم $\{1\} \subseteq \bigcup_{u\in N_{v_5}(T')} f(uv_5)$. در این صورت f تابع-$\gamma_{er2}(T')$ را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به وسیله قرار دادن $f(v_1v_2) = \{1\}$، $f(v_2v_3) = f(v_4v_5) = \emptyset$ و $f(v_3v_4) = \{2\}$ تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2$. حال $S = S' \cup \{v_1, v_2\}$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 2$. با استفاده از فرض استقرا
$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 2 \le a(T') + 2 \le a(T).$
بنابراین $d_T(v_2)= d_T(v_3)= d_T(v_4)= d_T(v_5)=2$ و $d_T(v_1)=1$. در این‌صورت یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

حالت ۱. $d_T(v_6) \ge 3$.
$T' = T - T_{v_5}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت هر f تابع-$\gamma_{er2}(T')$ را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به وسیله قرار دادن $f(v_1v_2) = f(v_5v_6) = \{1\}$، $f(v_2v_3) = f(v_4v_5) = \emptyset$ و $f(v_3v_4) = \{2\}$ تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 3$. اگر $v_6 \in S'$، آنگاه $S = (S' - \{v_6\}) \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ در نظر گرفته و اگر $v_6 \notin S'$، آنگاه $S = S' \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 3$. با استفاده از فرض استقرا
$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 3 \le a(T') + 3 \le a(T).$

حالت ۲. $d_T(v_6) = 2$.
$T' = T - T_{v_2}$ در نظر می‌گیریم. چون به ازای هر f تابع-$\gamma_{er2}(T')$، $|f(v_3v_4)| + |f(v_4v_5)| + |f(v_5v_6)| \ge 2$، بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم $\{1\} \subseteq f(v_3v_4)$. در این صورت f تابع-$\gamma_{er2}(T')$ را می‌توان به یک $E2RDF$ از T به وسیله قرار دادن $f(v_1v_2) = \{2\}$ و $f(v_2v_3) = \emptyset$ تعمیم داد. بنابراین $\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 1$. حال $S = S' \cup \{v_1\}$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه $a(T) \ge a(T') + 1$. با استفاده از فرض استقرا
$\gamma_{er2}(T) \le \gamma_{er2}(T') + 1 \le a(T') + 1 \le a(T).$
در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله رابطه بین عدد احاطه‌ای یالی ۲-رنگین کمان و عدد پوچساز در درخت‌ها را بررسی کرده و نشان داده شد برای هر درخت T از مرتبه $n \ge 2$، $\gamma_{er2}(T) \le a(T)$.

فهرست منابع

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, MacMillan, New York, 1976.

[2] H. Abdollahzadeh Ahangar, H. Jahani and N. Jafari Rad, Rainbow edge domination numbers in graphs, submitted.

[3] J. Amjadi, S. Kosari, A. Parnian, S.M. Sheikholeslami and L. Volkmann, The k-rainbow edge domination number of a graph, (submitted).

[4] J. Amjadi, An upper bound on the double domination number of trees, Kragujevac J. Math. 39 (2015) 133-139.

[5] N. Dehgardi, S. Norouzian and S. M. Sheikholeslami, Bounding the domination number of a tree in terms of its annihilation number, *Trans. Comb.* **2** (2013) 9–16.

[6] N. Dehgardi, S. M. Sheikholeslami and A. Khodkar, Bounding the rainbow domination number of a tree in terms of its annihilation number, *Trans. Comb.* **2** (2013) 21–32.

[7] N. Dehgardi, S. M. Sheikholeslami and A. Khodkar, Bounding the paired-domination number of a tree in terms of its annihilation number, *Filomat.* **28** (2014) 523–529.

[8] W. J. Desormeaux, T. W. Haynes and M. A. Henning, Relating, Relating the annihilation number and the total domination number of a tree, *Discrete Appl. Math.* **161** (2013) 349-354.

[9] C. E. Larson and R. Pepper, Graphs with equal independence and annihilation numbers, *The electronic journal of combinatorics*, **18** (2011) #P180.

[10] R. Pepper, On the annihilation number of a graph, Recent Advances In Electrical Engineering: *Proceedings of the 15th American Conference on Applied Mathematics* (2009) 217–220.