

مدل تصمیم‌گیری سازشی با استفاده از روش‌های TOPSIS و VIKOR به‌طور همزمان برای مسایل برنامه‌ریزی چند هدفه غیرخطی با مقیاس بزرگ و ساختار بلوکی زاویه‌دار در محیط فازی

بهنام وحدانی^{۱*}، مقداد سلیمی^۲، توفیق الهویرنلو^۳

^(۱) استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران

^(۲) کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، ایران

^(۳) استاد، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۲/۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۶/۱۱

چکیده

در این مقاله به بررسی روشی برای حل مسائل چند هدفه مقیاس بزرگ غیر خطی با ساختار بلوکی زاویه‌دار با وجود عدم قطعیت در توابع هدف و محدودیت‌ها می‌پردازیم که در آن ضرایب توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی مطرح می‌گردند. در این روش ابتدا با به کارگیری منطق تجزیه دانتزیگ- وولف، مساله اصلی را به چندین زیر مساله با متغیرهای مستقل از سایر زیر مساله‌ها، تجزیه می‌کنیم. در روش ارائه شده از یک روش سازشی بر اساس روش‌های TOPSIS و VIKOR به‌طور همزمان برای هر یک از مسائل تجزیه شده استفاده گردیده است. به عبارت دیگر در مدل ارائه شده از یک طرف از مزیت روش TOPSIS در تعریف توابعی که فاصله از مقادیر ایده‌آل مثبت را حداقل و فاصله از ایده‌آل منفی را حداکثر می‌نماید بهره گرفته شده است. و از طرف دیگر با ارائه توابعی میانگین تاسف و حداکثر مقدار تاسف لحاظ گردیده و سپس در تابع هدف نهایی این مقادیر تاسف به حداقل مقدار خود رسیده است. با استفاده از این تکنیک مسائلی که غیر محدب باشند نیز قابل بررسی و حل می‌باشد. در پایان به منظور هر چه بیشتر روشن‌تر شدن مدل ارائه شده یک مثال آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی چند هدفه غیرخطی، مسائل مقیاس بزرگ، ساختار بلوکی زاویه‌دار، VIKOR، TOPSIS

مقدمه

تصمیم‌گیری از اساسی‌ترین نیازهای هر فرد در برخورد با پدیده‌های دنیای واقعی می‌باشد. برای بهینه نمودن تصمیم‌گیری، یافتن جواب بهینه در قالب مدل‌های ریاضی از اهمیت زیادی برخوردار است. بسیاری از مدل‌های ریاضی تصمیم‌گیری شرط خطی بودن را ندارند. به عبارت دیگر در بسیاری از مواقع با مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی مواجه ایم که روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی در خیلی از مواقع برای حل مسائل غیرخطی کارایی ندارد. غیرخطی بودن متغیرها ممکن است در توابع هدف یا محدودیت‌ها و یا همزمان در هر دوی آنها اتفاق بیفتد. بسیاری از روش‌هایی که برای حل مسائل غیرخطی مطرح می‌گردند تنها قادر به یافتن یک جواب بهینه محلی می‌باشند. به عبارت دیگر جواب حاصل از حل این روش‌ها لزوماً همان جواب بهینه سراسری نمی‌باشد. بنابراین در بسیاری از شاخه‌های علم، وجود روشی که بتوان با حل مدل به کمک آن به جواب بهینه سراسری نزدیک شد، بسیار ارزشمند به نظر می‌رسد.

علاوه بر این، در بسیاری از موارد همزمان بهینه نمودن چندین هدف مد نظر می‌باشد که در اکثر مواقع این اهداف نسبت به هم در یک راستا نمی‌باشند و یا حتی ممکن است با یکدیگر در تناقض باشند. بدین معنا که جواب بهینه برای حل یک مساله برنامه‌ریزی چند هدفه وجود ندارد، چرا که بهینه شدن یکی از اهداف موجب بدتر شدن اهداف دیگر می‌شود. با توجه به این واقعیت به دنبال یافتن پاسخی می‌باشیم که نقطه‌ای ایده‌آل همزمان برای همه اهداف باشد.

علاوه بر این در بسیاری از موارد شمار فاکتورهایی که مساله براساس آنها مدل‌سازی شده است، از مقیاس بزرگی می‌باشد. بنابراین با یک مساله مقیاس بزرگ برنامه‌ریزی مواجه ایم. تعداد متغیرهای مورد بحث در تصمیم‌گیری گاه‌آنانقدر زیاد است که در روند محاسبات و تصمیم‌گیری اخلاص ایجاد نموده و یا حداقل تعداد محاسبات بسیار زیاد خواهد بود و روند پیچیده‌ای برای بدست آوردن جواب بهینه طی خواهد گردید و زمان حل آن نیز طولانی خواهد شد. در این گروه از مسائل بدست آوردن جواب موثر در زمان کوتاه و از روش‌های ساده و

معمولی امکان‌پذیر نمی‌باشد. همچنین یافتن میزان وابستگی فاکتورهای موثر در مدل به راحتی قابل محاسبه نمی‌باشد. اما خوشبختانه تعداد بسیار زیادی از این مسائل دارای ساختارهایی می‌باشند که فرایند حل این گونه مسائل را تسهیل می‌کنند. یکی از این گروه‌ها خانواده مسائل برنامه‌ریزی مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه دار می‌باشد. مسائل با ساختار بلوکی زاویه دار که به آنها مسائل چند بخشی نیز گفته می‌شود، بیانگر وضعیت شرکت‌های بزرگی است که تعدادی شرکت‌های فرعی تحت پوشش با بخش‌های مختلف و نسبتاً مستقل از هم دارند. از آنجا که هر یک از بخش‌های شرکت صرفاً به دنبال بهینه کردن عملیات مربوط به خود است، لذا مساله تقریباً به چند مساله فرعی تجزیه می‌گردد. در این فرایند تجزیه، ضرایب محدودیت‌های مستقل هر یک از شرکت‌های زیر مجموعه شرکت اصلی را یک بلوک می‌نامند. علاوه بر محدودیت‌های مستقل تعدادی محدودیت مشترک نیز می‌تواند وجود داشته باشد. برای حل این مسائل از الگوی تجزیه دانتزیگ- وولف استفاده می‌گردد. الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف غالباً توانایی حل مسائل بزرگ را داراست و هنگامی که که ماتریس ضرایب در محدودیت‌ها دارای ساختار خاص زاویه‌ای باشد این کارایی افزایش می‌یابد. الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف از تغییر متغیرهای تصمیم و تبدیل مساله مدل‌سازی شده به مساله ای جدید که تنها شامل محدودیت‌هایی است که این محدودیت‌ها تقریباً شامل تمامی متغیرها می‌باشد. لذا با کاهش تعداد محدودیت‌ها، مساله با تعداد تکرارهای کم‌تری نسبت به مساله اولیه حل خواهد شد.

استفاده از روش‌های سازشی تصمیم‌گیری یکی از کاراترین روش‌ها برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه بر مبنای یک جواب سازشی می‌باشد. در روش‌های سازشی که بیشتر به روش‌های VIKOR و TOPSIS نسبت داده می‌شود، میزان ارزشمندی جواب‌ها به میزان نزدیکی آنها به جواب ایده‌آل مثبت و میزان دوری آنها از جواب ایده‌آل منفی یا میزان دوری نسبت به میزان تاسف بستگی دارد. روش‌های سازشی به عنوان روش‌هایی برای رتبه‌بندی آترناتیوها در مسائل MADM مطرح

سازشی بر مبنای روش‌های VIKOR و TOPSIS به طور همزمان برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه غیرخطی مقیاس بزرگ در محیط‌های فازی با دارا بودن ساختار بلوکی زاویه‌دار استفاده نمود، سوالی است که در این مقاله به آن پاسخ داده می‌شود.

مرور ادبیات

در این قسمت به بررسی ادبیات و کارهای انجام شده در زمینه مطالب مرتبط با این مقاله تا به حال می‌پردازیم: مدل‌های تصمیم‌گیری می‌توانند در انتخاب مسیر صحیح جهت نزدیک شدن به جواب بهینه بسیار موثر باشند. یکی از انواع مدل‌های تصمیم‌گیری مدل‌های سازشی می‌باشند که بر اساس تئوری مطلوبیت برنامه‌ریزی شده‌اند. در بسیاری از مسائل مدیریت و مهندسی صنایع همزمان بهینه نمودن چندین هدف با در نظر گرفتن محدودیت‌های چند گانه مد نظر می‌باشد. در حل مدل‌های برنامه‌ریزی چند هدفه به دنبال پاسخی می‌گردیم که همزمان برای همه اهداف ایده‌آل باشد [۲ و ۱]. پیش فرض اصلی در تئوری مطلوبیت این است که تصمیم‌گیرنده آلترناتیوی را انتخاب می‌کند که حداکثر مطلوبیت را برایش داشته باشد. برای این منظور روش برنامه‌ریزی سازشی مطرح گردید. مبنای این روش، حداقل نمودن بردار ارزیابی آلترناتیوها از نقطه ایده‌آل مثبت است. (یعنی انتخابی که برای تصمیم‌گیرنده بیشترین مطلوبیت را داشته باشد) مزیت اصلی این روش سادگی ساختار مفهومی آن است [۶]. روش تصمیم‌گیری سازشی با توجه به مفهوم آن بیشتر به روش‌های VIKOR و TOPSIS اطلاق می‌گردد.

روش تاپسیس اولین بار توسط هوانگ و یون در سال ۱۹۸۱ به عنوان یک روش تصمیم‌گیری سازشی بر مبنای حداقل نمودن بردار ارزیابی آلترناتیوها از نقطه ایده‌آل مثبت و حداکثر نمودن آن از نقطه ایده‌آل منفی مطرح گردید [۳]. به دنبال آن روش TOPSIS برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه به کار گرفته شد [۴]. نوع گسترش یافته تاپسیس تحت عنوان روش تاپسیس گروهی توسط چن در سال ۲۰۰۰ مطرح گردید. [۵].

می‌باشند ولی در این پژوهش می‌خواهیم با استفاده از همین مفهوم در نزدیکی به جواب ایده‌آل از روش‌های تصمیم‌گیری سازشی در نزدیک شدن به جواب بهینه در مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه MODM بهره‌گیریم. می‌توانیم همزمان با استفاده از منطق روش تجزیه دانتزیگ- وولف و روش تصمیم‌گیری سازشی به‌طور همزمان، یک روش برای حل مسائل چند هدفه مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه دار که در آن برخی از توابع هدف یا محدودیت‌ها به صورت غیر خطی می‌باشند، ارائه نماییم. همچنین شمار زیادی از پروژه‌های تحقیقاتی برای مدل سازی از داده‌هایی استفاده می‌کنند که به صورت مقادیر قطعی مطرح می‌شوند. در حالی که در برخورد با بسیاری از مسائل دنیای واقعی نمی‌توان داده‌ها را به صورت دقیق مطرح نمود. به عبارت دیگر غیر قطعی بودن داده‌ها یکی از ویژگی‌های اساسی در محیط بهینه سازی می‌باشد. یکی از کاراترین ابزار برای تبیین مفهوم عدم قطعیت، منطق فازی می‌باشد. این شاخه از علم که توسط پرفسور لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۰ مطرح گردید، در خیلی از مسائل بهینه سازی مورد استفاده قرار گرفته است. چنانچه مسئله با داده‌های فازی مطرح باشد، تمام مراحل و فاصله‌ها نیز در حالت فازی محاسبه می‌گردند.

اگر چه از روش‌های VIKOR و TOPSIS برای حل این گونه مسائل برای داده‌های قطعی و صرفاً برای مسائل محدب استفاده گردیده است ولی استفاده همزمان از روشی که بتوان همزمان از روش VIKOR و TOPSIS به عنوان دو تا از روش‌های تصمیم‌گیری سازشی برای مسائل فازی غیر محدب در فضای غیرقطعی بهره گرفت، از اهمیت زیادی برخوردار است. چرا که با استفاده از روش TOPSIS توابعی تعریف می‌گردند که میزان دوری و نزدیکی به ایده‌آل‌ها را تعیین می‌کنند. همچنین در روش VIKOR نیز توابعی مطرح می‌گردند که میانگین تاسف و ماکزیمم تاسف را تعیین می‌کنند. حال اگر بتوان روشی ارائه کرد که همزمان از منطق هر دو روش بهره‌گیرد از اهمیت زیادی برخوردار است. اینکه آیا می‌توان از یک روش تصمیم‌گیری

روبرو می‌باشیم. میزان پیچیدگی در چنین مسائلی به خصوص در حالت غیر خطی بسیار زیاد می‌باشد. اما خوشبختانه دسته بسیار بزرگی از این مسائل دارای ساختارهای ویژه‌ای می‌باشند که می‌توان از روش‌های حل خاص برای آنها استفاده نمود. یکی از اعضای این خانواده دسته خاصی است که به ساختار بلوکی زاویه دار مشهورند [۱ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵]. Wolfe و Dantzig در سال ۱۹۶۱ یک روش تجزیه را برای حل مسائل با ساختار بلوکی زاویه دار ارائه نمودند [۱۴]. این روش تجزیه سپس برای حل مسائل مقیاس بزرگ خطی و غیر خطی مورد استفاده قرار گرفت [۱۳ و ۱۶]. هم چنین این روش تجزیه در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی در محیط فازی مورد استفاده قرار گرفت [۱۷]. الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف غالباً توانایی حل مسائل بزرگ را داراست و هنگامی که که ماتریس ضرایب در محدودیت‌ها دارای ساختار خاص زاویه‌ای باشد این کارایی افزایش می‌یابد [۱۸ و ۱۹]. الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف از تغییر متغیرهای تصمیم و تبدیل مساله مدل سازی شده به مساله‌ای جدید که تنها شامل محدودیت‌هایی است که این محدودیت‌ها تقریباً شامل تمامی متغیرها می‌باشد. لذا با کاهش تعداد محدودیت‌ها، مساله با تعداد تکرارهای کم‌تری نسبت به مساله اولیه حل خواهد شد [۲۰ و ۲۱ و ۲۲].

با توجه به مرور مطالب بررسی شده معلوم می‌گردد که شمار زیادی از پژوهش‌های انجام گرفته در حالتی مطرح گردیده‌اند که داده‌های مساله به صورت کاملاً قطعی در نظر گرفته شده‌اند. در حالی که غیر قطعی بودن یکی از ویژگی‌های اساسی داده‌ها در برخورد با مسائل دنیای واقعی می‌باشد. در بسیاری از شاخه‌های علم کاربرد جنبه‌های غیر قطعی بسیار چشمگیر می‌باشد [۲۳ و ۲۴]. منطق فازی یکی از بهترین ابزارها برای تبیین مفهوم عدم قطعیت می‌باشد. مفهوم مجموعه‌های فازی که توسط پرفسور لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید، با موضوع مباحث تصمیم‌گیری ترکیب گردید و در نتیجه الگوریتم‌های تصمیم‌گیری فازی مطرح گردیدند [۲۴ و ۲۵]. همچنین روش‌های سازشی تصمیم‌گیری در محیط‌های فازی نیز مطرح گردید [۲۶ و ۲۷]. دهه ۱۹۶۰

علاوه بر این روش TOPSIS برای حل مسائل تصمیم‌گیری با پارامترهای فازی نیز به کار گرفته شد. (همچنین از این روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه پویا استفاده گردید [۶]. اصل پایه‌ای تاپسیس انتخاب گزینه‌ای با کوتاه‌ترین فاصله از ایده‌ال مثبت و بیشترین فاصله از ایده‌ال منفی است. تاپسیس دو نقطه ارجاع را ارائه می‌کند.

یک دیگر از مفاهیم به کار رفته در این مقاله مفهوم برنامه‌ریزی غیر خطی می‌باشد. در بسیاری از مسائل مدل‌سازی توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت غیرخطی مطرح می‌گردد. در سال ۱۹۶۲ کارپنر اولین کسی بود که فرمول برنامه‌ریزی غیر خطی را برای مساله پخش بار اقتصادی معرفی کرد [۷]. به دنبال آن در سال ۱۹۶۸ دومل و تینی روش برنامه‌ریزی غیر خطی برای کمینه نمودن هزینه سوخت و تلفات توان حقیقی را با استفاده از رهیافت توابع جریمه ابداع کردند [۸]. در سال ۱۹۷۰ ساسون روش نیوتن رافسون رات به گونه‌ای گسترش داد که همگرایی آن افزوده گردد [۹]. مورو و همکاران در سال ۱۹۹۸ یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی در خصوص پالایش فرآورده‌های دیزلی ارائه دادند [۱۰]. منگلانگ و همکارانش در سال ۲۰۱۰ روشی تقریبی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیر محدب ارائه نمودند [۱۱]. برنامه‌ریزی غیرخطی را برای جواب‌های بدست آمده از یک مساله برنامه‌ریزی غیر خطی می‌تواند جواب بهینه سراسری (global) و یا بهینه محلی (local) باشند. برای اینکه در یک مساله غیر خطی همزمان جواب سراسری و محلی یکی باشند در این صورت باید مساله شرایط محدب بودن را داشته باشد. به عبارت دیگر تمامی الگوریتم‌هایی که اگر بخواهیم برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به کار می‌روند تنها در شرایطی جواب بهینه غیر قطعی را تضمین می‌کنند که مساله محدب باشد. به عبارت دیگر محدب بودن مساله برنامه‌ریزی غیرخطی همان شرط کافی بودن شرایط کان تاکر می‌باشد [۱۲].

در برخورد با خیلی از مسائل دنیای واقعی تعداد فاکتورهای موثر در تصمیم‌گیری بسیار زیاد می‌باشد. به عبارت دیگر در چنین مواردی با مسائل مقیاس بزرگ

مراحل کلی روش سازشی تصمیم‌گیری ارائه شده توسط وحدانی و همکاران به شرح ذیل می‌باشد [۳۱].

گام ۱: ساخت ماتریس تصمیم، درایه‌های این ماتریس تصمیم در حالت کلی می‌تواند به صورت قطعی یا فازی مطرح گردد. همچنین نظر خبرگان می‌تواند به صورت گروهی در قالب ماتریس زیر مطرح گردد.

$$D = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1(k-1)} & \tilde{x}_{1k} & \dots & \tilde{x}_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2(k-1)} & \tilde{x}_{2k} & \dots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{m(k-1)} & \tilde{x}_{mk} & \dots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

که در آن مقادیر ماتریس تصمیم‌گیری همان مقدار نسبت داده شده به آلترناتیو i -ام نسبت به شاخص j -ام می‌باشد.

گام ۲: کلیه نظرات گرفته شده از L خبره را ادغام نموده و برای هر یک از آلترناتیوها نسبت به هر یک از شاخص‌ها یک نظر یکپارچه به جای چندین نظر مطرح می‌گردد.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L a_{ijl} \\ b_{ij} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L b_{ijl} \\ c_{ij} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L c_{ijl} \end{aligned} \quad (1)$$

همچنین وزن‌های ادغام شده خبرگان در مورد هر آرایه نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} w_{j1} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_{jl1} \\ w_{j2} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_{jl2} \\ w_{j3} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_{jl3} \end{aligned} \quad (2)$$

گام ۳: تبدیل ماتریس تصمیم‌گیری موجود، به یک ماتریس "بی‌مقیاس شده".

۱-۳- اگر داده‌های مساله به صورت قطعی مطرح شده باشند در این صورت نرمالایز کردن به صورت زیر صورت می‌پذیرد.

$$j = 1, 2, \dots, k-1. \quad i = 1, 2, \dots, m$$

را می‌توان دهه آغازین تئوری فازی نامید. منطق فازی یا Fuzzy Logic برای اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط دکتر لطفی‌زاده، دانشمند ایرانی‌تبار و استاد علوم کامپیوتری دانشگاه برکلی کالیفرنیا (Berkeley)، ابداع شد. ولی نخستین بار در پی تنظیم نظریه مجموعه‌های فازی به وسیله پروفیسور لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۵ در صحنه محاسبات نو ظاهر شد [۲۴ و ۲۵].

ضرایب مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه نیز می‌تواند فازی باشد. در این صورت با همان تکنیک دیفازی کردن هر یک از مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه را می‌توان قطعی نمود. و سپس با روش‌های حل برنامه‌ریزی چند هدفه می‌توان آن‌را حل نمود [۲۸]. با وجود وجود روش‌های مختلف در حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه فازی به نظر می‌رسد که چنانچه با اعداد فازی مثلثی مواجه باشیم در این صورت به علت سادگی از روش قطعی سازی که ترابی و همکارانش در مورد مسائل خطی و غیرخطی به کار برده‌اند، استفاده می‌گردد [۲۹].

در سال‌های اخیر برخی روش‌های سازشی تصمیم‌گیری با شاخص‌های چند گانه برای حل مسائل مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه دار به کار رفته‌اند [۳۰ و ۳۱]. از جمله این روش‌ها، روش تاپسیس می‌باشد. روش TOPSIS به منظور حل مسائل مقیاس بزرگ چند هدفه غیرخطی با داده‌های قطعی با ساختار بلوکی زاویه دار به کار گرفته شد [۱]. سپس به منظور استفاده از روش‌های تصمیم‌گیری در مسائل چند هدفه، Abo-Sinna و Abou-El-Enien از این روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی مقیاس بزرگ چند هدفه بهره گرفتند [۳۰].

در پژوهش حاضر نیز به ارائه روشی می‌پردازیم که بتواند با بهره‌گیری از تکنیک‌های تصمیم‌گیری سازشی روش حلی را به منظور یافتن مسیری منطقی در جهت یافتن بهترین جواب برای مسائل مقیاس بزرگ چند معیاره فازی با ساختار بلوکی زاویه‌دار ارائه نماید.

برخی مفاهیم مرتبط

روش تصمیم‌گیری سازشی براساس روش‌های

TOPSIS و VIKOR

$$D = \begin{bmatrix} |\bar{v}_{11} - \bar{v}_1^-| & \dots & |\bar{v}_{1(k-1)} - \bar{v}_{(k-1)}^-| & |\bar{v}_{1k} - \bar{v}_k^-| & \dots & |\bar{v}_{1n} - \bar{v}_n^-| \\ |\bar{v}_{21} - \bar{v}_1^-| & \dots & |\bar{v}_{2(k-1)} - \bar{v}_{(k-1)}^-| & |\bar{v}_{2k} - \bar{v}_k^-| & \dots & |\bar{v}_{2n} - \bar{v}_n^-| \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |\bar{v}_{m1} - \bar{v}_1^-| & \dots & |\bar{v}_{m(k-1)} - \bar{v}_{(k-1)}^-| & |\bar{v}_{mk} - \bar{v}_k^-| & \dots & |\bar{v}_{mn} - \bar{v}_n^-| \end{bmatrix} \quad (11)$$

گام ۷: توابع زیر را به عنوان روابطی از دوری و نزدیکی نسبت به ایده‌آل‌ها تعریف می‌کنیم.

$$\mathfrak{S} = \sum_{j=1}^n w_j d_{ij}^* \quad (12)$$

$$\mathfrak{S}^- = \max_i w_j d_{ij}^* \quad (13)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^n w_j d_{ij}^- \quad (14)$$

$$\xi = \max_i w_j d_{ij}^- \quad (15)$$

$$\tau_i = v \frac{\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_i^*}{\mathfrak{S}_i^- - \mathfrak{S}_i^*} + (1 - v) \frac{\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_i^-}{\mathfrak{S}_i^- - \mathfrak{S}_i^-} \quad (16)$$

$$\eta_i = v \frac{\zeta_i - \zeta_i^*}{\zeta_i^- - \zeta_i^*} + (1 - v) \frac{\zeta_i - \zeta_i^-}{\zeta_i^- - \zeta_i^-} \quad (17)$$

به طوری که:

$$\begin{cases} \mathfrak{S}^* = \min_i \mathfrak{S}_i \\ \mathfrak{S}^- = \max_i \mathfrak{S}_i \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \zeta^* = \max_i \zeta_i \\ \zeta^- = \min_i \zeta_i \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \mathfrak{S}^* = \min_i \mathfrak{S}_i \\ \mathfrak{S}^- = \max_i \mathfrak{S}_i \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \xi^* = \max_i \xi_i \\ \xi^- = \min_i \xi_i \end{cases} \quad (21)$$

گام ۸: رتبه‌بندی گزینه‌ها بر اساس تابع بدست آمده از مقادیر τ_i و η_i .

$$CI_i = \tau_i + \frac{1}{\eta_i} \quad (22)$$

تابع فوق یک تابع کاهشی می‌باشد. بدین معنی که هرچه مقدار تابع کمتر باشد، آترناتیو مورد نظر دارای ارزش بیشتری خواهد بود.

مسائل چند بخشی^۱

یکی از متداول‌ترین انواع مسائل مقیاس بزرگ در برنامه‌ریزی، مسائل چند بخشی می‌باشد که موضوع مورد مطالعه در این پژوهش نیز همین گونه از مسائل می‌باشد. مسائل چند بخشی بیانگر شرکت‌های بزرگی است که

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}} \quad (3)$$

۲-۳- اگر داده‌های مساله به صورت فازی مطرح شده باشند در این صورت نرمالایز کردن به صورت زیر صورت می‌پذیرد.

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{e_j^*}, \frac{b_{ij}}{e_j^*}, \frac{c_{ij}}{e_j^*} \right) \quad (4)$$

$j = k, k+1 \dots n. \quad i = 1, 2 \dots m$

$$e_j^* = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_{ij}^2} \quad (5)$$

گام ۴: ماترسی وزین را محاسبه نمایید. هر یک از عناصر وزین شده به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{w}_j r_{ij} \quad (6)$$

$j = 1, 2 \dots k-1. \quad i = 1, 2 \dots m$

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{w}_j \tilde{r}_{ij} \quad (7)$$

$j = k, k+1 \dots n. \quad i = 1, 2 \dots m$

گام ۵: مشخص نمودن مجموعه ایده‌آل‌های مثبت و ایده‌آل‌های منفی

$$A^* = \{V_1^*, V_2^*, \dots, V_{(K-1)}^*, \tilde{V}_K^*, \dots, \tilde{V}_n^*\} \\ = (\max_i \{v_{ij}\} | j \in J) \quad (8)$$

$$V_j^* = \max_i \{v_{ij}\} \\ A^- = \{V_1^-, V_2^-, \dots, V_{(K-1)}^-, \tilde{V}_K^-, \dots, \tilde{V}_n^-\} \\ = (\min_i \{v_{ij}\} | j \in J) \quad (9)$$

گام ۶: تشکیل ماتریس اندازه فاصله از ایده‌آل‌های مثبت و منفی، ماتریس فاصله از ایده‌آل مثبت در قالب ماتریس زیر مطرح گردیده است:

$$D = \begin{bmatrix} |\bar{v}_{11} - \bar{v}_1^+| & \dots & |\bar{v}_{1(k-1)} - \bar{v}_{(k-1)}^+| & |\bar{v}_{1k} - \bar{v}_k^+| & \dots & |\bar{v}_{1n} - \bar{v}_n^+| \\ |\bar{v}_{21} - \bar{v}_1^+| & \dots & |\bar{v}_{2(k-1)} - \bar{v}_{(k-1)}^+| & |\bar{v}_{2k} - \bar{v}_k^+| & \dots & |\bar{v}_{2n} - \bar{v}_n^+| \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |\bar{v}_{m1} - \bar{v}_1^+| & \dots & |\bar{v}_{m(k-1)} - \bar{v}_{(k-1)}^+| & |\bar{v}_{mk} - \bar{v}_k^+| & \dots & |\bar{v}_{mn} - \bar{v}_n^+| \end{bmatrix} \quad (10)$$

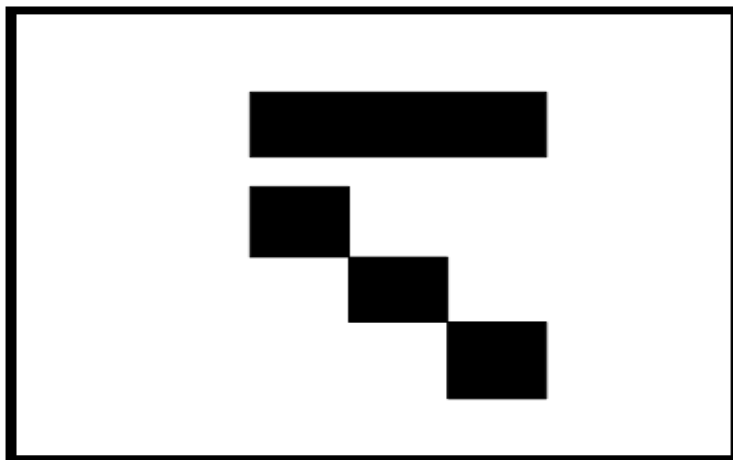
ماتریس فاصله از ایده‌آل منفی در قالب ماتریس زیر مطرح گردیده است:

شکل کلی مسائل چند بخشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max (Min)} Z &= C_1 X^1 + C_2 X^2 + \dots + C_q X^q \\ b_0 &= \begin{array}{r} A_1 X^1 + A_2 X^2 + \dots + A_q X^q \\ D_1 X^1 \qquad \qquad \qquad = b_1 \\ \qquad \qquad D_2 X^2 \qquad \qquad \qquad = b_2 \\ \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad D_q X^q \qquad = b_q \end{array} \end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن مجموعه محدب $S = \{X_j | D_j X_j = b_j, X_j \geq 0\}$ نشان دهنده محدودیت‌های بخش‌های مختلف برای هر یک از مسائل برنامه‌ریزی می‌باشد.

تعدادی شرکت‌های فرعی تحت پوشش با بخش‌های مختلف و نسبتاً مستقل از هم دارند. از آنجا که هر یک از بخش‌های شرکت صرفاً به دنبال بهینه نمودن عملیات مربوط به خود است بنابراین مساله تقریباً به چند مساله فرعی تجزیه می‌شود. اما شرکت مادر به منظور ایجاد هماهنگی، کنترل و اعمال سیاست‌های کلی خود بر شرکت‌ها یا بخش‌های تابعه، منابع و امکانات مشترکی را بین آنها تقسیم می‌کند که این منابع و امکانات در قالب مجموعه محدودیت‌های مشترک در طول برنامه‌ریزی ظاهر می‌شود. در شکل (۱) محدودیت‌های مشترک به شکل مستطیل نشان داده شده است که همه بخش‌های مجزای دیگر را به یکدیگر پیوند می‌دهد. ضرایب هر یک از شرکت‌های تابعه نیز به شکل مربع نشان داده شده است. که به هر یک از آنها یک بلوک گفته می‌شود. به مسائل چند بخشی، مسائل با ساختار بلوکی زاویه دار نیز گفته می‌شود.



شکل ۱- نمایش مساله برنامه ریزی چند بخشی با ساختار بلوکی زاویه دار

مساله مورد بررسی

یک مساله چند هدفه مقیاس بزرگ غیر خطی می‌تواند به صورت زیر مطرح گردد:

$$P: \begin{aligned} \text{Max (Min)} f_1(X, U_1) &= \sum_{j=1}^N f_{1j}(X_j, U_{1j}) \\ \text{Max (Min)} f_2(X, U_2) &= \sum_{j=1}^N f_{2j}(X_j, U_{2j}) \\ &\vdots \\ \text{Max (Min)} f_L(X, U_L) &= \sum_{j=1}^N f_{Lj}(X_j, U_{Lj}) \end{aligned} \quad (24)$$

$$S. t. \quad FS = \begin{cases} \tilde{g}_m(x_1) \leq B_1 & m = 1, 2, \dots, s_1 \\ \tilde{g}_m(x_2) \leq B_2 & m = s_1 + 1, \dots, s_2 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{g}_m(x_N) \leq B_N & m = s_r + 1, \dots, s_M \\ H_i(X) = \sum_{j=1}^N \tilde{h}_{ij}(X_j) \leq B^i & i = 1, 2, \dots, w \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_i(X, U_i) &= U_i C_i X = \\ \sum_{j=1}^N f_{ij}(X_j, U_{ij}) &= \\ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^p U_{ijk} C_{ijk} V_{ijk}(X_j) & \quad (25) \end{aligned}$$

که در آن $V_{ijk}(X_j)$ ، k -امین تابع مربوط به j - امین متغیر در i -امین تابع هدف می‌باشد. که می‌تواند به صورت یک تابع غیر خطی مطرح باشد. همچنین $\tilde{g}_n(x_j) = U_{ij} C_{ij} V_{ij}$ به عنوان n -امین محدودیت مربوط به j - امین متغیر می‌باشد. به همین ترتیب $H_i(X)$ به عنوان یک محدودیت عمومی که می‌تواند همزمان تمامی متغیرها را شامل شود در فضای n متغیره R^n ، می‌باشد.

پارامترهای مدل ارائه شده بصورت زیر می‌باشند:

L تعداد توابع هدف در مساله چند هدفه

q تعداد زیر مساله‌ها

N تعداد متغیرها

N_i مجموعه متغیرهای زیر مساله i -ام و $i=1, 2, \dots, q$

p_i زیر مساله i -ام

P_{itj} تعداد توابع برای رابطه i -ام مربوط به متغیر i -ام برای زیر مساله i -ام.

R مجموعه اعداد حقیقی

C_i یک ماتریس قطری $(N \times N)$ برای تابع i -ام

C_{ijk} یک ماتریس قطری $(N \times N)$ به عنوان ضریب برای تابع k -ام مربوط به متغیر j -ام در تابع i -ام.

C_{ij} یک ماتریس قطری $(N \times N)$ به عنوان ضریب برای محدودیت i -ام مربوط به متغیر j -ام

d_{ij} یک ماتریس قطری $(N \times N)$ به عنوان ضریب برای محدودیت عمومی i -ام مربوط به متغیر j -ام

\tilde{U}_i یک بردار سطری n -بعدی به عنوان ضریب برای تابع هدف i -ام

\tilde{U}_{ij} یک بردار سطری n -بعدی از پارامترهای فازی به عنوان ضریب برای تابع هدف i -ام مربوط به متغیر j -ام

\tilde{U}_{ijk} یک بردار سطری n -بعدی از پارامترهای فازی برای تابع k -ام مربوط به متغیر j -ام در تابع i -ام.

W تعداد محدودیت‌های عمومی (محدودیت‌هایی که می‌تواند شامل تمامی متغیرها باشد) در فضای R^N

M تعداد محدودیت‌های

S_i تعداد محدودیت‌ها برای متغیر i -ام

\tilde{B} بردار S_i -بعدی سمت راست برای محدودیت عمومی

\tilde{B}_j بردار S_i -بعدی سمت راست برای محدودیت عمومی برای زیر مساله i -ام و $i=1, 2, \dots, q$

که در آن $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ یک بردار تصمیم گیری N -بعدی می‌باشد. همچنین $f_i(X, U_i)$ ، $i=1, 2, \dots, L$ تابع هدف i -ام می‌باشد. در این مدل فرض شده است که توابع هدف به فرم تفکیک پذیر می‌باشند. خاطر نشان می‌گردد که تمام یا تعدادی از توابع هدف یا توابع در محدودیت‌ها می‌توانند به صورت غیر خطی و حتی غیر محدب مطرح گردند. یک مساله مقیاس بزرگ غیرخطی با ساختار بلوکی زاویه دار با ضرایب فازی می‌تواند طبق الگوریتم دانتریگ- وولف به

مساله با دو تابع هدف و در نهایت مساله نهایی تک هدفه برای هر یک از زیر مساله‌ها ساخته می‌شود که با حل این مساله جواب نهایی برای هر یک از زیر مساله‌ها بدست می‌آید. مدل ارائه شده برای بدست آوردن جواب دارای گام‌های زیر می‌باشد:

گام ۱: مساله اصلی را با استفاده از منطق تجزیه دانتزیگ- وولف به q زیر مساله تجزیه نمایید. زیر مساله i -ام می‌تواند بصورت زیر ارائه گردد:

$$\begin{aligned} \text{Max (Min)} f_1(X, \bar{U}_1) &= (a_{i1}, b_{i1}, c_{i1})C_{i1}X_i \\ \text{Max (Min)} f_2(X, \bar{U}_2) &= (a_{i1}, b_{i1}, c_{i1})C_{i1}X_i \\ &\vdots \\ \text{Max (Min)} f_L(X, \bar{U}_L) &= (a_{i1}, b_{i1}, c_{i1})C_{i1}X_i \end{aligned} \quad (27)$$

$$S. t. \quad FS_i = \begin{cases} (v_{im1}, v_{im2}, v_{im3})d_{im}X_i \leq (b_{im1}, b_{im2}, b_{im3}) \\ m = s_{i-1} + 1, \dots, s_i \\ \bar{H}_i(X) = \sum_{j=1}^N (o_{ij1}, o_{ij2}, o_{ij3})e_{ij}X_i \leq (r_i, s_i, t_i) \\ i = 1, 2, \dots, w \end{cases}$$

s.t. $(X_1, X_2, \dots, X_N) \in FS$.

گام ۲: با یک روش ساده هر مساله فازی را به سه مساله غیر فازی تبدیل نمایید. این روش برای دیفازی نمودن برخی مسائل فازی مطرح گردیده است [۳۲ و ۳۴] و [۲۹]. به دلیل اینکه تمامی ضرایب در توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی مثلثی در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین هر یک از توابع هدف فازی به سه تابع هدف قطعی تبدیل گردیده‌اند. همچنین هر یک از محدودیت‌های فازی به سه محدودیت قطعی تبدیل گردیده‌اند.

زیر مساله i -ام فازی به صورت زیر به سه مساله قطعی تبدیل می‌شود:

$$P_i : \begin{cases} \text{Min (Max)} (b_{i1} - a_{i1})C_{i1}X_i \\ \text{Max (Min)} (b_{i1})C_{i1}X_i \\ \text{Max (Min)} (c_{i1} - b_{i1})C_{i1}X_i \end{cases} \quad (28)$$

$$P_{i2} : \begin{cases} \text{Min (Max)} (b_{i2} - a_{i2})C_{i2}X_i \\ \text{Max (Min)} (b_{i2})C_{i2}X_i \\ \text{Max (Min)} (c_{i2} - b_{i2})C_{i2}X_i \end{cases} \quad (29)$$

$$P_{iL} : \begin{cases} \text{Min (Max)} (b_{iL} - a_{iL})C_{iL}X_i \\ \text{Max (Min)} (b_{iL})C_{iL}X_i \\ \text{Max (Min)} (c_{iL} - b_{iL})C_{iL}X_i \end{cases} \quad (30)$$

زیر مساله تجزیه شده و سپس در مقیاس کوچکتر حل گردد. زیر مساله می‌تواند به صورت زیر نوشته گردد:

$$P_i \left\{ \begin{aligned} \text{Max (Min)} f_1(X, \bar{U}_1) &= \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{ij}} f_{1k}(X_j, \bar{U}_{1k}) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{ij}} \bar{U}_{1k} C_{1k} V_{1k}(X_j) \\ \text{Max (Min)} f_2(X, \bar{U}_2) &= \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{ij}} f_{2k}(X_j, \bar{U}_{2k}) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{ij}} \bar{U}_{2k} C_{2k} V_{2k}(X_j) \\ &\vdots \\ \text{Max (Min)} f_L(X, \bar{U}_L) &= \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{ij}} f_{Lk}(X_j, \bar{U}_{Lk}) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{ij}} \bar{U}_{Lk} C_{Lk} V_{Lk}(X_j) \end{aligned} \right. \quad (26)$$

$$S. t. \quad FS_i = \begin{cases} \sum_{j \in N_i} \bar{g}_j(X_j) \leq \bar{B}_j \\ \bar{H}_i(X) = \sum_{j=1}^N \bar{h}_{ij}(X_j) \leq B \quad i = 1, 2, \dots, w \end{cases}$$

همان طور که در مساله شماره (۳) دیده می‌شود، زیر مساله i -ام شامل L تابع هدف می‌شود. در این مدل P_{itj} تابع برای متغیر j -ام در تابع هدف t -ام در زیر مساله i -ام وجود دارد. همچنین در رابطه $\bar{h}_{ij}(X_j) = \tilde{U}_{ij} d_{ij} h_{ij}$ تابع h_{ij} به عنوان تابعی برای متغیر j -ام در محدودیت i -ام می‌باشد. همچنین تمامی ضرایب در توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی مثلثی فرض شده است.

روش حل به کمک روش سازشی بر مبنای روش‌های TOPSIS و VIKOR به طور همزمان برای حل مسائل چند هدفه مقیاس بزرگ غیر خطی با ضرایب فازی

در این بخش روش تجزیه دانتزیگ- وولف به منظور مساله مقیاس بزرگ اولیه به کار رفته و آنرا به چند زیر مساله غیر خطی با ابعاد کوچکتر تبدیل نموده است. به عبارت دیگر با به کار بردن روش تجزیه دانتزیگ- وولف از فضای N - بعدی به فضای بسیار کوچکتر کاهش یافته‌ایم. و در نهایت در این روش حل، با به کار بردن روش تاپسیس، یک مساله L - هدفه به یک مساله دو هدفه تبدیل شده است. برای به دست آوردن یک جواب سازشی از مساله اصلی، ابتدا یک جواب ایده‌آل مثبت (PIS) و ایده‌آل منفی (NIS) برای هریک از اهداف به طور جداگانه بدون در نظر گرفتن سایر اهداف در نظر می‌گیریم، سپس با به کار بردن ایده‌آل‌های مثبت و منفی و استفاده همزمان از روش‌های تاپسیس و ویکور، یک

$$Q_i^{PIS} = v(\sum_{j \in B_i} w_j \left(\frac{f_{ij}^* - f_{ij}}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right)) + (1 - v)(\max_i \left(\frac{f_{ij}^* - f_{ij}}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right))$$

$$Q_i^{NIS} = v(\sum_{j \in B_i} w_j \left(\frac{f_{ij} - f_{ij}^-}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right)) + (1 - v)(\min_i \left(\frac{f_{ij}^* - f_{ij}}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right))$$

$$\text{Min } Q_i^{PIS} \quad (36)$$

$$\text{Max } Q_i^{NIS}$$

$$X \in FS_i$$

در این قسمت طبق مدل زیرمن، یک تابع هدف با منطق بهینه سازی ماکس-مین، به جای دو تابع هدف معرفی می‌گردد. این مدل توسط بلمن و زاده در سال ۱۹۷۰ معرفی گردید و سپس توسط زیرمن گسترش یافت [۲۶ و ۳۳].

گام‌های این مدل بصورت زیر می‌باشد:

گام ۵-۱: توابع عضویت d^{PIS} و d^{NIS} را مطابق با شکل (۱ و ۲) تشکیل دهید:

تابع عضویت برای d^{PIS} بصورت شکل ۲ می‌باشد:

$$\mu_1(x) = \frac{Q_i^{NIS} - (Q_i^{NIS})^-}{(Q_i^{NIS})^- - (Q_i^{NIS})^*} \quad (37)$$

تابع عضویت برای d^{NIS} بصورت شکل ۳ می‌باشد:

$$\mu_2(x) = \frac{Q_i^{PIS} - (Q_i^{PIS})^-}{(Q_i^{PIS})^- - (Q_i^{PIS})^*} \quad (38)$$

گام ۵-۲: تابع عضویت نهایی تک هدفه را برای هر یک از زیر مساله‌ها تشکیل دهید. سپس مساله تشکیل یافته را به منظور یافتن جواب نهایی حل نمایید:

$$\max \lambda$$

$$S. t. \begin{cases} \frac{Q_i^{PIS} - (Q_i^{PIS})^*}{(Q_i^{PIS})^- - (Q_i^{PIS})^*} \geq \lambda \\ \frac{Q_i^{NIS} - (Q_i^{NIS})^-}{(Q_i^{NIS})^* - (Q_i^{NIS})^-} \geq \lambda \end{cases} \quad (39)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, X \in FS_1$$

فلوچارت روش ارائه شده بر اساس دانتزیگ- وولف در شکل (۴) آمده است:

S. t.

$$\begin{cases} v_{im1} d_{im}(xi) \leq b_{im1} \\ v_{im2} d_{im}(xi) \leq b_{im2} \\ v_{im3} d_{im}(xi) \leq b_{im3} \end{cases} \quad m = s_{i-1} + 1, \dots, s_i \quad (31)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N o_{ij1} e_{ij} X_j \leq r_i \\ \sum_{j=1}^N o_{ij2} e_{ij} X_j \leq s_i \\ \sum_{j=1}^N o_{ij3} e_{ij} X_j \leq t_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, w$$

گام ۳: جواب‌های ایده‌آل مثبت (PIS) و ایده‌آل منفی (NIS) برای هر یک از اهداف به طور جداگانه بدون در نظر گرفتن سایر اهداف در محاسبه نمایند. بصورت زیر:

$$\text{PIS: } f_{bj}^* = \{ \text{Max (Min)} f_{bj}(X_j) \} (f_{cj}(X_j), \forall b (\forall c)) \quad (32)$$

$$\text{NIS: } f_{bj}^- = \{ \text{Min (Max)} f_{bj}(X_j) \} (f_{cj}(X_j), \forall b (\forall c)) \quad (33)$$

$f_{bj}(X_j)$ Benefit objective for maximization
 $f_{cj}(X_j)$ Cost objective for maximization

گام ۴: با به کار بردن ایده‌آل‌های مثبت و منفی محاسبه شده در گام سوم، مسائل با دو تابع هدف (کمترین فاصله از ایده‌آل مثبت و بیشترین فاصله از ایده‌آل منفی) بسازید.

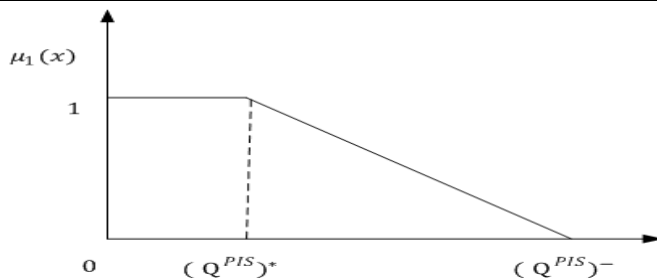
$$S_i^{PIS} = \sum_{j \in B_i} w_j \left(\frac{f_{ij}^* - f_{ij}}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right) + \sum_{j \in C_i} w_j \left(\frac{f_{ij} - f_{ij}^*}{f_{ij}^- - f_{ij}^*} \right)$$

$$R_i^{PIS} = \max_i \left(\frac{f_{ij}^* - f_{ij}}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right) \quad (34)$$

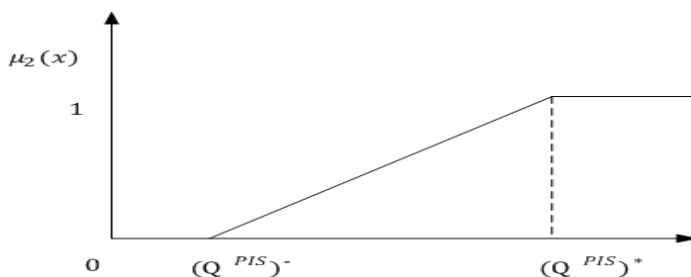
$$S_i^{NIS} = \sum_{j \in B_i} w_j \left(\frac{f_{ij} - f_{ij}^-}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right) + \sum_{j \in C_i} w_j \left(\frac{f_{ij}^- - f_{ij}}{f_{ij}^- - f_{ij}^*} \right) \quad (35)$$

$$R_i^{NIS} = \min_i \left(\frac{f_{ij}^* - f_{ij}}{f_{ij}^* - f_{ij}^-} \right)$$

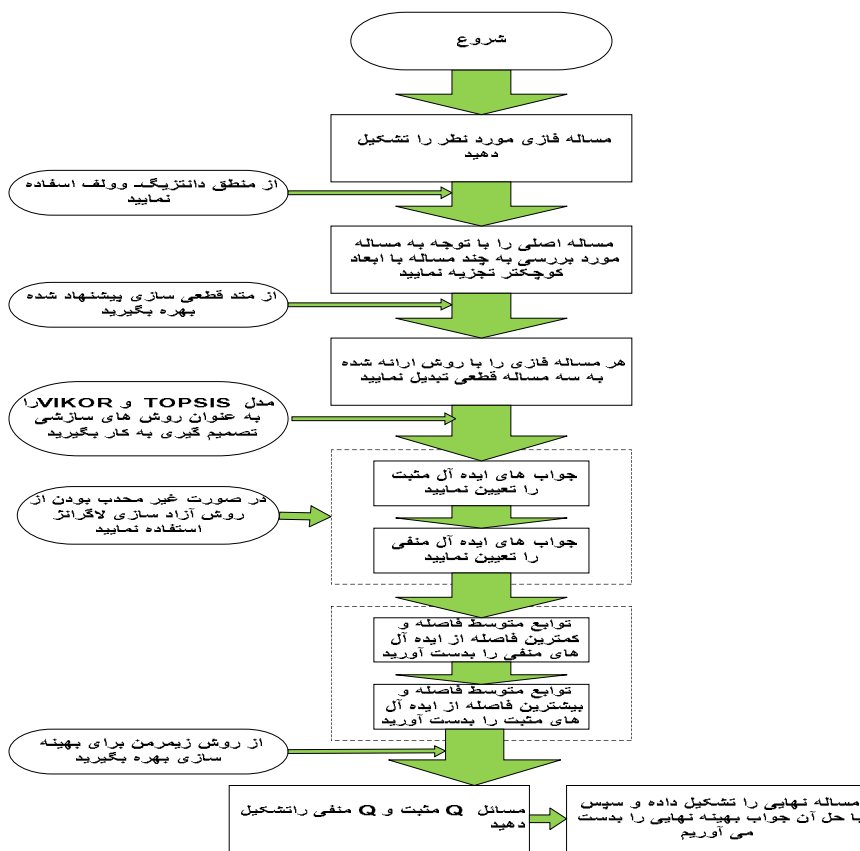
گام ۵: با توجه به مفهوم جواب سازشی مساله برنامه ریزی دو هدفه زیر را به این منظور معرفی می‌کنیم:



شکل ۲- تابع عضویت Q_i^{PIS}



شکل ۳- تابع عضویت Q_i^{PIS}



شکل ۴- فلوجارت روش ارائه شده برای مسائل چند هدفه فازی مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه‌دار

مثال عددی

$$\max f_2(x) = (0.1534, 0.1861, 0.6514)x_1 \quad (41)$$

$$\min f_3(x) = (0.0549, 0.1637, 0.2725)(x_1 + 1)^2$$

Subject to:

$$FS_1 = \left\{ \begin{array}{l} (0.1345, 0.1883, 0.2421)x_1 - (0.1170, 0.1637, 0.2105)x_2^2 + (0.0901, 0.1261, 0.1621)x_3^2 \leq (0.1345, 0.1883, 0.2421) \\ (0.1511, 0.2519, 0.3527)x_1 - (0.1632, 0.2720, 0.3808)x_2^2 + (0.1820, 0.3034, 0.4247)x_3^2 \leq (0.1511, 0.2519, 0.3527) \\ (0.0227, 0.0682, 0.1136)x_1 - (0.0222, 0.0667, 0.1111)x_2^2 + (0.0213, 0.0640, 0.1066)x_3^2 \leq (0.0227, 0.0682, 0.1136) \\ (0.1953, 0.2734, 0.3515)x_1^2 + (0.1170, 0.1637, 0.2105)x_2 \leq (0.1170, 0.1637, 0.2105) \\ (0.1667, 0.2778, 0.3889)x_1^2 + (0.1632, 0.2720, 0.3808)x_2 \leq (0.1632, 0.2720, 0.3808) \\ (0.0054, 0.0162, 0.0270)x_1^2 + (0.0222, 0.0667, 0.1111)x_2 \leq (0.0222, 0.0667, 0.1111) \\ (0.0000, 0.0000, 0.0000) \leq (0.1379, 0.1930, 0.2481)x_1 \leq (0.1170, 0.1637, 0.2105) \end{array} \right.$$

همانند زیر مساله اول، زیر مساله دوم نیز بر حسب متغیر x_2 و زیر مساله سوم بر حسب متغیر x_3 به صورت زیر می‌باشند:

$$P_2: \max f_1(x) = (0.0359, 0.0935, 0.1942)(x_2 + 1)^2$$

$$\text{Max } f_2(x) = (0.6394, 0.1930, 0.5127, 2, 3)x_2^2 + (0.6394, 0.1930, 0.5127, 2, 3)x_2 \quad (42)$$

$$\min f_3(x) = (0.0071, 0.0889, 0.3111)x_2$$

Subject to:

$$FS_2 = \left\{ \begin{array}{l} (0.1345, 0.1883, 0.2421)x_1 - (0.1170, 0.1637, 0.2105)x_2^2 + (0.0901, 0.1261, 0.1621)x_3^2 \leq (0.1345, 0.1883, 0.2421) \\ (0.1511, 0.2519, 0.3527)x_1 - (0.1632, 0.2720, 0.3808)x_2^2 + (0.1820, 0.3034, 0.4247)x_3^2 \leq (0.1511, 0.2519, 0.3527) \\ (0.0227, 0.0682, 0.1136)x_1 - (0.0222, 0.0667, 0.1111)x_2^2 + (0.0213, 0.0640, 0.1066)x_3^2 \leq (0.0227, 0.0682, 0.1136) \\ (0.1953, 0.2734, 0.3515)x_1^2 + (0.1170, 0.1637, 0.2105)x_2 \leq (0.1170, 0.1637, 0.2105) \\ (0.1667, 0.2778, 0.3889)x_1^2 + (0.1632, 0.2720, 0.3808)x_2 \leq (0.1632, 0.2720, 0.3808) \\ (0.0054, 0.0162, 0.0270)x_1^2 + (0.0222, 0.0667, 0.1111)x_2 \leq (0.0222, 0.0667, 0.1111) \\ (0, 0, 0) \leq (0.0833, 0.2500, 0.4167)x_2 \leq (0.0025, 0.0075, 0.0126) \end{array} \right.$$

$$P_3: \max f_1(x) = (0.0902, 0.0188, 0.4339) x_3$$

$$\max f_2(x) = (0.0575, 0.1557, 0.7007)x_3^2 \quad (43)$$

در این بخش با ارائه یک مثال گام‌های روش حل ارائه شده به خوبی تبیین می‌گردد. در این مثال سه تابع هدف وجود دارد که ضرایب همگی آنها و نیز ضرایب محدودیت‌ها به صورت فازی مثلثی مطرح گردیده است. مساله اصلی به صورت زیر مطرح گردیده است:

P:

$$\max f_1(x) = (0.1345, 0.1883, 0.4402)x_1^3 + (0.0359, 0.0935, 0.1942)(x_2 + 1)^2 + (0.0902, 0.0188, 0.4339) x_3$$

$$\max f_2(x) = (0.1534, 0.1861, 0.6514)x_1 + (0.6394, 0.1930, 0.5127, 2, 3)x_2^2 + (0.6394, 0.1930, 0.5127, 2, 3)x_2 + (0.0575, 0.1557, 0.7007) x_3^2 \quad (40)$$

$$\min f_2(x) = (0.0549, 0.1637, 0.2725)(x_1 + 1)^2 + (0.0071, 0.0889, 0.3111)x_2 + (0.0972, 0.2026, 0.4662) x_3^2$$

Subject

to:

$$FS = \left\{ \begin{array}{l} (0.1345, 0.1883, 0.2421)x_1 - (0.1170, 0.1637, 0.2105)x_2^2 + (0.0901, 0.1261, 0.1621)x_3^2 \leq (0.1345, 0.1883, 0.2421) \\ (0.1511, 0.2519, 0.3527)x_1 - (0.1632, 0.2720, 0.3808)x_2^2 + (0.1820, 0.3034, 0.4247)x_3^2 \leq (0.1511, 0.2519, 0.3527) \\ (0.0227, 0.0682, 0.1136)x_1 - (0.0222, 0.0667, 0.1111)x_2^2 + (0.0213, 0.0640, 0.1066)x_3^2 \leq (0.0227, 0.0682, 0.1136) \\ (0.1953, 0.2734, 0.3515)x_1^2 + (0.1170, 0.1637, 0.2105)x_2 \leq (0.1170, 0.1637, 0.2105) \\ (0.1667, 0.2778, 0.3889)x_1^2 + (0.1632, 0.2720, 0.3808)x_2 \leq (0.1632, 0.2720, 0.3808) \\ (0.0054, 0.0162, 0.0270)x_1^2 + (0.0222, 0.0667, 0.1111)x_2 \leq (0.0222, 0.0667, 0.1111) \\ (0, 0, 0) \leq (0.1379, 0.1930, 0.2481)x_1 \leq (0.1170, 0.1637, 0.2105) \\ (0, 0, 0) \leq (0.0833, 0.2500, 0.4167)x_2 \leq (0.0025, 0.0075, 0.0126) \\ (0, 0, 0) \leq (0.0227, 0.0682, 0.1136)x_3 \leq (0.0054, 0.0162, 0.0270) \end{array} \right.$$

با فرض اینکه مساله دارای سه بخش مجزا نسبت به یکدیگر می باشد، مساله اصلی به سه زیر مساله تبدیل گردیده است. بنابراین گام‌های حل مساله در مثال زیر نشان داده شده است:

گام ۱- با در نظر گرفتن مساله اصلی، آنرا به سه زیر مساله تجزیه می‌کنیم. مساله اولی بر اساس متغیر x_1 بصورت زیر می‌باشد:

$$P_1: \max f_1(x) = (0.1345, 0.1883, 0.4402)x_1^3$$

$$\begin{aligned}
 &P_{22}: \\
 &\min f_1 = 0.1279x_2^2 + 0.1279x_2 \\
 &\max f_2(x) = 0.1930x_2^2 + 0.1930x_2 \\
 &\max f_3(x) = 0.3197x_2^2 + 0.3197x_2 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_2 \quad (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_{23}: \\
 &\max f_1(x) = 0.0818x_2 \\
 &\min f_2(x) = 0.0889x_2 \\
 &\min f_3(x) = 0.2222x_2 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_2 \quad (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_3: \\
 &P_{31}: \\
 &\min f_1(x) = 0.0982x_2 \\
 &\max f_2(x) = 0.1884x_3 \\
 &\max f_3(x) = 0.2455x_3 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_3 \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_{32}: \\
 &\min f_1(x) = 0.0982x_3^2 \\
 &\max f_2(x) = 0.1557x_3^2 \\
 &\max f_3(x) = 0.5450x_3^2 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_3 \quad (51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_{33}: \\
 &\max f_1(x) = 0.1054x_3^2 \\
 &\min f_2(x) = 0.2026x_3^2 \\
 &\min f_3(x) = 0.2636x_3^2 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_3 \quad (52)
 \end{aligned}$$

گام ۳- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 &\min f_3(x) = \\
 &(0.0972, 0.2026, 0.4662)x_3^2 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &FS_3 = \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &(1, 2, 3)x_1 - (1, 2, 3)x_2 + (2, 4, 6)x_3 \leq (6, 7, 8) \\
 &(1, 2, 3)x_1^2 + (1, 3, 5)x_2 + (1, 2, 3)x_3 \leq (10, 11, 12) \\
 &(0, 0, 0) \leq (1, 2, 3)x_3 \leq (2, 3, 4)
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

گام ۲- از آنجایی که همه ضرایب در توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی مثلثی مطرح گردیده‌اند بنابراین هریک از زیر مسائل فازی به سه مساله قطعی تبدیل می‌گردد. با استفاده از روابط () هر یک از مسائل فازی را به مسائل قطعی تبدیل نمایم. به صورت زیر:

$$\begin{aligned}
 &P_1: \\
 &P_{11}: \min f_1(x) = 0.0538 x_1^3 \\
 &\max f_2(x) = 0.1883 x_1^3 \\
 &\max f_3(x) = 0.2519 x_1^3 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_1 \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_{12}: \min f_1(x) = 0.0327 x_1 \\
 &\max f_2(x) = 0.1861 x_1 \\
 &\max f_3(x) = 0.4653 x_1 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_1 \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_{13}: \max f_1(x) = 0.1088(x_1 + 1)^2 \\
 &\min f_2(x) = 0.1637(x_1 + 1)^2 \\
 &\min f_3(x) = 0.2720(x_1 + 1)^2 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_1 \quad (46)
 \end{aligned}$$

$P_2:$

$$\begin{aligned}
 &P_{21}: \\
 &\min f_1(x) = 0.0576(x_2 + 1)^2 \\
 &\max f_2(x) = 0.0935(x_2 + 1)^2 \\
 &\max f_3(x) = 0.1007(x_2 + 1)^2 \\
 &\text{Subject to:} \\
 &X \in FS_2 \quad (47)
 \end{aligned}$$

گام ۴ و ۵- با بهره‌گیری از مقادیر محاسبه شده PIS , NIS در گام قبلی، توابع d^{PIS} and d^{NIS} را تشکیل

می‌دهیم به صورت زیر:

$$Q_1^{PIS} = 0.6918x_1^3 + 8.1353x_1^2 - 16.7973x_1 - 6.2747 \quad (53)$$

$$Q_1^{NIS} = 0.55004.75x_1^3 - 0.1140x_1^2 + 0.33.0191x_1 - 0.8756 \quad (54)$$

مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی را برای Q_1^{PIS} و Q_1^{NIS} در قالب جدول زیر می‌آوریم.

جدول ۳- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی برای توابع

	Q_1^{NIS} و Q_1^{PIS} برای مساله P_1	
	ایده آل مثبت	ایده آل منفی
$\min Q_1^{PIS}$	-6.7728	-6.2747
$\max Q_1^{NIS}$	-12.3818	-14.8756

مساله نهایی را نوشته و آن را حل می‌کنیم تا جواب نهایی بدست آید.

$\max \lambda$

$$\frac{(0.6918x_1^3 + 8.1353x_1^2 - 16.7973x_1 - 6.2747) - (6.7728)}{-6.2747 + 6.7728} \geq \lambda$$

$$\lambda \quad (55)$$

$$\frac{-12.3818 - (55004.75x_1^3 - 0.1140x_1^2 + 0.33.0191x_1 - 0.8756)}{-12.3818 + 14.8756} \geq \lambda$$

λ

$$0 \leq \lambda \leq 1, X \in FS_1$$

$$\lambda^* = 0.0000 \quad x_1^* = 0.0301$$

شبهه زیر مساله یک، این مقادیر را برای زیر مساله دوم نیز تکرار می‌کنیم.

جدول ۴- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت برای هر یک از اهداف

بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_2

	f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
$\min f_1$	0.0576*	0.093 5	0.100 7	0	0	0
P_{21} $\max f_1$	0.196 7	0.3195*	0.344 1	0	0.84 84	0
$\max f_1$	0.1967	0.319 5	0.3441*	0	0.84 84	0
$\min f_1$	0*	0	0	0	0	0
P_{22} $\max f_1$	0.672 8	1.0197*	1.6821	0	0.84 84	0
$\max f_1$	0.672 8	1.019 7	1.6821*	0	0.84 84	0
$\max f_1$	0.0295*	0.032 1	0.080 1	0	0 3607	0
P_{23} $\min f_1$	0	0*	0	0	0	0
$\min f_1$	0	0	0*	0	0	0

جدول ۱- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت برای هر یک از اهداف

بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_1

	f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
$\min f_1$	0*	0	0	0	0	0
f_{11} $\max f_1$	1.4671 $\times 10^{-6}$	5.1351 $\times 10^{-6}$ *	6.8695 $\times 10^{-6}$	0.030 1	0	0
$\max f_1$	1.4671 $\times 10^{-6}$	5.1351 $\times 10^{-6}$ *	6.8695 $\times 10^{-6}$ *	0.030 1	0	0
$\min f_1$	0*	0	0	0	0	0
f_{12} $\max f_1$	0.098 5	0.0056*	0.014 0	0.030 1	0	0
$\max f_1$	0.098 5	0.0056	0.0140*	0.030 1	0	0
$\max f_1$	0.1154*	0.173 7	2886	0.030 1	0	0
f_{13} $\min f_1$	0.108 8	0.1637*	0.272 0	0	0	0
$\min f_1$	0.108 8	0.163 7	0.2720*	0	0	0

$$PIS: \quad f_{11}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0000, 5.1351 \times 10^{-6}, 6.8695 \times 10^{-6}^*)$$

$$f_{12}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0000, 0.0056, 0.0140)$$

$$f_{13}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.1154, 0.1637, 0.2720)$$

جدول ۲- مقادیر ایده‌آل‌های منفی برای هر یک از اهداف

بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_1

	f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
$\max f_1$	1.4671 $\times 10^{-6}$	5.1351 $\times 10^{-6}$	6.8695 $\times 10^{-6}$	0.030 1	0	0
P_{11} $\min f_1$	0	0 ⁻	0	0	0	0
$\min f_1$	0	0	0 ⁻	0	0	0
$\max f_1$	0.0985 ⁻	0.0056	0.014 0	0.030 1	0	0
P_{12} $\min f_1$	0	0 ⁻	0	0	0	0
$\min f_1$	0	0	0 ⁻	0	0	0
$\min f_1$	0.1088 ⁻	0.1637	0.277 0	0	0	0
P_{13} $\max f_1$	0.115 4	0.1737 ⁻	0.288 6	0.030 1	0	0
$\max f_1$	0.1154	0.1737	0.2886 ⁻	0.030 1	0	0

$$NIS: \quad f_{11}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (1.4671 \times 10^{-6}, 0.0000, 0.0000)$$

$$f_{12}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.0985, 0.0000, 0.0000)$$

$$f_{13}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.1088, 0.1737, 0.2886)$$

The obtained PIS, NIS are shown in Table 3.

$$\max \lambda \frac{(-0.3966x_2^2 + 1.1948X_2 + 2.586) - 2.586}{3.3142 - 2.586} \geq \lambda \quad (\delta\lambda)$$

$$\frac{2.414 - (-0.3966x_2^2 + 1.1948X_2 + 2.586)}{2.414 + 0.3112} \geq \lambda$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, X \in FS_2$$

$$\lambda^* = 0.0000 \quad x_2^* = 0.0000$$

جدول ۷- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت برای هر یک از اهداف

بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_3

	f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
P_{31} min f_1	0*	0	0	0	0	0
max f_1	0.0233	0.0447*	0.058	0	0	0.237
min f_1	0*	0	0	0	0	0
max f_1	0.0233	0.044	0.0582*	0	0	0.237
P_{32} min f_1	0*	0	0	0	0	0
max f_1	0.0055	0.0876*	0.030	0	0	0.237
min f_1	0*	0	0	0	0	0
max f_1	0.0055	0.087	0.0307*	0	0	0.237
P_{33} min f_1	0	0*	0	0	0	0
max f_1	0.0059*	0.011	0.014	0	0	0.237
min f_1	0	0*	0	0	0	0
min f_1	0	0	0*	0	0	0

PIS: $f_{11}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0000, 0.0447, 0.0582)$

$f_{12}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0000, 0.0876, 0.0307)$

$f_{13}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0059, 0.0000, 0.0000)$

جدول ۸- مقادیر ایده‌آل‌های منفی برای هر یک از اهداف

بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_3

	f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
P_{31} max f_1	0.0059-	0.011	0.014	0	0	0.23
min f_1	0	0-	0	0	0	0
min f_1	2	0	0-	0	0	0
P_{32} max f_1	0.0055-	0.087	0.030	0	0	0.23
min f_1	0	0-	0	0	0	0
min f_1	0	0	0-	0	0	0
P_{33} min f_1	0-	0	0	0	0	0
max f_1	0.0059	0.0114-	0.014	0	0	0.23
max f_1	0.0059	0.011	0.0148-	0	0	0.23

PIS: $f_{11}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0576, 0.3195, 0.3441)$

$f_{12}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0000, 1.0197, 1.6821)$

$f_{13}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (0.0295, 0.0000, 0.0000)$

جدول ۵- مقادیر ایده‌آل‌های منفی برای هر یک از اهداف

بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_2

	f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
P_{21} max f_1	0.1967-	0.319	0.344	0	0.84	0
min f_1	0.057	0.0935-	0.100	0	0	0
min f_1	0.057	0.093	0.1007-	0	0	0
P_{22} max f_1	0.6728-	1.019	1.682	0	0.84	0
min f_1	0	0-	0	0	0	0
min f_1	0	0	0-	0	0	0
P_{23} min f_1	0-	0	0	0	0	0
max f_1	0.029	0.0321-	0.080	0	0	0
max f_1	0.029	0.032	0.0801-	0	0.36	0

NIS: $f_{11}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.1967, 0.0935, 0.1007)$

$f_{12}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.6728, 0.0000, 0.0000)$

$f_{13}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.0000, 0.0321, 0.0801)$

$Q_2^{PIS} = -0.3966x_2^2 + 1.1948X_2 + 2.586 \quad (\delta\epsilon)$

$Q_2^{NIS} = 0.3015x_2^2 - 3.4679X_2 + 2.414 \quad (\delta\gamma)$

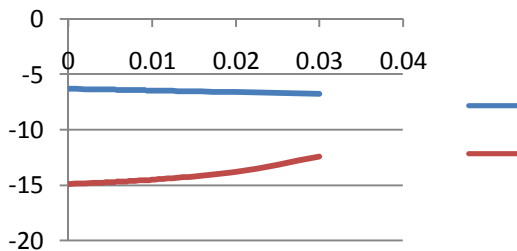
جدول ۶- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی برای توابع

Q_2^{NIS} و Q_2^{PIS} برای مساله P_2

	ایده آل مثبت	ایده آل منفی
min Q_2^{PIS}	2.586	3.3142
max Q_2^{NIS}	2.414	-0.3112

پس از محاسبه مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی تابع نهایی را تشکیل داده و سپس با حل آن به جواب بهینه مورد نظر خواهیم رسید.

مطرح می‌گردند. دسته دیگر محدودیت‌ها نیز محدودیت‌های عمومی می‌باشند که می‌توانند شامل همگی یا تعدادی از متغیرها باشند. در روش ارائه شده همزمان با استفاده از روش‌های ویکور و تاپسیس همزمان هم فاصله از ایده‌آل‌های مثبت و منفی مطرح گردید و هم میانگین میزان تاسف و حداکثر میزان تاسف در نظر گرفته شده است. در نهایت به یک مساله دو هدفه برای ازای هر یک از متغیرها می‌رسیم. در حقیقت به جای بررسی جواب بهینه در یک فضای سه بعدی، حال تابع هدف را در یک فضای یک بعدی جستجو می‌کنیم. رفتارهای توابع Q_3^{NIS} و Q_3^{PIS} در تعیین جواب بهینه تعیین کننده می‌باشد. رفتار توابع Q_3^{PIS} و Q_3^{NIS} برای زیر مساله اول در شکل (۵) آمده است.



شکل ۵- نمودار روند تغییرات توابع Q_3^{NIS} و Q_3^{PIS} برای زیر مساله اول

مقادیر اولین متغیر طبق محدودیت‌های داده شده در فاصله صفر و ۰.۰۳۰۱ قرار دارد. همان طور که در شکل نشان داده شده است هر چه از نقطه صفر به سمت نقطه ۰.۰۳۰۱ حرکت می‌کنیم از مقدار Q_3^{PIS} کاسته شده و بر مقدار d^{NIS} افزوده می‌گردد، که مطلوب نیز همین است. ولی همزمان به دو مورد دیگر باید همزمان توجه داشت. اولاً اینکه باید به محدودیت متغیر توجه داشته باشیم و ثانیاً اینکه سطح ارضا λ باید بین صفر و یک باشد. که با در نظر گرفتن هر دو نکته مقدار بهینه مقدار صفر خواهد بود.

شبه مسئله اول، مسائل دوم و سوم نیز به همین ترتیب محاسبه می‌گردند. نوع رفتار تابع برای زیر مسئله ۲ در شکل (۶) آمده است.

$$NIS: f_{11}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.0059, 0.0000, 0.0000)$$

$$f_{12}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.0055, 0.0000, 0.0000)$$

$$f_{13}^- = (f_1^-, f_2^-, f_3^-) = (0.0000, 0.0114, 0.0148)$$

$$Q_3^{PIS} = -0.0148x_3^2 + 12.50x_3 + 2.5 \quad (59)$$

$$Q_3^{NIS} = -0.0138x_3^2 - 12.50x_3 + 2.5302 \quad (60)$$

جدول ۶- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی برای توابع

	ایده آل مثبت	ایده آل منفی
$\min Q_3^{PIS}$	2.5	5.4464
$\max Q_3^{NIS}$	2.5302	-0.4178

پس از استفاده از مدل ارائه شده، جواب بهینه نهایی به صورت زیر محاسبه خواهید گردید. به صورت زیر:

$\max \lambda$

$$\frac{(-0.0148x_3^2 + 12.50x_3 + 2.5) - 2.5}{5.4464 - 2.5} \geq \lambda \quad (61)$$

$$\frac{2.5302 - (-0.0138x_3^2 - 12.50x_3 + 2.5302)}{2.5302 + 0.8147} \geq \lambda$$

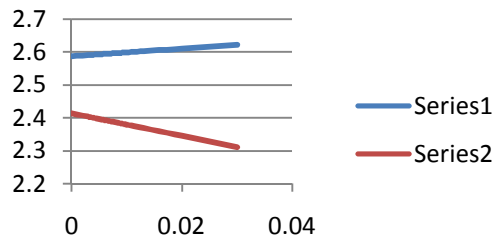
$$0 \leq \lambda \leq 1, X \in FS_3$$

$$\lambda^* = 0.0000 \quad x_3^* = 0.0000$$

نتایج

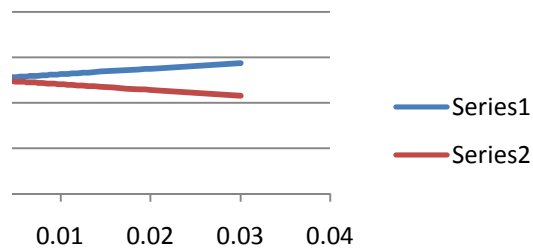
در این مثال همان طور که نشان داده شد، یک مساله سه هدفه مطرح گردید. که هر یک از اهداف و محدودیت‌ها در فضای سه بعدی مطرح می‌گردند. علاوه بر این، $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ مطرح می‌گردد که در آن x_1^*, x_2^*, x_3^* به ترتیب از حل سه زیر مساله مستقل از همدیگر P_1, P_2, P_3 بدست آمده‌اند. همچنین محدودیت‌ها نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند. یک دسته محدودیت‌هایی هستند که مختص هر یک از متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 می‌باشند که هر یک از محدودیت‌های خاص هر متغیر به همراه زیر مساله مربوط به همان متغیر

بزرگ فازی با ساختار بلوکی زاویه‌دار می‌باشد. در این روش ابتدا از منطق دانتزیگ- وولف مساله از فضای n -بعدی به مسائل کوچکتر در فضای یک بعدی تبدیل می‌شود. در روش ارائه شده هر مساله فازی به سه مساله غیر فازی تبدیل شد. سپس جواب‌های بهینه برای هر یک توابع هدف قطعی شده بدست آمد. پس از آن روش تاپسیس به عنوان یک روش سازشی تصمیم‌گیری برای بدست آوردن توابعی برای ارزیابی میزان نزدیکی به ایده‌آل مثبت و دوری از ایده‌آل منفی به کار برده شد. سپس روش بهینه‌سازی زیمرمن برای حل مساله دو هدفه و تبدیل آن به یک مساله یک هدفه به کار برده شد. به طور کلی یک مساله n -بعدی به یک مساله یک بعدی کاهش داده شد. در این مدل توابع هدف و محدودیت‌ها می‌توانند به صورت غیرخطی و حتی غیرمحدب باشند. در نهایت نیز برای بیشتر روشن شدن مدل ارائه شده یک مثال ارائه گردید و جواب بهینه برای آن بدست آمد. بررسی مدل ارائه شده در سایر انواع داده‌های غیرقطعی مثل داده‌های خاکستری می‌تواند به عنوان موضوعی بای تحقیقات آتی مطرح گردد. همچنین بررسی روش حل به کمک سایر روش‌های تصمیم‌گیری نیز از دیگر موضوعاتی است که می‌تواند به عنوان یک موضوع تحقیق مورد مطالعه قرار گیرد.



شکل ۶- نمودار روند تغییرات توابع Q^{NIS} و Q^{PIS} برای زیر مساله دوم

همان طور که در شکل نشان داده شده است هر چه از نقطه صفر به سمت نقطه دو حرکت می‌کنیم از مقدار d^{NIS} کاسته شده و بر مقدار Q^{PIS} افزوده می‌گردد. در حالی که عکس این حالت مطلوب است. بنابراین نقطه صفر را به عنوان نقطه بهینه انتخاب می‌کنیم. رفتار توابع مورد بررسی برای زیر مساله سوم نیز در شکل (۷) مطرح گردیده است.



شکل ۷- نمودار روند تغییرات توابع Q^{NIS} و Q^{PIS} برای زیر مساله سوم

همان طور که از شکل (۷) پیداست مقدار تابع Q^{PIS} در نقطه صفر کمترین و نیز تابع d^{NIS} در نقطه صفر بیشترین مقدار خود را دارند. بنابراین نقطه $x_3^* = 0$ به عنوان اولین پیشنهاد مطرح می‌گردد. حال با بررسی محدودیت متغیرها معلوم می‌شود که از نظر محدودیت این نقطه قابل قبول بنابراین همان جواب تایید می‌گردد.

نتیجه گیری

در این مقاله تاکید اصلی بر روی استفاده از یک روش سازشی بر مبنای روش‌های TOPSIS و VIKOR به طور همزمان به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی مقیاس

References

- [1] Abo-Sinna, M. A; Amer, A. H. (2005). extensions of topsis for multi-objective large-scale nonlinear programming problems. Applied mathematics and computation 162, 243-256.
- [2] Hu, C; Shen, Y; Li, S. (2009). An interactive satisficing method based on alternative tolerance for fuzzy multiple objective optimization. Applied Mathematical Modelling 33, 1886-1893.
- [3] Hwang, Ch. L; Yoon, K. (1981). Multiple attribute decision making-methods and applications. Heidelberg: Springer-Verlag.
- [4] Lai, Y.J; Liu, T.Y; Hwang, C.L. (1994). TOPSIS for MODM. Eur. J. Oper. Res. 76, 486-500.
- [5] Chen, C.T.(2000). Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. Fuzzy Sets and Systems 114, 1-9.
- [6] Abo-Sinna, M.A.(2000). Extensions of the TOPSIS for multi-objective dynamic programming problems under fuzziness. Journal of Advances in Modeling and Analysis 43 (4), 1-24.
- [7] carpentier, J.(1962) . contribution a. '1' etude du dispatching economique, bulletin de la societe francaise des electronics, vol. 3'pp. 431-447' aug.
- [8] Dommel, H. W; Tinny, W. F. (1968). Optimal power flow solution, IEEE Transactions on power apparatus and system, vol. 87, pp. 1866, October.
- [9] Sasson, Albert M.(1970). Decomposition technique applied to the non linear programming optimal load flow method" IEEE Transactions on power apparatus and system, vol. 89, pp. 78-82, january.
- [10] Moro, L.F.L; Zanin, A.C; Pinto, J.M. (1998). A Planning Model for Refinery Diesel Production" , Computers and Chemical Engineering, Vol. 22, PP. 1039-1042.
- [11] Menglong, SU; Jiang Wang, BO YU. (2010). Solving nonconvex nonlinear programming problems via a new aggregate constraint homotopy method, Nonlinear Analysis 73, 2558-2565.
- [12] Winston, wayne L. (1994). Operations Research: Applications and Algorithms. Son publishing.
- [13] Heydari, M; Sayadi, M.K; Shahanaghi, K. (2010). extended vikor as a new method for solving multiple objective large-scale nonlinear programming problems. RAIRO Operations Research 44, 139-152.
- [14] Dantzig, G; Wolfe, P. (1961). The decomposition algorithm for linear programming. Econometrica 29, 767-778.
- [15] Sakawa, M. (2000). Large Scale Interactive Fuzzy Multi objective Programming. Physica-Verlag , A Springer-Verlag Company, New York.
- [16] Sakawa, M; Sawada, M.K; Inuiguchi, M. (1995). A fuzzy satisficing method for largescale linear programming problems with block angular structure. European Journal of Operational Research 81, 399-409.
- [17] El-Sawy, A. A; El-Khouly, N.A; Abou-El-Enien, T.H.M. (2000). An algorithm for decomposing the parametric space in large scale

- linear vector optimization problems: a fuzzy approach. *Journal of Advances in Modelling and Analysis* 55 (2), 1–16.
- [18]Gioan, E; Paul, C. (2012). Split decomposition and graph-labelled trees: Characterizations and fully dynamic algorithms for totally decomposable graphs. *Discrete Applied Mathematics* Volume 160, Issue 6, 708–733.
- [19]Guillaume, C. (2010). Nearly optimal algorithms for the decomposition of multivariate rational functions and the extended Lüroth Theorem. *Journal of Complexity* [Volume 26, Issue 4](#), 344–363.
- [20]Elisangela, M; Camargo, R. S, Miranda, G. (2013). An improved Benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research* Volume 226, Issue 2, 185–202.
- [21]Kovaleva, A. (2010). The Melnikov criterion of instability for random rocking dynamics of a rigid block with an attached secondary structure. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* Volume 11, Issue 1, 472–479.
- [22]Laureano, F. E; Araceli, M. G; Pérez, P; Unzueta, A .(2013). Scenario Cluster Decomposition of the Lagrangian dual in two-stage stochastic mixed 0–1 optimization. *Computers & Operations Research* Volume 40, Issue 1, 362–377.
- [23]Jolai, F; Yazdian, S.A; Shahanaghi, K; Azari-Khojasteh, M. (2011). Integrating fuzzy TOPSIS and multi-period goal programming for purchasing multiple products from multiple suppliers. *Journal of Purchasing & Supply Management* 17, 42–53.
- [24]Vahdani, B; Hadipour, H; Sadaghiani, J-S, Amiri, M. (2010). Extension of VIKOR method based on interval-valued fuzzy sets. *Int J Adv Manuf Technol* 47:1231–1239.
- [25]Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 338–353.
- [26]Bellman, R; Zadeh, L.A; 1970. Decision making in a fuzzy environment. *Management Science* 17 (4), 141–164.
- [27]Mahdavi, I; Mahdavi-Amiri, N; Heidarzade, A; Nourifar, R. (2008). Designing a model of fuzzy TOPSIS in multiple criteria decision making. *Applied Mathematics and Computation* 206, 607–617.
- [28]C. Stanculescu , Ph; Fortemps , M; Installe, V. Wertz. (2003). Multiobjective fuzzy linear programming problems with fuzzy decision variables. *European Journal of Operational Research* 149 , 654–675.
- [29]S.A. Torabi; E. Hassini. (2008). An interactive possibilistic programming approach for multiple objective supply chain master planning. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 193 – 214.
- [30]Abo-Sinna, M.A; Abou-El-Enie, T.H.M. (2006). An interactive algorithm for large scale multiple objective programming problems with fuzzy parameters through TOPSIS approach, *Appl. Math. Comput.* 177, 515–527.

[31] Vahdani, B; Mousavi, S.M; Hashemi, H; Mousakhani, M; Tavakkoli-Moghaddam, R. (2013). A new compromise solution method for fuzzy group decision-making problems with an application to the contractor selection. Engineering Applications of Artificial Intelligence. Article in press.

[32] Wang, T-C; Liang, J-L; Ho, C-Y. (2006). Multi-criteria decision analysis by using fuzzy VIKOR. Presented at The IEEE International Conference on Service Systems and Service Management Troyes, FRANCE.

[33] Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Systems 1, 45-55.

