

## بررسی خواص آنتروپی عملگری نسبی پارامتری

اسماعیل نیکوفر\*

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۰/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۳۰

### چکیده

مفهوم آنتروپی در سال ۱۸۵۰ توسط کلاسیون تعریف شده است و برخی مفاهیم آن توسط بولتزانو و گیبس تعمیم داده شد. پس از آن چندین تعمیم از این مفهوم با انگیزه‌های متفاوت و کاربردها در موضوعات مختلف مانند مکانیک استاتیک، نظریه اطلاعات، سیستم‌های دینامیکی داده شد. فوجی و کامی آنتروپی عملگری نسبی را تعریف کردند و فوروتا مفهوم آنتروپی عملگری نسبی پارامتری را به عنوان تعمیم مفهوم آنتروپی عملگری نسبی ارائه کرد. این مفاهیم به صورت چشم انداز برخی توابع ساده قابل توصیف هستند و این توصیف مطالعه آن‌ها را ساده می‌کند. آنتروپی عملگری نسبی تابعی مقعر است و آنتروپی عملگری نسبی پارامتری برای برخی از پارامترهای مناسب مقعر خواهد بود. در این مقاله برخی خواص آنتروپی عملگری نسبی پارامتری از جمله کران‌های آن را مطالعه می‌کنیم. این کران‌ها، کران‌های آنتروپی عملگری نسبی که قبلاً توسط نویسندگان دیگر محاسبه شده‌اند را تعمیم خواهد داد و در حالت خاص نتایج قبلی را نتیجه خواهد داد.

**واژه‌های کلیدی:** آنتروپی عملگری نسبی، آنتروپی عملگری نسبی پارامتری، چشم انداز.

## ۱. مقدمه

در سراسر این مقاله  $B(H)$  نشانگر  $C^*$ -جبر توابع خطی کراندار روی فضای هیلبرت  $H$  با ضرب داخلی  $(\cdot, \cdot)$  می‌باشد. اگر  $A$  یک عملگر خود الحاق در  $B(H)$  باشد، آن را مثبت گوییم هرگاه به ازای هر  $h \in H$ ،  $\langle Ah, h \rangle \geq 0$  و می‌نویسیم  $A \geq 0$ . علاوه بر آن اگر  $A$  معکوس‌پذیر باشد می‌گوییم  $A$  اکیداً مثبت است و می‌نویسیم  $A > 0$ . برای عملگرهای  $A$  و  $B$  در  $B(H)$  می‌نویسیم  $A \geq B$  هرگاه  $A - B \geq 0$ . [۱]

تابع پیوسته حقیقی  $f$  روی بازه  $I$  محدب عملگری است هرگاه برای عملگرهای خود الحاق  $A$  و  $B$  با طیف در  $I$  و برای هر  $\alpha \in [0, 1]$  داشته باشیم:

$$f(\alpha A + (1 - \alpha)B) \leq \alpha f(A) + (1 - \alpha)f(B).$$

تابع کلاسیک چشم‌انداز<sup>۱</sup> وابسته به تابع  $f$  که در مجموعه محدب  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  تعریف شده یک تابع دو متغیره روی زیر مجموعه زیر است:

$$K = \left\{ (t, s) \mid s > 0, \frac{t}{s} \in C \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

و به صورت  $P_f(t, s) = f\left(\frac{t}{s}\right)s$  تعریف می‌شود. در سال ۲۰۰۸ افروس<sup>۲</sup> در [۲] چشم‌انداز عملگرهای جابجایی را مطرح کرد و نشان داد که چشم‌انداز یک تابع دو متغیره عملگری، محدب است. فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت ناجابجایی باشند. تابع چشم‌انداز دو متغیره عملگری به صورت زیر در [۳] تعریف شده است:

$$P_f(A, B) = B^{\frac{1}{2}} f\left(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}\right) B^{\frac{1}{2}}$$

و ثابت شده است که این تابع محدب است. فوجی و کامی در [۴] و [۵] مفهوم آنتروپی عملگری نسبی را برای عملگرهای اکیداً مثبت  $A$  و  $B$  به صورت زیر تعریف کردند:

$$S(A|B) = B^{\frac{1}{2}} \left( \ln B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right) B^{\frac{1}{2}}.$$

مفهوم آنتروپی عملگری نسبی وابسته به پارامتر  $q \in \mathbb{R}$  برای عملگرهای اکیداً مثبت  $A$  و  $B$  در [۶] توسط فوروتا به صورت زیر تعریف شده است:

$$S_q(A|B) = B^{\frac{1}{2}} \left( B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right)^q \left( \ln B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right) B^{\frac{1}{2}}.$$

در حالت خاص هرگاه  $q = 0$ ، در آن صورت آنتروپی عملگری نسبی حاصل می‌شود. به عبارت دیگر  $S_0(A|B) = S(A|B)$ .

همچنین یک بررسی ساده نشان می‌دهد

$$S_1(B|A) = -S(A|B).$$

توجه کنیم که آنتروپی عملگری نسبی  $S(A|B)$  چشم‌انداز تابع  $\log t$  است؛ یعنی،

$$S(A|B) = P_{\log t}(A|B).$$

همچنین آنتروپی عملگری نسبی پارامتری  $S_q(A|B)$  چشم‌انداز تابع  $t^q \log t$  است به این مفهوم که

$$S_q(A|B) = P_{t^q \log t}(A|B).$$

دراگوامیر<sup>۳</sup> در [۷] برخی از کران‌های تفاضل

$$S(A|B) - \frac{\ln m}{M-m}(MA - B) - \frac{\ln M}{M-m}(B - mA)$$

را برای عملگرهای اکیداً مثبت  $A$  و  $B$  و مقادیر مشخص  $0 < m < M$  در حالی که  $mB < A < MB$  به دست آورد. وی با استفاده از این واقعیت که در حالت کلی  $S(A|B)$  و  $S(B|A)$  با هم برابر نیستند در [۸] برخی

از کران‌های تفاضل

$$\frac{m \ln m}{M - m}(MA - B) + \frac{M \ln M}{M - m}(B - mA) + S(B|A)$$

را با همان مفروضات مساله قبل به دست آورد. در این مقاله کران‌های بالا و پایین آنتروپی عملگر نسبی وابسته به پارامتر  $q$  را به دست می‌آوریم. فرض کنیم  $0 \leq q \leq 1$ . تابع  $f$  با ضابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = t^q \ln t$$

که در آن  $\ln t$  تابع لگاریتم طبیعی است. تعریف می‌کنیم  $D_q := \{t > 0: f''(t) \leq 0\}$ .

در این صورت واضح است که تابع  $f$  روی  $D_q$  مقعر است. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد:

$$D_q = \left[ e^{\frac{2q-1}{q(q-1)}}, +\infty \right).$$

در نتیجه هرگاه  $q \rightarrow 0$  در آن صورت  $D_0 = (0, +\infty)$ .

لم ۱: تابع  $f(t) = t^q \ln t$  روی بازه

1. Perspective
2. Effros
3. Dragomir

**لم ۵:** [۱۰] فرض کنیم  $f_1, f_2$  و  $f_3$  توابع حقیقی مقدار روی بازه بسته  $I$  باشند. اگر برای  $t \in I$

$$f_1(t) \leq f_2(t) \leq f_3(t),$$

آنگاه برای عملگرهای اکیداً مثبت  $A$  و  $B$  نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$P_{f_1}(A, B) \leq P_{f_2}(A, B) \leq P_{f_3}(A, B).$$

در سراسر این مقاله برای راحتی تعاریف زیر را به کار خواهیم برد:

$$R(u) := \max \left\{ \frac{u-m}{M-m}, \frac{M-u}{M-m} \right\} =$$

$$\frac{1}{2} - \left| \frac{u - \frac{M+m}{2}}{M-m} \right|,$$

$$r(u) := \min \left\{ \frac{u-m}{M-m}, \frac{M-u}{M-m} \right\} =$$

$$\frac{1}{2} + \left| \frac{u - \frac{M+m}{2}}{M-m} \right|,$$

$$C_q(m, M) = \frac{m^q \ln m + M^q \ln M}{M-m}$$

$$- \left( \frac{M+m}{2} \right)^q \ln \left( \frac{M+m}{2} \right).$$

## ۲. نتایج اصلی

**قضیه ۱:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $m, M \in D_q$  با شرط  $m < M$  داشته باشیم  $mB \leq A \leq MB$ . آنگاه

$$0 \leq S_q(A|B) - \frac{m^q \ln m}{M-m} (MB - A) - \frac{M^q \ln M}{M-m} (A - mB) \leq \frac{m^q(1 + \ln m) - M^q(1 + \ln M)}{M-m} P_h(A, B)$$

که در آن  $h(t) = (t-m)(M-t)$

**اثبات:** با توجه به لم ۲ تابع  $t^q \ln t$  روی  $D_q$  مقعر است. با قرار دادن  $g(t) = t^q \ln t$ ،  $x = m$  و  $y = M$  برای  $\alpha = \frac{x-m}{M-m}$  در لم ۳ خواهیم داشت:

$$0 \leq x^q \ln x - \frac{m^q \ln m}{M-m} (M-x) - \frac{M^q \ln M}{M-m} (x-m) \leq$$

$$D_q = [e^{\frac{2q-1}{q(q-1)}}, +\infty)$$

مقعر است.

به عنوان یک نتیجه ساده ملاحظه می‌شود هرگاه  $q \rightarrow 0$  در آن صورت تابع  $f(t) = \ln t$  روی  $D_0$  مقعر است.

**لم ۲:** [۹] اگر  $g: C \rightarrow \mathbb{R}$  تابع مقعر روی مجموعه محدب  $C \subseteq \mathbb{R}$  باشد، آنگاه برای هر  $x, y \in C$  و  $\alpha \in [0, 1]$  داریم:

$$2 \left[ g \left( \frac{x+y}{2} \right) - \frac{g(x) + g(y)}{2} \right] r \leq g((1-\alpha)x + \alpha y) - ((1-\alpha)g(x) + \alpha g(y)) \leq 2 \left[ g \left( \frac{x+y}{2} \right) - \frac{g(x) + g(y)}{2} \right] R$$

در حالی که

$$r = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$$

و

$$R = \max\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

**لم ۳:** [۸] اگر  $g$  تابع مقعر و حقیقی مقدار روی بازه  $I$  باشد، آنگاه برای  $x$  و  $y$  در درون بازه  $I$  و  $\alpha \in [0, 1]$  داریم:

$$0 \leq g((1-\alpha)x + \alpha y) - ((1-\alpha)g(x) + \alpha g(y)) \leq \alpha(1-\alpha)(y-x)(g'_-(x) - g'_-(y)).$$

**لم ۴:** [۸] فرض کنیم  $g$  تابع حقیقی مقدار روی بازه باز  $I$  دو بار مشتق پذیر باشد. اگر ثابت‌های  $\beta_1$  و  $\beta_2$  وجود داشته باشند به طوری که برای هر

$$t \in I, \beta_1 \leq g''(t) \leq \beta_2,$$

آنگاه برای هر  $x, y \in I$  و  $\alpha \in [0, 1]$  داریم:

$$\frac{1}{2} \alpha(1-\alpha) \beta_1 (y-x)^2 \leq (1-\alpha)g(x) + \alpha g(y) - g((1-\alpha)x + \alpha y) \leq \frac{1}{2} \alpha(1-\alpha) \beta_2 (y-x)^2.$$

**اثبات:** با استفاده از لم ۳ و با قرار دادن  $g(t) = t^q \ln t$

$$\begin{aligned} & \text{برای } t \in D_q \text{ داریم:} \\ & 2 \left[ \left( \frac{x+y}{2} \right)^q \ln \left( \frac{x+y}{2} \right) - \frac{x^q \ln x + y^q \ln y}{2} \right] r \\ & \leq ((1-\alpha)x + \alpha y)^q \ln((1-\alpha)x + \alpha y) \\ & \quad - ((1-\alpha)x^q \ln x \\ & \quad + \alpha y^q \ln y) \\ & \leq r \left[ \left( \frac{x+y}{2} \right)^q \ln \left( \frac{x+y}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{x^q \ln x + y^q \ln y}{2} \right] R \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن  $x, y \in D_q$  و  $\alpha \in [0, 1]$  در حالی که  $r = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$

$$R = \max\{\alpha, 1 - \alpha\}. \quad 9$$

حال با جای‌گذاری  $x = m$ ،  $y = M$  و  $\alpha = \frac{x-m}{M-m}$  برای  $x \in [m, M]$  در نامساوی (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & 2C_q(m, M)r(x) \\ & \leq x^q \ln x - \frac{m^q \ln m}{M-m}(M-x) \\ & \quad - \frac{M^q \ln M}{M-m}(x-m) \\ & \leq rC_q(m, M)R(x). \end{aligned} \quad (۴)$$

بنا به لم ۵ و با محاسبه چشم انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۴) نتیجه به دست می‌آید.

**قضیه ۳:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $m, M \in D_q$  با شرط  $m < M$  داشته باشیم  $mB \leq A \leq MB$  آنگاه

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m^{q-2} (2q-1 + q(q-1) \ln m) P_h(A, B) \\ & \leq \frac{m^q \ln m}{M-m} (MB-A) \\ & \quad + \frac{M^q \ln M}{M-m} (A-mB) - S_q(A, B) \\ & \leq \frac{1}{2} M^{q-2} (2q-1 + q(q-1) \ln M) P_h(A, B) \end{aligned}$$

که در آن  $h(t) = (t-m)(M-t)$

**اثبات:** با استفاده از لم ۴ و با قرار دادن  $g(t) = t^q \ln t$  برای  $t \in D_q$  داریم:

$$\frac{1}{2} \alpha (1-\alpha) \beta_1 (y-x)^2$$

$$\frac{m^q(1 + \ln m) - M^q(1 + \ln M)}{M-m} h(x). \quad (۱)$$

بنا به لم ۵ و با محاسبه چشم انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۱) نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

**نتیجه ۱:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $m, M \in D_q$  با شرط  $m < M$  داشته باشیم  $mB \leq A \leq MB$  آنگاه

$$\begin{aligned} & 0 \leq S_q(A|B) - \frac{m^q \ln m}{M-m} (MB-A) \\ & \quad - \frac{M^q \ln M}{M-m} (A-mB) \\ & \leq \frac{1}{4} (M-m) (m^q (1 + \ln m) \\ & \quad - M^q (1 + \ln M)) B. \end{aligned}$$

**اثبات:** تابع  $h(t)$  تعریف شده در قضیه ۱، مقدار ماکزیمم خود را در  $t = \frac{M+m}{2}$  می‌گیرد و این مقدار ماکزیمم برابر است با

$$\frac{1}{4} (M-m)^2.$$

با جاگذاری این مقدار ماکزیمم در نامساوی (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & 0 \leq x^q \ln x - \frac{m^q \ln m}{M-m} (M-x) \\ & \quad - \frac{M^q \ln M}{M-m} (x-m) \\ & \leq \frac{1}{4} (M-m) (m^q (1 + \ln m) \\ & \quad - M^q (1 + \ln M)). \end{aligned} \quad (۲)$$

حال با استفاده از لم ۵ و با محاسبه چشم انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۲) نامساوی‌های مطلوب حاصل می‌شود.

**قضیه ۲:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $m, M \in D_q$  با شرط  $m < M$  داشته باشیم  $mB \leq A \leq MB$  آنگاه

$$\begin{aligned} & 2C_q(m, M)P_r(A, B) \\ & \leq S_q(A, B) - \frac{m^q \ln m}{M-m} (MB-A) \\ & \quad - \frac{M^q \ln M}{M-m} (A-mB) \\ & \leq 2C_q(m, M)P_R(A, B). \end{aligned}$$

$$\frac{\ln M}{M-m}(A-mB) \leq \frac{1}{4}(M-m)(\ln m - \ln M)B.$$

در قضیه ۲، هرگاه  $q \rightarrow 0$  نتیجه زیر به دست می‌آید که در واقع همان نتیجه دراگومیر است که در قضیه ۲ مرجع [۸] با روشی متفاوت ثابت شده است.

**نتیجه ۴:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $0 < m < M$  داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آنگاه

$$2C_0(m, M)P_r(A, B) \leq S(A, B) - \frac{\ln m}{M-m}(MB-A) - \frac{\ln M}{M-m}(A-mB) \leq 2C_0(m, M)P_r(A, B)$$

در قضیه ۳، هرگاه  $q \rightarrow 0$  نتیجه زیر حاصل می‌شود که در واقع منطبق بر قضیه ۴ در [۷] است و دراگومیر آن را با روشی دیگر ثابت کرده است.

**نتیجه ۵:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $0 < m < M$  داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آنگاه

$$\frac{1}{2M^2}P_h(A, B) \leq S(A|B) - \frac{\ln m}{M-m}(MB-A) - \frac{\ln M}{M-m}(A-mB) \leq \frac{1}{2m^2}P_h(A, B)$$

$$\begin{aligned} &\leq (1-\alpha)x^q \ln x + \alpha y^q \ln y \\ &- ((1-\alpha)x + \alpha y)^q \ln((1-\alpha)x + \alpha y) \\ &\leq \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\beta_2(y-x)^2 \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن  $\alpha \in [0, 1]$   $x, y \in D_q$  و

$$\begin{aligned} \beta_1 &= m^{q-2}(2q-1+q(q-1)\ln m), \\ \beta_2 &= M^{q-2}(2q-1+q(q-1)\ln M). \end{aligned}$$

حال با جای‌گذاری این مقادیر و  $x = m$  و  $y = M$  داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}m^{q-2}(2q-1+q(q-1)\ln m)h(x) \\ &\leq \frac{m^q \ln m}{M-m}(M-x) + \frac{M^q \ln M}{M-m}(x-m) \\ &\quad - x^q \ln x \\ &\leq \frac{1}{2}M^{q-2} \left( \frac{2q-1}{+q(q-1)\ln M} \right) h(x). \end{aligned} \quad (۶)$$

با مراجعه به لم ۵ و با محاسبه چشم‌انداز دو طرف نامساوی‌ها در (۶) نامساوی‌های مطلوب حاصل می‌شود. در قضیه ۱، هرگاه  $q \rightarrow 0$  کران‌های آنتروپی عملگری نسبی به صورت زیر به دست می‌آید:

**نتیجه ۲:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $0 < m < M$  داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آن‌گاه

$$0 \leq S(A|B) - \frac{\ln m}{M-m}(MB-A) - \frac{\ln M}{M-m}(A-mB) \leq \frac{\ln m - \ln M}{M-m}P_h(A, B)$$

که در آن  $h(t) = (t-m)(M-t)$ .

در نتیجه ۱، هرگاه  $q \rightarrow 0$  نتیجه زیر حاصل می‌شود که کران‌های جدیدی برای آنتروپی عملگری ارائه می‌شود:

**نتیجه ۳:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  عملگرهای اکیداً مثبت باشند به طوری که برای برخی  $0 < m < M$  داشته باشیم

$$mB \leq A \leq MB.$$

آنگاه

$$0 \leq S(A|B) - \frac{\ln m}{M-m}(MB-A) -$$

10. Nikoufar, I., *On operator inequalities of some relative operator entropies*. *Adv. Math.*, 2014. **259**: p. 376-383.

فهرست منابع

1. Bhatia, R., *Matrix Analysis*. 1997, New York: Springer-Verlag.
2. Effros, E.G., *A matrix convexity approach to some celebrated quantum inequalities*. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 2009. **106** p. 1006-1008.
3. Ebadian, A., I. Nikoufar, and M.E. Gordji, *Perspectives of matrix convex functions*. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 2011. **108**(18): p. 7313-7314.
4. Fujii, J.I. and E. Kamei, *Uhlmann's interpolational method for operator means*. *Math. Japon*, 1989. **34**(4): p. 541-547.
5. Fujii, J.I. and E. Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*. *Math. Japon*, 1989. **34**(3): p. 341-348.
6. Furuta, T., *Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators*. *Linear Algebra Appl*, 2004. **۳۸۱**: p. 219-235.
7. Dragomir, S.S., *Some inequalities for relative operator entropy*. Preprint RGMIA Res. Rep. Col l, 2015. **18**(145): p. 1-12.
8. Dragomir, S.S., *Further inequalities for relative operator entropy*. *RGMIA Res. Rep. Col l*, 2015. **18**(160): p. 1-11.
9. Dragomir, S.S., *Bounds for the normalized Jensen functional*. *Bull. Austral. Math. Soc*, 2006. **74**: p. 471-478.