

یک الگوریتم تکراری برای مسایل تعادل تعمیم یافته، نامساوی تغییراتی و نقطه ثابت مبتنی بر روش گرادیان افزوده

صدیقه جاهدی^{۱*}، مراد علی بیوند^۲

(^۱) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز

(^۲) دانشجو دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۳/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۷/۳۰

چکیده

مساله تعادل تعمیم یافته یک موضوع کاملاً عمومی در زمینه‌های مختلف می‌باشد. از جمله حالت‌های خاص آن می‌توان به مساله بهینه‌سازی، مساله نامساوی تغییراتی، مساله تعادل نش، و مساله مینیموم - ماکزیموم اشاره نمود. هدف این مقاله بررسی مساله تقریب یک جواب مشترک مجموعه جواب مساله تعادل تعمیم یافته، مساله نامساوی تغییراتی و مساله نقطه ثابت می‌باشد. در این مقاله، یک الگوریتم تکراری جدید بر اساس روش گرادیان افزوده معرفی و پیشنهاد می‌گردد. تحت شرایط مناسب، قضیه همگرایی ضعیف برای یافتن جواب مشترک یک مسأله‌ی تعادل تعمیم یافته، یک مسأله‌ی نامساوی تغییراتی و مجموعه‌ی نقاط ثابت یک خانواده‌ی متناهی از نگاشت‌های شبه انقباضی اکید اثبات می‌شود. نتایج این مقاله، تعدادی از نتایج طرح شده در مقالات مختلف را تعمیم داده و یا بهبود می‌بخشد. در انتها با ارایه یک مثال عددی کارایی الگوریتم بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مسأله تعادل، نامساوی تغییراتی، مسأله نقطه‌ی ثابت، نگاشت شبه انقباضی اکید

۱- مقدمه

فرض کنید C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H ، φ یک تابع حقیقی مقدار روی $C \times C$ و $A: C \rightarrow H$ یک نگاشت غیر خطی باشد. مسأله‌ی تعادل تعمیم یافته عبارت است از یافتن نقطه‌ای چون $x \in C$ به قسمی که برای هر $y \in C$

$$\phi(x, y) + \langle Ax, y - x \rangle \geq 0. \quad (1)$$

مجموعه‌ی جواب مسأله‌ی تعادل تعمیم یافته با $GEP(\varphi, A)$ نمایش داده می‌شود [۱۸ و ۱۳]. اگر $A = 0$ ، آنگاه مسأله‌ی تعادل تعمیم یافته به یک مسأله‌ی تعادل با مجموعه‌ی جواب $EP(\varphi, A)$ تقلیل پیدا می‌کند. اگر به ازای هر $x, y \in C$ ، $\varphi(x, y) = 0$ در این صورت مسأله‌ی تعادل تعمیم یافته به مسأله‌ی نامساوی تغییراتی زیر تبدیل می‌شود:

$$(2) \quad \text{«هدف یافتن } x \in C \text{ است}$$

به گونه‌ای که برای هر $y \in C$ ، نامساوی

$$\langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \text{ برقرار باشد.}»$$

مجموعه‌ی جواب مسأله‌ی نامساوی تغییراتی با نماد $VI(C, A)$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید $T: C \rightarrow C$ یک نگاشت و $F(T)$ بیانگر مجموعه‌ی نقاط ثابت T در C باشد. در یک فضای هیلبرت، نگاشت T شبه انقباضی اکید نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in C$ ، ثابت $0 \leq k < 1$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k \|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \quad (3)$$

که در آن I نگاشت همانی روی C است [۴]. در یک فضای هیلبرت، برای هر $x, y \in C$ ، رابطه (۳) با نامساوی

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \leq \|x - y\|^2 - \frac{1-k}{2} \|(x - y) - (Tx - Ty)\|^2 \quad (4)$$

معادل است. اگر در نامساوی (۳)، $k = 0$ ، در این صورت گوئیم نگاشت T ، غیر انبساطی است.

نگاشت $A: C \rightarrow C$ را یکنوا گویند اگر برای هر $x, y \in C$

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0;$$

و $-\beta$ یکنوای قوی معکوس است اگر به ازای هر $x, y \in C$ ، ثابت $\beta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \beta \|Ax - Ay\|^2.$$

نگاشت $A: C \rightarrow H$ ، L - لپ شیتز خوانده می‌شود هرگاه عدد حقیقی مثبت L وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x, y \in C$

$$\|Ax - Ay\| \leq L \|x - y\|.$$

برای $x \in H$ ، عضو یکتای $P_C x$ در C ، وجود دارد طوری که به ازای هر $y \in C$ ، $\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|$. عملگر $P_C: H \rightarrow C$ ، که تصویر متریک نیز نامیده می‌شود [۵]، یک نگاشت غیر انبساطی است و برای هر $x \in H$ و هر $y \in C$ ، $P_C x \in C$ و

$$\langle x - P_C x, P_C x - y \rangle \geq 0 \quad (5)$$

برای یک مسأله‌ی نامساوی تغییراتی، به ازای هر $\forall \lambda > 0$ ، رابطه‌ی دوسویه‌ی زیر برقرار است:

$$q \in VI(C, A) \Leftrightarrow q = P_C(q - \lambda Aq). \quad (6)$$

مسأله‌ی (۱) یک مسأله‌ی عمومی است و مسائل نقطه ثابت، نامساوی تغییراتی، مسأله‌ی نقطه‌ی زینی، مسأله‌ی تعادل نش و ... را به عنوان حالت‌های خاص خود شامل می‌شود [۷ و ۳]. علاوه بر این بسیاری از مسائل در بهینه سازی، اقتصاد، فیزیک و حمل و نقل به یافتن جواب این مسأله و حالت‌های ویژه‌ی آن برمی‌گردد. (به عنوان مثال به [۲، ۳ و ۶] رجوع کنید).

برای حل مسائل (۱)، (۲) و مسأله‌ی نقطه‌ی ثابت روش‌های متعددی پیشنهاد شده است ([۱]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۸] و مراجع ذیل آن‌ها). در سال ۲۰۰۷ میلادی، مارینو و ژو [۱۰] برای هر $n \in \mathbb{N}$ و نقطه‌ی آغازین x_0 ، الگوریتم زیر را به عنوان توسیعی از نتایج برودر و پتریشین [۴] و

را به منظور یافتن جواب مشترک یک مسأله‌ی تعادل و مسأله‌ی نقطه‌ی ثابت یک نگاشت غیر انبساطی معرفی کردند.

همان طور که می‌دانیم نگاشت‌های شبه انقباضی اکید کاربردهای ارزشمند بیشتری نسبت به نگاشت‌های غیر انبساطی از جمله در حل مسایل معکوس دارند [۱۵]. علاوه بر این به یافتن عضو مشترک مجموعه‌ی نقاط ثابت خانواده‌ی از نگاشت‌های غیر خطی نیز می‌پردازند. (به عنوان مثال [۸] را ببینید).

در این مقاله با الهام از کارهای نادژکینا و تاکاهاشی [۱۱] و نیز مارینو و ژو [۱۰]، الگوریتم جدیدی را به منظور یافتن عضو مشترک مجموعه‌ی نقاط ثابت خانواده‌ی از نگاشت‌های شبه انقباضی اکید که همچنین عضو مشترک مجموعه‌ی جواب یک مسأله‌ی تعادل تعمیم یافته، مجموعه‌ی نقاط ثابت یک نگاشت غیر انبساطی و مجموعه‌ی جواب یک مسأله‌ی نامساوی تغییراتی است معرفی می‌کنیم. برای تخمین الگوریتم پیشنهادی، قضیه‌ی همگرایی ضعیف دنباله‌ی تولید شده توسط این الگوریتم را بیان و آن را اثبات می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این قضیه توسعه و بهبود نتایج ارائه شده توسط نادژکینا و تاکاهاشی [۱۱]، مارینو و ژو [۱۰] و تعدادی از دیگر مولفین می‌باشد. نشان می‌دهیم که این الگوریتم قادر است مثل الگوریتم معرفی شده در قضیه‌ی ۱،۴ از مقاله تادا و تاکاهاشی [۱۷]، با یک روش و رهیافت متفاوت، برای یافتن جواب مشترک مسأله‌ی نقطه‌ی ثابت یک نگاشت غیر انبساطی و یک مسأله‌ی تعادل به کار رود.

۲- تعاریف و پیش نیازهای مقدماتی

فرض کنید نمادهای \longrightarrow و \xrightarrow{w} به ترتیب نشان دهنده همگرایی قوی و ضعیف باشند. با توجه به شرط اویپال [۱۲] برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در H که $x_n \xrightarrow{w} x$ نامساوی

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

به ازای هر $x \neq y$ ، $y \in H$ برقرار است.

الگوریتم مان [۹] معرفی کردند:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n.$$

آن‌ها نشان دادند که تحت شرایط مناسب، $\{x_n\}$ دنباله‌ی تولید شده توسط این الگوریتم، به نقطه‌ی ثابتی از نگاشت T همگرایی ضعیف است. برای هر $n \in N$ و نقطه‌ی آغازین x_0 ، تاکاهاشی و توپودا [۱۹] یک روش تکراری را به منظور یافتن جواب مشترک مسأله‌ی نقطه‌ی ثابت نگاشت غیر انبساطی T و مسأله‌ی نامساوی تغییراتی برای یک نگاشت β -یکنوای قوی معکوس A ، به صورت

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) TP_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

پیشنهاد دادند، که در آن $\{\alpha_n\}$ و $\{\lambda_n\}$ به ترتیب دنباله‌هایی در بازه‌های $(0, 1)$ و $(0, 2\beta)$ هستند. از طرف دیگر، به منظور یافتن عضوی از $F(T) \cap VI(C, A)$ ، الگوریتم دیگری مبتنی بر روش گرادیان افزوده توسط نادژکینا و تاکاهاشی [۱۱] به صورت

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) TP_C(x_n - \lambda_n A y_n), \end{cases}$$

به ازای هر $n \in N$ ، پیشنهاد شد که در آن A یک نگاشت یکنوا و L -لیپ شیتز، $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای در بازه $(0, 1)$ و $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای در بازه‌ی $(0, \frac{1}{L})$ است. آن‌ها نشان دادند که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ ، تولید شده توسط این الگوریتم، به عضو یکسانی از $F(T) \cap VI(C, A)$ همگرایی ضعیف است. تحت شرایط مناسب، تادا و تاکاهاشی [۱۷]، برای هر $n \in N$ و نقطه‌ی آغازین x_0 ، الگوریتم

$$\begin{cases} \phi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \\ \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T u_n, \\ \forall n \in N. \end{cases} \quad (Y)$$

$$\varphi(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0.$$

لم ۲-۲ [۷] فرض کنید همه شرایط لم ۲-۱ صادق باشند. اگر برای یک $r > 0$ دلخواه، نگاشت

$$T_r : H \rightarrow C$$

$$T_r x = \{z \in C : \varphi(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \forall y \in C\},$$

تعریف کنیم، در آن صورت

۱- نگاشت T_r تک مقداری است.

۲- نگاشت T_r غیر انبساطی پایدار است، یعنی برای هر $x, y \in H$

$$\|T_r x - T_r y\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y \rangle.$$

۳- مجموعه نقاط ثابت نگاشت T_r و مجموعه‌ی جواب

مسأله‌ی تعادل یکی هستند یعنی

$$F(T_r) = EP(\varphi)$$

۴- مجموعه‌ی جواب مسأله‌ی تعادل، $EP(\varphi)$ ، بسته و محدب است.

به منظور دستیابی به نتایج اصلی مقاله، به لم‌های زیر نیازمند هستیم:

لم ۳-۲ [۱۶] فرض کنید H یک فضای هیلبرت

حقیقی و به ازای $\{t_n\}, a, b \in (0, 1)$ دنباله‌ای در بازه‌ی $[a, b]$ باشد. اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در H باشند به گونه‌ای که برای یک $r \geq 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq r, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq r$$

و $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n x_n + (1 - t_n) y_n\| = r$ در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

لم ۴-۲ [۱] فرض کنید C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی،

بسته و محدب از فضای هیلبرت H و $T : C \rightarrow C$ یک نگاشت شبه انقباضی اکید با ثابت k باشد. در این صورت نگاشت $I - S$ نیم بسته است، یعنی اگر $\{x_n\}$

نگاشت مجموعه مقدار $Q : H \rightarrow 2^H$ ، یکنواست اگر برای هر $x, y \in H$ و $f \in Q(x)$ و $g \in Q(y)$ نتیجه بگیریم $\langle x - y, f - g \rangle \geq 0$. نگاشت

$Q : H \rightarrow 2^H$ بیشین (ماکزیمال) است اگر نمودار $G(Q)$ از Q به طور سره مشمول نمودار نگاشت

یکنوای دیگری نباشد. ثابت می‌شود که نگاشت یکنوای Q بیشین است اگر تنها اگر برای $(x, f) \in H \times H$

نامساوی $\langle x - y, f - g \rangle \geq 0$ به ازای هر $(y, g) \in G(Q)$ نتیجه دهد که $f \in Q(x)$. فرض کنید $A : C \rightarrow H$

یک نگاشت یکنوای پیوسته و $N_C x$ مخروط نرمال C در نقطه‌ی x باشد. در حقیقت $N_C x$ به صورت

$$N_C x = \{w \in H : \langle x - w, u \rangle \geq 0, \forall u \in C\}$$

تعریف می‌شود. اگر

$$Q(x) = \begin{cases} Ax + N_C x & x \in C \\ \emptyset & x \notin C \end{cases}, \quad (۸)$$

آنگاه Q نگاشت یکنوای بیشین است و $0 \in Q(x)$ اگر و تنها اگر $x \in VI(A, C)$. برای جزئیات بیشتر [۱۴] را ببینید.

در این مقاله، تابع $\varphi : C \times C \rightarrow R$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱-آ) به ازای هر $x \in C$

$$\varphi(x, x) = 0.$$

(۲-آ) به ازای هر $x, y \in C$

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, x) \leq 0.$$

(۳-آ) به ازای هر $x, y, z \in C$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(tz + (1-t)x, y) \leq \varphi(x, y).$$

(۴-آ) به ازای هر $x \in C$ ، $y \mapsto \varphi(x, y)$ ، محدب و نیم پیوسته ی پایینی است.

برای حل مسائل تعادل، لم‌های زیر کاربرد وسیعی دارند:

لم ۱-۲ [۳] فرض کنید C یک زیرمجموعه ی

ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H و $R : C \times C \rightarrow R$ تابعی باشد که در شرایط (۱-آ) تا

(۴-آ) صدق می‌کند. اگر $r > 0$ و $x \in H$ در آن صورت $z \in C$ وجود دارد به قسمی که برای هر

$$y \in C$$

(۱) به ازای $\tau_1, \tau_2 \in (0, 2\beta)$ دنباله‌ی $\{r_n\}$ متعلق به بازه‌ی $[\tau_1, \tau_2]$ است.

(۲) به ازای $c, d \in (0, \frac{1}{L})$ دنباله‌ی $\{\lambda_n\}$ متعلق به بازه‌ی $[c, d]$ است.

(۳) به ازای هر $n \in N$ ، $k < \alpha_{n,0} < 1$ و $\alpha_{n,i} \in (0, 1)$ و $i = 1, \dots, m$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k) = \infty$$

(۴) به ازای $a, b \in (0, 1)$ و هر $n \in N$ ، $\gamma_n + \sum_{i=0}^m \alpha_{n,i} = 1$ و $\gamma_n \in [a, b]$

در آن صورت دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ و نیز دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{u_n\}$ به یک نقطه‌ی یکسان از Ω همگرایی ضعیف است.

اثبات: روند اثبات را به γ گام تقسیم می‌کنیم.

گام اول. ثابت می‌کنیم دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ ، $\{u_n\}$ و $\{t_n\}$ با ضابطه‌ی $t_n = P_C(u_n - \lambda_n A y_n)$ کراندار هستند. اولاً $I - r_n B$ یک نگاشت غیر انبساطی است، در حقیقت برای هر $x, y \in C$

$$\begin{aligned} & \|(I - r_n B)x - (I - r_n B)y\| \leq \\ & \|x - y\|^2 + r_n^2 \|Bx - By\|^2 - \\ & 2r_n \langle x - y, Bx - By \rangle \\ & \leq \|x - y\|^2 + r_n^2 \|Bx - By\|^2 \\ & - 2r_n \beta \|Bx - By\|^2 \\ & = \|x - y\|^2 + r_n(r_n - 2\beta) \|Bx - By\|^2 \\ & \leq \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

بنا بر (۹)، برای هر $y \in C$

$$\begin{aligned} & \phi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - \\ & (I - r_n B)x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (10)$$

لم ۲-۲ و نامساوی (۱۰) نشان می‌دهند که $q \in \Omega$ و برای یک $u_n = T_{r_n}(x_n - r_n Bx_n)$

$q = T_{r_n}(q - r_n Bq)$ با توجه به غیر انبساطی بودن $I - r_n B$ داریم

دنباله‌ای در C باشد به گونه‌ای که $x_n \xrightarrow{w} q$ و $x_n - Sx_n \rightarrow 0$ ، آنگاه $q \in F(S)$.

۳- نتایج اصلی

در این بخش به معرفی الگوریتم جدیدی برای یافتن جواب مشترک مسائل (۱)، (۲) و مسائل نقطه ثابت خانواده‌ای از نگاشتها می‌پردازیم. ما هم چنین قضیه‌ی همگرایی ضعیف دنباله‌ی تولید شده توسط این الگوریتم را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳-۱ فرض کنید C یک زیر مجموعه‌ی

محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H و $\varphi: C \times C \rightarrow R$ یک تابع باشد که در شرایط (۱-آ) - (۴-آ) صدق کند. به علاوه فرض کنید $S: C \rightarrow C$ یک نگاشت غیر انبساطی و $T_i: C \rightarrow C$ ، $i = 1, \dots, m$ نگاشتها شبه انقباضی اکید با ثابت k_i ، $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$ یک نگاشت یکنوا و لیپ شیتز با ثابت L و B یک نگاشت $\beta -$ یکنوا ی قوی معکوس از C به H باشد. هم چنین فرض کنید مجموعه‌ی

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcap_{i=1}^m F(T_i) \cap F(S) \\ & \cap \forall I(A, C) \cap GEP(\phi, B) \end{aligned}$$

ناتهی باشد. تحت شرایط فوق، برای نقطه‌ی اولیه‌ی $x_1 \in C$ دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ را برای هر $n \in N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \phi(u_n, y) + \langle Bx_n, y - u_n \rangle + \\ \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n A u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} u_n + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} T_i u_n + \\ \gamma_n SP_C(u_n - \lambda_n A y_n), \end{cases} \quad (9)$$

که در آن دنباله‌های $\{\alpha_{n,i}\}$ ، $\{\lambda_n\}$ ، $\{r_n\}$ و $\{y_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_{n,i} \alpha_{n,j} [\|u_n - q\|^2 + k_i \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &+ \|u_n - q\|^2 + k_j \|T_j u_n - u_n\|^2] \\ &= \sum_{i,j=1}^m \alpha_{n,i} \alpha_{n,j} \|u_n - q\|^2 + \\ &\sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} \sum_{j=1}^m \alpha_{n,j} k_i \|T_i u_n - u_n\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

چون S غیر انبساطی است، بنابراین این

$$\|St_n - q\| \leq \|t_n - q\| \leq \|u_n - q\|. \quad (15)$$

به علاوه از (۴) برای $i = 1, \dots, m$ ، داریم

$$\langle u_n - q, T_i u_n - q \rangle \leq \|u_n - q\|^2 - \rho_i \|u_n - T_i u_n\|^2. \quad (16)$$

و هم چنین با توجه بامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\langle u_n - q, St_n - q \rangle \leq \|u_n - q\| \|St_n - q\| \leq \|u_n - q\|^2. \quad (17)$$

از سوی دیگر از (۳) و (۱۵) داریم

$$\begin{aligned} &\langle T_i u_n - q, St_n - q \rangle \leq \|T_i u_n - q\| \|St_n - q\| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|T_i u_n - q\|^2 + \|St_n - q\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2} [\|u_n - q\|^2 + k_i \|T_i u_n - u_n\|^2] + \|u_n - q\|^2 \\ &\leq \|u_n - q\|^2 + \frac{1}{2} k_i \|T_i u_n - u_n\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

با جایگذاری (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) در (۱۳) داریم

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &\leq (\alpha_{n,0}^2 + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{n,i} \alpha_{n,j} + \\ &\gamma_n^2 + 2 \sum_{i=1}^m \alpha_{n,0} \alpha_{n,i} + 2 \alpha_{n,0} \gamma_n + \\ &2 \sum_{i=1}^m \gamma_n \alpha_{n,i}) \|u_n - q\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_n - q\|^2 &= \|T_{r_n}(x_n - r_n Bx_n) - T_{r_n}(q - r_n Bq)\|^2 \\ &\leq \|x_n - r_n Bx_n - (q - r_n Bq)\|^2 \\ &\leq \|x_n - q\|^2. \end{aligned}$$

با اثباتی شبیه قسمت اول قضیه ی ۱،۳ از [۱۱] و نامساوی (۱۱) برای $q \in \Omega$ داریم

$$\begin{aligned} \|t_n - q\| &\leq \|u_n - q\|^2 + \\ &(\lambda_n^2 L^2 - 1) \|u_n - y_n\|^2 \leq \\ \|u_n - q\| &\leq \|x_n - q\|. \end{aligned} \quad (12)$$

قرار می‌دهیم $\rho_i = \frac{1-k_i}{2}$ ، $i = 1, \dots, m$ ، از (۹) رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &= \alpha_{n,0}^2 \|u_n - q\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - q) \right\|^2 \\ &+ \gamma_n^2 \|St_n - q\|^2 + \\ &2 \alpha_{n,0} \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} \langle u_n - q, T_i u_n - q \rangle \\ &+ 2 \alpha_{n,0} \gamma_n \langle u_n - q, St_n - q \rangle + \\ &2 \sum_{i=1}^m \gamma_n \alpha_{n,i} \langle T_i u_n - q, St_n - q \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

از طرف دیگر با توجه به (۳) داریم

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - q) \right\|^2 = \\ &\sum_{i,j=1}^m \alpha_{n,i} \alpha_{n,j} \langle T_i u_n - q, T_j u_n - q \rangle \\ &\leq \sum_{i,j=1}^m \alpha_{n,i} \alpha_{n,j} \|T_i u_n - q\| \|T_j u_n - q\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_{n,i} \alpha_{n,j} (\|T_i u_n - q\|^2 + \|T_j u_n - q\|^2) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k) \|u_n - T_i u_n\|^2 \leq \|x_1 - q\|^2 < \infty.$$

با استدلال مشابه اثبات قضیه‌ی ۱۳ از [۱۰] داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - T_i u_n\| = 0. \tag{۲۰}$$

با توجه به (۳)، (۱۲) و محدب بودن $\|\cdot\|^2$ داریم

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &\leq \alpha_{n,0} \|u_n - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} \|T_i u_n - q\|^2 + \gamma_n \|S t_n - q\|^2 \\ &\leq \alpha_{n,0} \|u_n - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (\|u_n - q\|^2 + k_i \|u_n - T_i u_n\|^2) + \gamma_n \|t_n - q\|^2 \\ &\leq (\alpha_{n,0} + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i}) \|u_n - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2 \\ &\quad + \gamma_n (\|u_n - q\|^2 + (\lambda_n^2 L^2 - 1) \|u_n - y_n\|^2) \\ &\leq \|u_n - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2 + \gamma_n (\lambda_n^2 L^2 - 1) \|u_n - y_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2 + \gamma_n (\lambda_n^2 L^2 - 1) \|u_n - y_n\|^2. \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} \gamma_n (1 - \lambda_n^2 L^2) \|u_n - y_n\|^2 &\leq \|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2. \end{aligned}$$

این رابطه همراه با (۲۰) نتیجه می‌دهند

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - y_n\| = 0. \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i,j=1}^m \alpha_{n,i} \alpha_{n,j} k_i \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &- \sum_{i=1}^m 2\alpha_{n,0} \alpha_{n,i} \rho_i \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^m \gamma_n \alpha_{n,i} k_i \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &= \|u_n - q\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} [2\alpha_{n,0} \rho_i \\ &- \sum_{j=1}^m \alpha_{n,j} k_i - \gamma_n k_i] \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &= \|u_n - q\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} [2\alpha_{n,0} \rho_i - (1 - \alpha_{n,0}) k_i] \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &= \|u_n - q\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k_i) \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &\leq \|u_n - q\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k) \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - q\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k) \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - q\|^2. \tag{۱۹} \end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌ی $\{\|x_n - q\|\}$ ، نامنفی و ناصعودی بوده و کراندارای دنباله‌ی $\{x_n\}$ نتیجه می‌شود. رابطه‌های (۹) و (۱۲) نشان می‌دهند که دنباله‌های $\{u_n\}$ ، $\{y_n\}$ و $\{t_n\}$ کراندارند.

گام دوم. نشان می‌دهیم زیردنباله‌های همگرایی $\{x_{n_i}\}$ ، $\{y_{n_i}\}$ ، $\{u_{n_i}\}$ و $\{t_{n_i}\}$ به ترتیب از دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ ، $\{u_n\}$ و $\{t_n\}$ ، با حد همگرایی یکسان وجود دارد. برای این منظور شرط ۳ و نامساوی (۱۹) نشان می‌دهند که برای هر $i = 0, 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} &\alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k) \|u_n - T_i u_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین، برای هر $i = 0, 1, \dots, m$

به علاوه

$$\begin{aligned} &\leq \alpha_{n,0} \|x_n - q\|^2 + \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} + \gamma_n\right) \\ &\|u_n - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2 \\ &\leq \alpha_{n,0} \|x_n - q\|^2 + (1 - \alpha_{n,0}) \\ &[\|x_n - q\|^2 - \|u_n - x_n\|^2] \\ &+ \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2 \\ &= \|x_n - q\|^2 - (1 - \alpha_{n,0}) \|u_n - x_n\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_{n,0}) \|u_n - x_n\|^2 &\leq \|x_n - q\|^2 \\ - \|x_{n+1} - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} k_i \|u_n - T_i u_n\|^2, \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x_n\| = 0. \quad (25)$$

با توجه به کرانداری دنباله‌های $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ ، $\{u_n\}$ و $\{t_n\}$ در فضای هیلبرت H و معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳) و (۲۵) نتیجه می‌گیریم که زیر دنباله‌های همگرایی ضعیف $\{x_{n_i}\}$ ، $\{y_{n_i}\}$ ، $\{u_{n_i}\}$ و $\{t_{n_i}\}$ با حد همگرایی یکسان، مانند p ، وجود دارند.

گام سوم. نشان می‌دهیم که p ، نقطه‌ی ثابت مشترک نگاشت‌های T_i ، $i = 1, \dots, m$ ، است به عبارتی نشان می‌دهیم $p \in \bigcap_{i=1}^m F(T_i)$. با توجه به رابطه‌ی (۲۰)، برای هر $i = 1, \dots, m$ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - T_i u_n\| = 0$ با توجه به خاصیت نیم بسته بودن نگاشت‌های T_i ، $i = 1, \dots, m$ ، واضح است که برای هر $i = 1, \dots, m$ $p \in \bigcap_{i=1}^m F(T_i)$ ، بنابراین $p \in F(T_i)$.

گام چهارم. نشان می‌دهیم که p ، نقطه‌ی ثابت نگاشت S است. برای این منظور با استفاده از گام اول برای $q \in \Omega$ قرار می‌دهیم $d = \|x_n - q\| \geq 0$

پس

$$\begin{aligned} \|y_n - t_n\| &= \left\| \begin{matrix} P_C(u_n - \lambda_n A u_n) \\ P_C(u_n - \lambda_n A y_n) \end{matrix} \right\| \\ &\leq \|(u_n - \lambda_n A u_n) - (u_n - \lambda_n A y_n)\| \\ &= \lambda_n \|A y_n - A u_n\| \\ &\leq \lambda_n \|L y_n - u_n\|. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - t_n\| = 0. \quad (22)$$

از رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - t_n\| = 0. \quad (23)$$

اکنون نشان می‌دهیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x_n\| = 0$ می‌دانیم

$$\begin{aligned} \|u_n - q\|^2 &= \|T_{r_n}(x_n - r_n B x_n) - T_{r_n}(q - r_n B q)\|^2 \\ &\leq \langle T_{r_n}(x_n - r_n B x_n) - T_{r_n}(q - r_n B q), \\ &(x_n - q) - r_n(B x_n - B q) \rangle \\ &= \langle u_n - q, x_n - q \rangle - r_n \langle u_n - q, B x_n - B q \rangle \\ &\leq \langle u_n - q, x_n - q \rangle - r_n \beta \|B x_n - B q\|^2 \\ &\leq \langle u_n - q, x_n - q \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} [\|u_n - q\|^2 + \|x_n - q\|^2 - \|u_n - x_n\|^2]. \end{aligned}$$

پس

$$\|u_n - q\|^2 \leq \|x_n - q\|^2 - \|u_n - x_n\|^2. \quad (24)$$

با توجه به محدب بودن $\|\cdot\|^2$ و نامساوی (۲۴) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &\leq \alpha_{n,0} \|u_n - q\|^2 + \\ &\sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} \|T_i u_n - q\|^2 + \gamma_n \|S t_n - q\|^2 \\ &\leq \alpha_{n,0} \|x_n - q\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (\|u_n - q\|^2 \\ &+ k_i \|u_n - T_i u_n\|^2) + \gamma_n \|t_n - q\|^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} & [St_n - q + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n)] \\ & - [u_n - q + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n)] \end{aligned} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \|St_n - u_n\| = 0.$$

چون $\|St_n - t_n\| \leq \|St_n - u_n\| + \|u_n - t_n\|$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \|St_n - t_n\| = 0$. اکنون با توجه به ویژگی نیم بسته بودن S نتیجه می‌گیریم که $p \in F(S)$.

گام پنجم. نشان می‌دهیم که $p \in VI(A, C)$. فرض کنید $N_C x$ مخروط نرمال روی C در x و Q نگاشت یکنوای بیشین، به صورت تعریف شده در (۸) باشد. با توجه به این که $(x, u) \in G(Q)$ ، پس $u - Ax \in N_C x$ چون $y_n = P_C(u_n - \lambda_n A u_n) \in C$.

$$\langle x - y_n, u - Ax \rangle \geq 0. \tag{۲۷}$$

به علاوه، با استفاده از ویژگی نگاشت تصویر داریم $\langle x - y_n, y_n - (u_n - \lambda_n A u_n) \rangle \geq 0$,

و در نتیجه

$$\langle x - y_n, \frac{y_n - u_n}{\lambda_n} + A u_n \rangle \geq 0.$$

لذا با توجه به (۲۷) داریم

$$\begin{aligned} \langle x - y_{n_i}, u \rangle & \geq \langle x - y_{n_i}, Ax \rangle \\ & \geq \langle x - y_{n_i}, Ax \rangle - \langle x - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - u_{n_i}}{\lambda_{n_i}} + A u_{n_i} \rangle \\ & = \langle x - y_{n_i}, Ax - A y_{n_i} \rangle + \langle x - y_{n_i}, A y_{n_i} - A u_{n_i} \rangle \\ & \quad - \langle x - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - u_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \\ & \geq \langle x - y_{n_i}, A y_{n_i} - A u_{n_i} \rangle - \\ & \quad \langle x - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - u_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle. \end{aligned} \tag{۲۸}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - q\| & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (\alpha_{n,0} + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i}) u_n \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n) \right. \\ & \quad \left. + \gamma_n St_n - \gamma_n q - (1 - \gamma_n) q \right\| \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (1 - \gamma_n)(u_n - q) + \gamma_n (St_n - q) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n) \right\| \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \gamma_n [St_n - q + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n)] \right. \\ & \quad \left. + (1 - \gamma_n) [u_n - q + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n)] \right\| \\ & = d. \end{aligned} \tag{۲۶}$$

بنابراین از رابطه‌ی (۲۰) داریم

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| St_n - q + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n) \right\| & \leq \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|St_n - q\| + \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n) \right\|) & \\ \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|t_n - q\| + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} \|T_i u_n - u_n\|) & \\ \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - q\| + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} \|T_i u_n - u_n\|) & \\ \leq d. & \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| u_n - q + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n) \right\| & \leq \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|u_n - q\| + \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} (T_i u_n - u_n) \right\|) & \\ \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - q\| + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} \|T_i u_n - u_n\|) & \\ \leq d. & \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از لم ۲-۳ و رابطه‌ی (۲۶) داریم

$$\begin{aligned} & \text{از شرایط (۱-آ)، (۲-آ) و نامساوی (۳۰) داریم} \\ 0 &= \varphi(y_t, y_t) \leq t\varphi(y_t, y) + (1-t)\varphi(y_t, p) \\ &\leq t\varphi(y_t, y) + (1-t)\langle y_t - p, By_t \rangle \\ &= t\varphi(y_t, y) + (1-t)t\langle y - p, By_t \rangle \\ &\leq \varphi(y_t, y) + (1-t)\langle y - p, By_t \rangle. \end{aligned}$$

اگر $t \rightarrow 0$ ، آنگاه برای هر $y \in C$ ،
 $\varphi(p, y) + \langle y - p, Bp \rangle \geq 0$.
 به عبارت دیگر، $p \in GEP(\varphi, B)$.

گام هفتم. نشان می‌دهیم که $x_n \xrightarrow{w} p$ برای این منظور کافی است نشان دهیم هر زیر دنباله‌ی همگرای دلخواه از $\{x_n\}$ به p همگرای ضعیف است. گام‌های سوم تا ششم نشان می‌دهند که $p \in \Omega$. توجه به گام دوم زیر دنباله‌ای مانند $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_{n_i} \xrightarrow{w} p$ فرض کنید $\{x_{n_j}\}$ دنباله‌ی دیگری از $\{x_n\}$ باشد که به نقطه‌ای چون $p^* \in \Omega$ ، $p^* \neq p$ همگرا است. بنابر شرط اویبال
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - p\| <$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - p^*\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p^*\|$
 $= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - p^*\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - p\|$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$,

و این یک تناقض است. بنابراین $p^* = p$ و $x_n \xrightarrow{w} p$ به طور مشابه می‌توان دید که $y_n \xrightarrow{w} p$ و $u_n \xrightarrow{w} p$ اکنون اثبات تمام است.

ملاحظه ۳-۱ چون $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ شبیه اثبات قضیه‌ی ۱،۳ از [۱۹]، می‌توان دید که
 $p = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\Omega(x_n)$
 نتایج زیر به طور مستقیم از قضیه ۳-۱ به دست می‌آیند.

حال اگر در (۲۸)، $i \rightarrow \infty$ ، با توجه به (۲۱) و این حقیقت که A یک نگاشت پیوسته و لیب شیتز است، نتیجه می‌شود که $\langle x - p, u \rangle \geq 0$. پس بنا بر یکنوایی بیشین Q ، $0 \in Q(p)$ و در نتیجه
 $p \in VI(A, C)$.

گام ششم. نشان خواهیم داد که p عضوی از $GEP(\varphi, B)$ است. با توجه به (۱۰) و شرط (۲-آ)، برای هر $y \in C$ داریم

$$\frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - (I - r_n B)x_n \rangle \geq \varphi(y, u_n).$$

بنابراین برای هر $y \in C$ ،

$$\langle y - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} + Bx_{n_i} \rangle \geq \varphi(y, u_{n_i}). \quad (۲۹)$$

به ازای $t \in (0, 1]$ و $y \in C$ قرار می‌دهیم $y_t = ty + (1-t)p$ چون $y_t \in C$ ، بنابراین با توجه به (۲۹)،

$$\begin{aligned} \langle y_t - u_{n_i}, By_t \rangle &\geq \langle y_t - u_{n_i}, By_t \rangle - \\ &\langle y_t - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} + Bx_{n_i} \rangle + \phi(y_t, u_{n_i}) \\ &= \langle y_t - u_{n_i}, By_t - Bu_{n_i} \rangle + \langle y_t - u_{n_i}, Bu_{n_i} - Bx_{n_i} \rangle \\ &\quad - \langle y_t - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \rangle + \phi(y_t, u_{n_i}). \end{aligned}$$

از رابطه‌ی (۲۵) نتیجه می‌شود که $\|Bu_{n_i} - Bx_{n_i}\| \rightarrow 0$ به علاوه، چون B یک نگاشت β -یکنوای قوی معکوس است پس $\langle y_t - u_{n_i}, By_t - Bu_{n_i} \rangle \geq 0$ اکنون اگر $i \rightarrow \infty$ ،

$$\text{به روشنی } \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \rightarrow 0 \text{ و } u_{n_i} \xrightarrow{w} p$$

نتایج و نیز شرط (۴-آ) نشان می‌دهند که

$$\langle y_t - p, By_t \rangle \geq \varphi(y_t, p). \quad (۳۰)$$

یک نگاشت غیر انبساطی، A یک نگاشت یکنوا و لیپ شیتز با ثابت L و مجموعه‌ی

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^m F(T_i) \cap F(S) \cap VI(A, C) \cap GEP(\phi, B)$$

ناتهی باشد. تحت شرایط فوق، برای نقطه‌ی اولیه‌ی $x_1 \in C$ ، دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ را برای هر $n \in N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \phi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C; \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n A u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) S P_C(u_n - \lambda_n A y_n), \end{cases}$$

که به ازای $a, b \in (0, 1)$ ، دنباله‌ی $\{\alpha_n\}$ در بازه‌ی $[a, b]$ قرار دارد و دنباله‌های $\{r_n\}$ و $\{\lambda_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(۱) برای دنباله‌ی $\{r_n\}$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\liminf r_n > 0$.

(۲) به ازای $c, d \in (0, \frac{1}{L})$ ، دنباله‌ی $\{\lambda_n\}$ متعلق به بازه‌ی $[c, d]$ است.

در آن صورت دنباله‌ی $\{x_n\}$ و نیز دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{u_n\}$ به یک نقطه‌ی یکسان از Ω ، همگرای ضعیف است.

اثبات: در قضیه‌ی ۱-۳ قرار دهید $B = 0$ و $T_i = 0$ ، $i = 1, \dots, m$. نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۳-۳ فرض کنید C یک زیر مجموعه‌ی محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H و $\phi: C \times C \rightarrow R$ یک تابع باشد که در شرایط (۴-۱) صدق کند. به علاوه فرض کنید $S: C \rightarrow C$ یک نگاشت غیر انبساطی، A یک نگاشت یکنوا و لیپ شیتز با ثابت L و مجموعه‌ی $\Omega = F(S) \cap VI(A, C)$ ناتهی باشد. برای نقطه‌ی

نتیجه ۱-۳ فرض کنید C یک زیر مجموعه‌ی محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H و $\phi: C \times C \rightarrow R$ یک تابع باشد که در شرایط (۴-۱) صدق کند. به علاوه فرض کنید $T_i: C \rightarrow C$ ، $i = 1, \dots, m$ ، نگاشت شبه انقباضی اکید با ثابت k_i ، $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$ و B یک نگاشت $-\beta$ یکنوای قوی معکوس از C به H باشد. همچنین فرض کنید

$\Omega = \bigcap_{i=1}^m F(T_i) \cap GEP(\phi, B)$ ناتهی باشد. تحت شرایط فوق، برای نقطه‌ی اولیه‌ی $x_1 \in C$ ، دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ را برای هر $n \in N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \phi(u_n, y) + \langle Bx_n, y - u_n \rangle + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} u_n + \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} T_i u_n, \end{cases}$$

که در آن دنباله‌های $\{r_n\}$ و $\{\alpha_{n,i}\}$ ، $i = 0, 1, \dots, m$ ، در شرایط زیر صدق می‌کنند: (۱) به ازای $\tau_1, \tau_2 \in (0, 2\beta)$ ، دنباله‌ی $\{r_n\}$ متعلق به بازه‌ی $[\tau_1, \tau_2]$ است.

(۲) به ازای هر $n \in N$ ، $\alpha_{n,0} < 1$ ، $\alpha_{n,i} \in (0, 1)$ ، $i = 1, \dots, m$ و $\sum_{i=0}^m \alpha_{n,i} = 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k) = \infty$ در آن صورت دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{u_n\}$ به یک نقطه‌ی یکسان از Ω ، همگرای ضعیف است.

اثبات: در قضیه‌ی ۱-۳ قرار دهید $S = 0$ و $A = 0$ ، به این ترتیب نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۲-۳ فرض کنید C یک زیر مجموعه‌ی محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H و $\phi: C \times C \rightarrow R$ یک تابع باشد که در شرایط (۴-۱) صدق کند. به علاوه فرض کنید $S: C \rightarrow C$

و بنا بر ویژگی‌های عملگر تصویر $u_n = P_C x_n$ چون $x_n \in C$ بنا بر این $x_n = y_n = u_n = t_n$ بنا بر قضیه‌ی ۳-۱، نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه‌ی بعد نشان می‌دهد که با قرار دادن $A=0$ ، $B=0$ و $T_i=0$ ، $i=1, \dots, m$ ، در (۹)، به الگوریتم متفاوتی نسبت به (۷) می‌رسیم که می‌تواند جواب مشترک مسأله‌ی نقطه‌ی ثابت یک نگاشت غیر انبساطی و یک مسأله‌ی تعادل را شبیه الگوریتم معرفی شده در قضیه‌ی ۱،۴ از تادا و تاکاهاشی [۱۷]، به دست آورد.

نتیجه ۳-۵ فرض کنید C یک زیر مجموعه‌ی محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H و $\varphi: C \times C \rightarrow R$ یک تابع دوگانه باشد که در شرایط (۱-آ)-(۴-آ) صدق کند. به علاوه فرض کنید $S: C \rightarrow C$ یک نگاشت غیر انبساطی و مجموعه‌ی $\Omega = VI(A, C) \cap EP(\varphi)$ ناتهی باشد. برای نقطه‌ی اولیه‌ی $x_1 \in C$ دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ را برای هر $n \in N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \phi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) S u_n, \end{cases}$$

که در آن که در آن به ازای $a, b \in (0, 1)$ دنباله‌ی $\{\alpha_n\}$ در بازه‌ی $[a, b]$ قرار دارد و دنباله‌ی $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ در شرط $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$ صدق می‌کند. در این صورت دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{u_n\}$ به یک عضو یکسان از Ω ، همگرایی ضعیف است.

ملاحظه ۳-۲

- ۱- نتیجه‌ی ۳-۳ نشان می‌دهد که قضیه‌ی ۳-۱ تعمیم نتیجه‌ی اصلی نادژکینا و تاکاهاشی [۱۱] است.
- ۲- نتیجه‌ی ۳-۴ نشان می‌دهد که قضیه‌ی ۳-۱، قضیه‌ی ۱،۳ از مارینو و ژو [۱۰] را تعمیم داده و توسیع بعضی از نتایج پرودر و پتریشین [۴] می‌باشد.
- ۳- قضیه‌ی ۳-۱ بهبود دهنده‌ی قضیه‌ی ۱،۴ از تادا و تاکاهاشی [۱۷] است.

اولیه‌ی $x_1 \in C$ دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ را برای هر $n \in N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \end{cases}$$

که در آن به ازای $a, b \in (0, 1)$ دنباله‌ی $\{\alpha_n\}$ بازه‌ی $[a, b]$ و به ازای $c, d \in (0, \frac{1}{L})$ دنباله‌ی $\{\lambda_n\}$ متعلق به بازه‌ی $[c, d]$ است. در این صورت دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به نقطه‌ی $p \in \Omega$ که $p = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\Omega x_n$ همگرایی ضعیف است.

اثبات: در نتیجه‌ی ۳-۲، قرار دهید $\varphi = 0$. بنا بر ویژگی‌های عملگر تصویر، $u_n = P_C x_n$ چون $x_n \in C$ بنا بر این $x_n = u_n$. بنابراین قضیه‌ی ۳-۱ نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۳-۴ فرض کنید C یک زیر مجموعه‌ی محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H و $\varphi: C \times C \rightarrow R$ یک تابع باشد که در شرایط (۱-آ)-(۴-آ) صدق کند و $T_i: C \rightarrow C$ ، $i=1, \dots, m$ ، نگاشت شبه انقباضی اکید با ثابت k_i ، $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$ باشد. هم چنین فرض کنید مجموعه‌ی $\Omega = \bigcap_{i=1}^m F(T_i)$ ناتهی باشد. برای نقطه‌ی اولیه‌ی $x_1 \in C$ دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ را برای هر $n \in N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+1} = \alpha_{n,0} x_n + \alpha_{n,1} T_1 x_n + \dots + \alpha_{n,m} T_m x_n,$$

که در آن دنباله‌ی $\{\alpha_{n,i}\}$ ، $i=0, 1, \dots, m$ ، در بازه‌ی $(0, 1)$ ، دنباله‌ی $\{\alpha_{n,0}\}$ در $(k, 1)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,i} (\alpha_{n,0} - k) = \infty$ ، $i=1, \dots, m$ ، می‌باشد. در این صورت دنباله‌ی $\{x_n\}$ به عضوی از Ω ، همگرایی ضعیف است.

اثبات: در قضیه‌ی ۳-۱ قرار دهید $\varphi = 0$ ، $B = 0$ و $A = 0$ ، بنابراین $S = 0$ و $t_n = P_C u_n$ ، $y_n = P_C u_n$

اگر ضرایب y_1 و y_2 مثبت و $\Delta_P \leq 0$ و $\Delta_Q \leq 0$ باشد. با توجه به این که

$$\Delta_P = [u_{n,1} - x_{n,1}]^2 - 4(r_n)[u_{n,1}x_{n,1} - (1+r_n)u_{n,1}^2] = [(1+2r_n)u_{n,1} - x_{n,1}]^2$$

و

$$\Delta_Q = [u_{n,2} - x_{n,2}]^2 - 4(r_n)[u_{n,2}x_{n,2} - (1+r_n)u_{n,2}^2] = [(1+2r_n)u_{n,2} - x_{n,2}]^2,$$

پس $u_{n,2} = \frac{1}{1+2r_n}x_{n,2}$ ، $u_{n,1} = \frac{1}{1+2r_n}x_{n,1}$ و در نتیجه $u_n = \frac{1}{1+2r_n}x_n$.

با توجه به لم ۲-۲، $T_{r_n}(x_n) = \frac{x_n}{1+2r_n}$ ، در نتیجه

کنید $F(T_{r_n}) = EP(\varphi) = \{(0,0)\}$ فرض کنید

$A(x) = (x_2, -x_1)$ ، $i = 1, \dots, m$ ، $T_i = 0$ روشن است که A تابعی یکنوا و ۱-لیپ شیتز می باشد.

اگر $S(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ ، آنگاه به

وضوح S یک نگاشت غیر انبساطی، $VI(A, C) = \{(0,0)\}$ و $F(S) = \{(0,0)\}$

است. قرار می دهیم $r_n = \frac{n}{n+1}$ ، $\alpha_n = \frac{2n-1}{3n+3}$ و

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \text{ در نتیجه}$$

۴- مثال عددی

در این بخش با ارائه ی یک مثال همگرایی الگوریتم را نشان خواهیم داد.

مثال. فرض کنید $H = R^2$ و

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9; x, y \in R\}$$

تابع $\phi: C \times C \rightarrow R$ را

با ضابطه $\phi(x, y) = y_1^2 + y_2^2 - x_1^2 - x_2^2$ در نظر می گیریم

که در آن $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ به

روشنی دیده می شود که φ در شرایط (آ-۱)-(آ-۴) صدق می کند. می دانیم که برای هر $n > 0$ و $r_n > 0$ ،

تابع T_{r_n} تک مقدار است. فرض کنید $B = 0$ ، بنابراین

برای هر $y \in C$ و $r_n > 0$ ، $n \in N$ داریم:

$$\varphi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0.$$

فرض کنید $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2})$ و

$u_n = (u_{n,1}, u_{n,2})$ با جایگذاری φ در نامساوی

فوق نتیجه می شود

$$\begin{aligned} & r_n y_1^2 + [u_{n,1} - x_{n,1}]y_1 + \\ & [u_{n,1}x_{n,1} - (1+r_n)u_{n,1}^2] \\ & + r_n y_2^2 + [u_{n,2} - x_{n,2}]y_2 + \\ & [u_{n,2}x_{n,2} - (1+r_n)u_{n,2}^2] \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

قرار دهید

$$P(y_1) = r_n y_1^2 + [u_{n,1} - x_{n,1}]y_1 +$$

$$[u_{n,1}x_{n,1} - (1+r_n)u_{n,1}^2]$$

9

$$Q(y_2) = r_n y_2^2 + [u_{n,2} - x_{n,2}]y_2$$

$$+ [u_{n,2}x_{n,2} - (1+r_n)u_{n,2}^2]$$

پس نامساوی (۳۱) معادل است با

$$P(y_1) + Q(y_2) \geq 0. \quad (32)$$

چون انتخاب y کاملاً دلخواه و مولفه های y_1 و y_2

مستقل از هم هستند بنابراین رابطه ی (۳۲) برقرار است

اگر و تنها اگر همواره $P(y_1) \geq 0$ و $Q(y_2) \geq 0$.

چون $P(y_1)$ و $Q(y_2)$ دو تابع درجه دوم هستند

بنابراین، $P(y_1) \geq 0$ و $Q(y_2) \geq 0$ ، اگر و تنها

پس بنا بر قضیه‌ی ۳-۱، دنباله‌ی $\{x_n\}$ به $\{(0,0) \in VI(C,A) \cap EP(\varphi) \cap F(S)$ همگرایی ضعیف است. جدول ۱ و نمودار ۱، همگرایی دنباله‌ی تقریب $\{x_n\}$ را با نقطه‌ی آغازین $x = (3,0)$ نمایش می‌دهند. شرط توقف الگوریتم به صورت $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 10^{-4}$ تعریف شده است. در اینجا، برای تابع دلخواه $f(x)$ ، $P_C(f(x))$ ، جواب مسأله‌ی کمینه‌سازی زیر است:

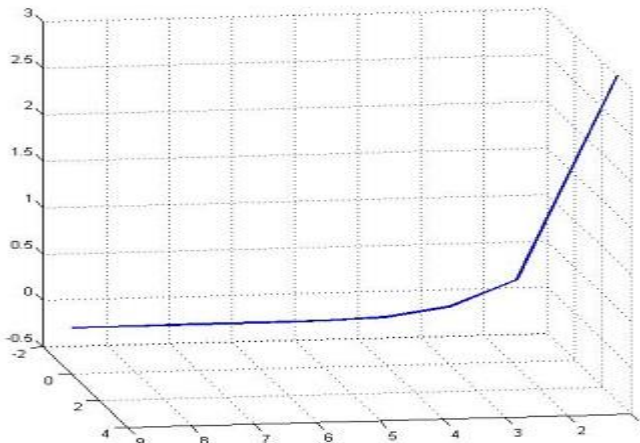
$$\min_{x \in C} \frac{1}{2} x^T x - (f(x))^T x.$$

$$\begin{cases} u_n = \frac{n+1}{3n+1} x_n, \\ y_n = P_C((u_{n,1} - \frac{1}{2} u_{n,2}), \\ u_{n,2} + \frac{1}{2} u_{n,1}), \\ t_n = P_C((u_{n,1} - \frac{1}{2} y_{n,2}), \\ u_{n,2} + \frac{1}{2} y_{n,1}), \\ x_{n+1} = \frac{2n-1}{3n+3} u_n + \\ \frac{n+4}{3n+3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (t_{n,1} - t_{n,2}, t_{n,1} + t_{n,2}). \end{cases}$$

جدول ۱: نتیجه‌ی عددی با نقطه‌ی شروع $x_0=(3,0)$

تکرار	نقطه‌ی تقریب
1	(.3384,.4419)
2	(.0011,.1170)
3	(-.0136,.0224)
4	(-.0053,.0030)
5	(-.0014,0)
6	(-.0003,-.0001)
7	(-.0001,-.0001)
8	(0,0)

نمودار ۱: همگرایی الگوریتم با نقطه‌ی شروع $x_0=(3,0)$



Mathematical Society **4** (1953), 506-510.

[10] Marino, G. and Xu, H. K. Weak and Strong Convergence Theorems for Strict Pseudo Contractions in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **329** (2007), 336-346.

[11] Nadezhkina, N. and Takahashi, W. Weak Convergence Theorem by an Extragradient Method for Nonexpansive Mappings and Monotone Mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications* **128:1** (2006), 191-201.

[12] Opial, Z. Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximation for Nonexpansive Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society* **73** (1967), 591-597.

[13] Peng, J. W. and Yao, J. C. A New Hybrid Extragradient Method for Generalized Mixed Equilibrium Problems and Fixed Point Problems and Variational Inequality Problems. *Taiwanese Journal of Mathematics* **12:6** (2008), 1401-1432.

[14] Rockafeller, R. T. On Maximality of Sums of Nonlinear Operators. *Transactions of the American Mathematical Society* **149** (1970), 75-88.

[15] Scherzer, O. Convergence criteria of iterative methods based on Landweber iteration for solving nonlinear problems. *J. Math. Anal. Appl.* **194** (1991), 911-933.

[16] Schu, J. Weak and Strong Convergence of Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings.

[1] Acedo, G. L., and Xu, H. K. Iterative Methods for Strict Pseudo Contraction in Hilbert Spaces. *Nonlinear Analysis* **67** (2007), 2258-2271.

[2] Barbagallo, A., Daniele, P. and Maugeri, A. Variational Formulation for a General Dynamic Financial Equilibrium Problem: Balance Law and Liability Formula. *Nonlinear Analysis* **75** (2012), 1104-1123.

[3] Blum, E. and Oettli, W. From Optimization and Variational Inequality to Equilibrium Problems. *The Mathematics Student* **63** (1994), 123-145.

[4] Browder, F. E. and Petryshyn, W. V. Construction of Fixed Points on Nonlinear Mappings in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **20** (1967), 197-228.

[5] Cegielski, A. *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*, Springer, London, 2011.

[6] Cho, S., Qin, X. and Kang, S. Iterative Processes for Common Fixed Points of Two Different Families of Mappings with Applications. *Journal of Global Optimization* **57** (2013), 1429-1446.

[7] Combettes, P. L. and Histoaga, S. A. Equilibrium Programming Using Proximal Like Algorithms. *Mathematical Programming* **78** (1997), 29-41.

[8] Kotzer, T., Cohen, N. and Shamir, J. Image restoration by a novel method of parallel projection onto constraint sets. *Optim. Lett.* **20** (1995), 1772-1774.

[9] Mann, W. R. Mean Value Methods in Iteration. *Proceeding of American*

Bulletin of the Australian Mathematical Society **43** (1991), 153-159.

[17] Tada, A. and Takahashi, W. Weak and Strong Convergence Theorems for a Nonexpansive Mapping and an Equilibrium Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications* **133** (2007), 359-370.

[18] Takahashi, S. and Takahashi, W. Strong Convergence Theorem for a Generalized Equilibrium Problem and a Nonexpansive Mapping in a Hilbert Space. *Nonlinear Analysis* **69** (2008), 1025-1033.

[19] Takahashi, W. and Toyoda, M. Weak Convergence Theorem for Nonexpansive Mappings and Monotone Mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications* **118** (2003), 417-428.