دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره نهم، بهار ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۰۱۶۹-۱۶۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مثلث‌های متشابه و ردپایی دیگر از نسبت طلایی

علی‌اصغر رضائی [*۱]، مرتضی اشراقی نائینی [۲]

[۱و ۲] گروه ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۰۸   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۰۵

چکیده

در این مقاله مثلث‌های متشابهی را بررسی می‌کنیم که قابل انطباق نیستند، اما دارای دو ضلع قابل انطباق‌اند. نشان می‌دهیم که نسبت تشابه چنین مثلث‌هایی اکیداً کوچک‌تر از عدد طلایی است. در صورتی که مثلث‌های مذکور قائم‌الزاویه باشند، ثابت می کنیم که نسبت تشابه آنها دقیقاً جذر نسبت طلایی است.

واژه‌های کلیدی: مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه، نسبت طلایی، هندسه‌ی اقلیدسی.

*. عهده دار مکاتبات: E-mail: a_rezaei@kashanu.ac.ir

مقدمه

این مقاله قرار نیست در مورد نسبت طلایی و قصه‌ی پر رمز و راز آن باشد. بلکه هدف، طرح یک مساله‌ی هندسی و بررسی پاسخ‌های جالب آن است. با وجود این در خلال بحث، نسبت طلایی بی هیچ دعوتی نمایان خواهد شد و علت نامگذاری عنوان مقاله نیز همین است. ای‌ن ظهور ناگهانی نسبت طلایی، در بحث‌های به ظاهر نامربوط دیگری نیز رخ داده است، برای مثال در بدست آوردن تابع مولد دنباله‌ی فیبوناچی مربوط به زاد و ولد خرگوش‌ها.

عکاسی در جهان‌هایی امکان پذیر است که تشابه معنی داشته باشد. برای مثال در یک دنیای اقلیدسی که وجود اشکال متشابه، امری بدیهی است، چنین چیزی شدنی است. مطابق انتظار، همه چیز زیر سر اصل توازی است. ریاضیدان انگلیسی والیس تلاش کرد که اصل توازی را با استفاده از اصلی که امروزه به اصل والیس مشهور است ثابت کند. طبق اصل والیس "مثلث‌های متشابهی وجود دارند که قابل انطباق نیستند". بعدها ثابت شد که اصل والیس با اصل توازی معادل است. به عبارت دیگر در هر هندسه‌ای که اصل توازی برقرار نباشد، اصل والیس هم برقرار نیست. برای مثال چون در هندسه‌ی اقلیدسی نقیض اصل توازی به عنوان اصل در نظر گرفته می‌شود لذا دو مثلث فقط و فقط در صورتی متشابه‌اند که قابل انطباق باشند.

در این مقاله مثلث‌هایی را بررسی می‌کنیم که سه جفت زاویه‌ی قابل‌انطباق و دو جفت ضلع قابل‌انطباق دارند. در هندسه‌ی اقلیدسی چنین مثلثهایی متشابه‌اند و ممکن است قابل انطباق نباشند، اما در هندسه‌ی هذلولوی که تشابه دو مثلث با قابل انطباق بودن آنها معادل است، مثلث‌های مذکور قطعاً قابل انطباق‌اند. بنابراین بحث‌های این مقاله به هندسه‌ی اقلیدسی مربوط است و نه هندسه‌ی هذلولوی. هدف این است که ببینیم چنین مثلث‌هایی حداکثر چقدر اختلاف بزرگی دارند یا به عبارتی نسبت تشابه آنها حداکثر چه عددی است. در جستجوی پاسخ این سوال است که ردپایی از عدد طلایی نمایان خواهد شد.

۱. بحث اصلی

در هندسه‌ی نتاری (ذاتی) یا به عبارتی هندسه‌ی بدون بنداشت توازی، محک "ض‌زض" برای قابلیت انطباق مثلث‌ها به عنوان یک بنداشت بدون اثبات در نظر گرفته می‌شود و سایر محک‌ها نظیر "زض‌ز" و "ض‌ض‌ض" با استفاده از آن و دیگر بنداشت‌ها و احکام به‌دست می‌آیند. نکته‌ی مهم در محک‌های "ض‌زض" و "زض‌ز"، تناظر اضلاع و زوایا است. برای مثال حالت "زض‌ز" در مورد دو زاویه و ضلع بین آنهاست، نه دو زاویه و یک ضلع دلخواه از مثلث. سوال زیر در نگاه نخست ممکن است فریبنده باشد:

سوال ۱: فرض کنید سه زاویه و دو ضلع از مثلثی با سه زاویه و دو ضلع از مثلثی دیگر قابل انطباق باشند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث قابل انطباق‌اند؟

جواب مساله همچنان که خواهیم دید منفی است. شکل مساله اما به گونه‌ای است که ممکن است خواننده به سمت یکی از حالت‌های "ض‌زض" یا "زض‌ز" منحرف شود و چنین استدلال کند که دو مثلث قابل انطباق‌اند. آنچه در صورت محک‌های یاد شده برای قابل انطباق بودن مثلث‌ها نهفته است، تناظر اضلاع و زوایاست که در سوال فوق چنین چیزی قید نشده است. توجه کنید که چون در سوال گفته شده زوایای دو مثلث قابل انطباق‌اند، لذا دو مثلث متشابه‌اند. به عنوان مثالی که در شرایط سوال۱ صدق کند دو مثلث را در نظر بگیرید که اضلاع آنها به ترتیب سه‌تایی‌های مرتب $(a,b,c)=(12,18,27)$ و $(a',b',c')=(8,12,18)$ باشند. این دو مثلث قابل انطباق نیستند و نسبت تشابه آنها $3/2$ است:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{3}{2}.$$

مثال دیگر مثلث‌هایی با اضلاع $(1,\sqrt{2},2)$ و $(\frac{1}{\sqrt{2}},1,\sqrt{2})$ است که نسبت تشابه آنها $\sqrt{2}$ است. می‌توان مثلث‌های بیشمار دیگری را مثال زد که در شرایط سوال۱ صدق کنند و قابل انطباق نباشند. اما بحث اصلی در مورد نسبت تشابه دو مثلث این‌چنینی است.

سوال ۲: آیا دو مثلث غیرقابل انطباق با ویژگی‌های گفته شده در سوال۱، هر نسبت تشابهی می‌توانند داشته باشند؟

در دو مثال فوق نسبت‌های تشابه$3/2$ و $\sqrt{2}$ هستند. قرار داد می‌کنیم که در نوشتن نسبت‌ها، اضلاع مثلث بزرگتر در

صورت و اضلاع مثلث کوچکتر در مخرج کسرها قرار گیرند، یعنی نسبت تشابه را بزرگتر از ۱ در نظر می‌گیریم. سوال۲ می گوید که آیا هر عدد بزرگتر از یک می‌تواند نسبت تشابه دو مثلث با ویژگی‌های گفته شده در سوال۱ باشد؟
جواب این سوال نیز منفی است. برای مثال نشان می‌دهیم که نسبت تشابه نمی‌تواند عدد ۲ باشد. اگر (a,b,c) و (a',a,b) بیانگر اضلاع دو مثلث مورد نظر باشند که به ترتیب صعودی نوشته شده‌اند و داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=2,$$

آنگاه $b=2a$. از طرفی چون $a\le b\le c$، این سه عدد در صورتی اضلاع یک مثلث‌اند که $c<a+b$. اما $a+b=3a$، بنابراین $c<3a$. باتقسیم طرفین این نامساوی بر عدد مثبت b داریم:

$$\frac{c}{a}<\frac{3a}{b},$$

و چون $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ و $\frac{c}{b}=2$، از نامساوی فوق نتیجه می‌شود $2<3/2$ که تناقض است.
با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که اعداد بزرگتر از ۲ نیز نمی‌توانند نسبت تشابه دو مثلث با شرایط گفته شده باشند. یعنی عدد ۲ یک کران بالا برای نسبت تشابه مثلث‌های مذکور است.

سوال۳: اگر $1<t<2$ نسبت تشابه مثلث‌های گفته شده در سوال۱ باشد، t حداکثر چه عددی است؟
بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنیم $(1,t,t^2)$ اضلاع مثلث بزرگتر و $(\frac{1}{t},1,t)$ اضلاع متناظر مثلث کوچک‌تر باشند، یعنی

$$\frac{1}{1/t}=\frac{t}{1}=\frac{t^2}{t}=t.$$

چون سه عدد $1<t<t^2$ اضلاع یک مثلث‌اند و t^2 بزرگترین ضلع است لذا باید داشته باشیم $t^2<t+1$، یا به عبارتی $t^2-t-1<0$. با تعیین علامت چندجمله‌ای t^2-t-1 مشخص می‌شود که این چند جمله‌ای در بازه‌ی $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ منفی است. چون t را بزرگ‌تر از ۱ گرفته بودیم لذا نسبت تشابه مثلث‌های یاد شده باید در بازه‌ی $\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ باشد. به عبارت دیگر نسبت طلایی، سوپریمم مقادیری است که t می‌تواند اختیار کند.
بحث فوق را می‌توان برهان قضیه‌ی زیر نیز تلقی کرد.

قضیه۱. به ازای هر $1<t<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$، دو مثلث متشابه با نسبت تشابه t وجود دارند که دو ضلع از یکی با دوضلع از دیگری قابل انطباق است. اگر t بزرگ‌تر از نسبت طلایی باشد، چنین مثلث‌هایی وجود ندارند.
بحث آخر در مورد نوع مثلث‌های مورد بحث است. با توجه به اینکه نسبت تشابه را بزرگتر از یک گرفته‌ایم و اضلاع مثلث بزرگ‌تر به‌صورت $1<t<t^2$ هستند، لذا چنین مثلث‌هایی نه متساوی‌الاضلاع‌اند نه متساوی‌الساقین. در مورد قائم‌الزاویه بودن چه می‌توان گفت؟ در جستجوی پاسخ این سوال نیز ردپایی از نسبت طلایی ظاهر می‌شود: اگر مثلث‌های مورد نظر قائم‌الزاویه باشند آنگاه با توجه به اینکه وتر بزرگترین ضلع است، از رابطه‌ی فیثاغورث نتیجه می‌شود $(t^2)^2=(t)^2+1.$

ریشه‌ی مثبت این معادله عدد $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ است که برابر با جذر نسبت طلایی است. بنابراین قضیه زیر نیز اثبات می‌شود.

قضیه۲. اگر T_1 و T_2 دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متشابه و غیر قابل انطباق باشند که دوضلع از T_1 با دو ضلع از T_2 قابل انطباق باشد، آنگاه نسبت تشابه آنها دقیقاً جذر نسبت طلایی است.

اگر نسبت تشابه بین یک و عدد $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ باشد، مثلث‌های مورد بحث زوایایی کمتر از قائمه دارند و اگر نسبت تشابه بین $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ و نسبت طلایی باشد، مثلث‌های مذکور دارای زاویه‌ی منفرجه می‌باشند.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب تشکر خود را از دانشگاه کاشان به خاطر حمایت مالی از این اثر در قالب پژوهانه به شماره ۵۷۲۷۶۷ ابراز می‌دارند.

فهرست منابع

1. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, 3rd ed. San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1994.

2. Johnson, Roger A. Advanced euclidean geometry. Courier Corporation, 2013.

3. Katz, Victor J. History of mathematics. Pearson, 2014.

4. Pressley, A. Elementary Differential Geometry, Springer-Verlag, 2001.

5. Rosenfeld, Boris A. A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space. Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2012.