دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره پنجم، بهار ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک رویکرد جدید مبتنی بر آلفا برش‌ها برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی فازی

سید هادی ناصری[*,۱]، امید غلامی[۲]، علی ابراهیم نژاد[۳]، مهدی فلاح جلودار[۴]

[۱ و ۲] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران
[۳] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم‌شهر، قائم‌شهر، ایران
[۴] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد آیت الله آملی، آمل، ایران

تاریخ دریافت مقاله: زمستان ۱۳۹۴ تاریخ پذیرش مقاله: بهار ۱۳۹۵

چکیده

تکنولوژی تحلیل پوششی داده‌ها کاربردی گسترده در اندازه‌گیری کارایی واحدهای همگن با عوامل ورودی و خروجی چندگانه دارد. این عوامل ممکن است در شرایط عدم قطعیت بویژه در محیط‌های فازی یا تصادفی تعیین گردند. از این رو در توسیع مدل‌های استاندارد DEA به محیط‌های دو ترکیبی تصادفی فازی، بخشی از ساختار طبیعی DEA ممکن است تغییر یابد. به عنوان مثال خطی بودن، شدنی بودن و یا قرار نگرفتن مقادیر کارایی (ورودی محور) در فاصله ۰ تا ۱ از جمله این موارد می‌باشند. در این مقاله، رویکرد جدیدی مبتنی بر آلفا برش‌ها برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌ها تصادفی فازی ارائه می‌شود. رویکرد پیشنهادی ضمن ارائه روش جدید در حل مساله DEA با پارامترهای تصادفی فازی، به اصلاح موارد یاد شده می‌پردازد. همچنین، یک مثال عددی به اعتبار سنجی و ویژگی‌های مدل پیشنهادی می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، متغیرهای تصادفی فازی، رویکرد $\alpha-$ برش، اندازه امکان– احتمال.

*عهده‌دار مکاتبات : nasseri@umz.ac.ir

۱- مقدمه

تکنولوژی تحلیل پوششی داده‌ها یک ابزار توانمند ناپارامتریی در تخمین کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) براساس ورودی و خروجی‌های چندگانه است. مدل اولیه و پرکاربرد از این تکنولوژی توسط چارنز، کوپر و رودز [۱] ارائه شد. از جمله مباحث اساسی که در حوزه تعی‌ین کارای‌ی مطرح می شود، رتبه بندی واحدهای کارا است. ناصری و همکاران [۲] با معرفی واحدهای متشابه نسبی به ارائه رتبه‌بندی از آن‌ها پرداختند. در مدل‌های متداول DEA داده‌های ورودی و خروجی تنها تحت شرط قطعیت مورد بررسی قرار می‌گرفتند. با این وجود، در محیطهای واقعی اغلب عدم قطعیت در قالب محیطهای فازی و تصادفی ظهور می‌یابد. زمانی که داده‌ها بصورت نادقیق و یا بطور مبهمی توصیف شوند، ضرورت بکارگیری از نظریه فازی در نمایش این نوع از داده‌ها ایجاد می‌شود. در حوزه DEA فازی، حاتمی و همکاران [۳] روش‌های حل DEA فازی را در ۴ گروه اصلی تقسیم بندی کردند: رویکرد تلورانس، رویکرد α- برش، رویکرد رتبه‌بندی و رویکرد امکان که در این بین رویکرد α- برش مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. از جمله پیشگامان در این روش کائو و لیو [۴] می‌باشد. ساعتی و همکاران [۵] مدل فازی CCR را به یک مساله برنامه‌ریزی بازه‌ای و از آنجا با یک تغییر متغیر مناسب به حل آن پرداختند. پوری و یاداو [۶] از این رویکرد در مدل فازی DEA با خروجی نامطلوب استفاده کردند. زاده [۷]، نظریه امکان را در مدلسازی شرایطی که با عدم قطعیت مواجه هستند، معرفی کرد. این نظریه در حقیقت برای یک فضای فازی یک اندازه به نام امکان تعریف می‌کند. مفهوم اندازه در یک فضا کاربرد فراوانی دارد بویژه در فضای احتمال که بسیار گسترده‌تر از فضای فازی بکار رفته است.
چارنز، کوپر و رودز [۸] برنامه ریزی معناداری قیود[1] را معرفی کردند. این برنامه‌ریزی هر قید را در یک سطح معناداری چون α برقرار می‌دارد. لند و همکاران [۹] مدل DEA را در این نوع برنامه‌ریزی برای محاسبه کارایی واحدها با ورودی قطعی و خروجی تصادفی گسترش دادند. اولسن و پترسن [۱۰] این رویکرد را در مدل CCR بکار گرفتند. بطور کلی در اکثر روش‌های DEA تصادفی از این نوع برنامه‌ریزی استفاده شده است.
مفهوم متغیرهای تصادفی فازی اولین بار توسط کاوراناک [۱۱،۱۲] برای نمایش محیطهایی که در آن پدیده‌های فازی و تصادفی همزمان وجود دارند، بکار رفته است. بعد از آن محققین این مفهوم را در سایر متون گسترش دادند [۱۵-۱۳]. توانا و همکاران [۱۶] سه مدل تصادفی فازی DEA را به کمک برنامه‌ریزی معناداری قیود و در قالب اندازه های امکان- احتمال، الزام- احتمال و اعتبار- احتمال ارائه کردند. آن ها با استفاده از این نوع برنامه‌ریزی، به حل مدل DEA با پارامترهای ورودی و خروجی تصادفی فازی و از نوع توزیع های تصادفی نرمال، نمایی و یکنواخت، پرداختند. توانا و همکاران [۱۷] مدل‌های DEA را با پارامترهای ورودی و خروجی تصادفی دوطرفه[2] ارائه دادند. همچنی‌ن ناصری و همکاران [۱۸] مدل تصادفی فازی تحلی‌ل پوششی داده‌ها را با معرفی اندازه احتمال توسی‌ع ی‌افته ارائه کردند که بسی‌اری از مشکلات روی‌کرد توانا و همکارانش را رفع می کند. البته فعالیت در زمینه محیطهای دو ترکیبی تنها محدود به دو محیط فازی و تصادفی نیست، توانا و همکاران [۱۹] مدل‌های DEA را در محیط های دو ترکیبی فازی- ناهموار پیاده کردند.
سایر بخش‌های مقاله بصورت زیرسازماندهی شده است. در بخش ۲ مروری بر مدل استاندارد DEA و روش α- برش در حل مدل فازی آن بیان می‌شود. بخش سوم مدل تصادفی فازی DEA با رویکرد توانا و همکاران [۱۶] مرور می‌شود. بخش ۴ رویکرد پیشنهادی در حل مدل تصادفی فازی DEA را ارائه می‌کند. بخش ۵ در قالب یک مثال عددی قابلیت رویکرد را به تصویر می‌کشد و در بخش ۶ نتایج حاصل از رویکرد پیشنهادی خواهد آمد.

۲- مدل فازی DEA-CCR

۲-۱- مدل قطعی DEA-CCR

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده DMU_j (j=1,2,…,n) برای ارزیابی وجو دارند که m ورودی $x_{ij}^{m}(i=1,2,...,m)$

1. Chance constraint programming
2. Birandom

را در تولید s خروجی $y_{rj}^{m}(r=1,2,...,s)$ بکار می‌گیرند. چارنز، کوپر و رودز (۱۹۷۸) مدل زیر را برای محاسبه کارایی ورودی محور واحدی چون DMU_k ارائه دادند:

$$\theta_k^* = max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk}$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1, \qquad (۱)$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j = 1,...,n$$
$$u_r, v_i \ge 0$$

جایی که u_r, v_i به ترتیب وزن‌های تخصیص داده شده به خروجی r ام و ورودی i ام می‌باشند. واحد DMU_k کارا خواهد بود اگر $\theta_k^* = 1$ باشد.

۲-۲- مدل فازی DEA-CCR: رویکرد (α-برش) ساعتی و همکاران [۴]

فرض کنید در مدل (۱) پارامترهای ورودی و خروجی متغیرهای فازی از نوع اعداد مثلثی، بصورت $\bar{x}_{ij} = (x_{ij}, x_{ij}^{\alpha}, x_{ij}^{\beta}), \bar{y}_{rj} = (y_{rj}, y_{rj}^{\alpha}, y_{rj}^{\beta})$ باشند. ساعتی و همکاران [۵] در تبدیل صورت فازی مدل CCR به صورت قطعی، رویکرد α- برش را در قالب یک برنامه‌ریزی بازه‌ای بکار گرفتند و برای حل این مساله به هر بازه متغیری اختصاص دادند که در این بازه می‌توانست مقدار گیرد. بدین ترتیب پارامترهای فازی مدل که بصورت بازه‌ای درآمده بودن با متغیرهای حقیقی جایگزین می‌شوند. مدل (۲) صورت قطعی و نهایی شده رویکرد آن‌ها را نمایش می‌دهد.

$$\theta_p^* = max \sum_{r=1}^{s} \hat{y}_{rp}$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ip} = 1, \qquad (۲)$$
$$\sum_{r=1}^{s} \hat{y}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ij} \le 0, \quad j = 1,...,n$$
$$v_i(x_{ij} - (1-\gamma)x_{ij}^{\alpha}) \le \hat{x}_{ij}$$
$$\hat{x}_{ij} \le v_i(x_{ij} + (1-\gamma)x_{ij}^{\beta}) \quad \forall i,j$$
$$u_r(y_{rj} - (1-\gamma)y_{rj}^{\alpha}) \le \hat{y}_{rj}$$
$$\hat{y}_{rj} \le u_r(y_{rj} + (1-\gamma)y_{rj}^{\beta}) \quad \forall r,j$$
$$u_r, v_i \ge 0$$

که در آن $\hat{x}_{ij} = v_i \bar{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{ij} = u_r \bar{y}_{rj}$.

۳- مدل تصادفی فازی DEA: رویکرد امکان-احتمال

اکنون n واحد تصمیم گیرنده را در نظر بگیرید. هر یک از واحدها دارای m ورودی تصادفی فازی و s خروجی تصادفی فازی هستند که به‌ترتیب به صورت‌های

$$\tilde{\bar{x}}_{ij} = \left(x_{ij}^{m}, x_{ij}^{\alpha}, x_{ij}^{\beta}\right)_{LR}, i = 1,...,m, j = 1,...,n$$

و

$$\tilde{\bar{y}}_{rj} = \left(y_{rj}^{m}, y_{rj}^{\alpha}, y_{rj}^{\beta}\right)_{LR}, r = 1,...,s, j = 1,...,n$$

نمایش داده می‌شوند. همچنین x_{ij}^{m} و y_{rj}^{m} به ترتیب متغیر تصادفی با توزیع نرمال $x_{ij}^{m} \sim N\left(x_{ij}, \sigma_{ij}^{2}\right)$ و $y_{rj}^{m} \sim N\left(y_{rj}, \sigma_{rj}^{2}\right)$ می‌باشند که در آن x_{ij} (y_{rj}) و σ_{ij}^{2} (σ_{rj}^{2}) میانگین و واریانس متغیرهای(x_{ij}^{m} y_{rj}^{m}) می‌باشند. در حقیقت $\tilde{\bar{x}}_{ij}, \tilde{\bar{y}}_{rj}$ اعداد فازی از نوع LR هستند که دارای میانه‌های تصادفی با توزیع نرمال استاندارد می‌باشند. توانا و همکاران [۱۶] مدل احتمالی-تصادفی CCR زیر را پیشنهاد کردند:

$$max\ \varphi$$
$$s.t.$$
$$Pr\left[Pos\left(\varphi \le \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{\bar{y}}_{rp}\right) \ge \gamma\right] \ge \delta, \qquad (i)$$
$$Pr\left[Pos\left(\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{\bar{x}}_{ip} = 1\right) \ge \gamma'\right] \ge \delta', \qquad (ii) \qquad (۳)$$
$$Pr\left[Pos\left(\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{\bar{y}}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{\bar{x}}_{ij} \le 0\right) \ge \gamma_j\right] \ge \delta_j, \forall j \quad (iii)$$
$$u_r, v_i \ge 0$$

جایی که سطوح معناداری فازی $\delta,\delta',\delta_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ و تصادفی $\gamma,\gamma',\gamma_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ بین صفر و یک قرار دارند.

لم ۱ (ساکاوا ۱۹۹۳) [۲۰]. فرض کنید $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2$ دو عدد فازی مستقل با تابع عضویت پیوسته باشند. در سطح اطمینان $\alpha\in[0,1]$ خواهیم داشت.

$Pos\left\{\bar{\lambda}_1\geq\bar{\lambda}_2\right\}\geq\alpha$ اگر و تنها اگر $\lambda^R_{1,\alpha}\geq\lambda^L_{2,\alpha}$.

جایی که $\lambda^R_{1,\alpha},\lambda^L_{2,\alpha}$ به ترتیب گستره‌های راست و چپ $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2$ در سطح معناداری α می‌باشند.

لم ۲. اگر $\tilde{a}_j\sim N(a_j,\sigma_j)$ آنگاه $\tilde{h}=\sum_{j=1}^{n}x_j\tilde{a}_j,$

$$a.\,Pr(\tilde{h}\geq 0)\geq\delta\Leftrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n}x_ja_j+\sigma\Phi^{-1}(1-\delta)\geq 0$$
$$b.\,Pr(\tilde{h}\leq 0)\geq\delta\Leftrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n}x_ja_j-\sigma\Phi^{-1}(1-\delta)\leq 0$$

که در آن $\Phi(0)$ تابع توزیع تجمعی استاندارد و $\sigma=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2\sigma_j^2}$ می باشد.

دو لم اخیر، به ترتیب هر یک، اساس قطعی‌سازی در حل مساله فازی و تصادفی مدل (۳) را در کار توانا و همکاران [۱۶] تشکیل می‌دهند. برای تحقیق این مطلب قید (i) را مدل (۳) در نظر بگیرید

$$Pr\left[Pos\left(\varphi\leq\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{\tilde{y}}_{rp}\right)\geq\gamma\right]\geq\delta$$

ابتدا تنها با در نظر گرفتن اندازه امکان و بکارگیری لم (۱) داریم

$$Pos\left(\varphi\leq\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{\tilde{y}}_{rp}\right)\geq\gamma\Leftrightarrow$$
$$(\varphi)^R_\gamma\leq\left(\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{\tilde{y}}_{rp}\right)^R_\gamma$$

با توجه به قطعی بودن φ و اینکه

$$\left(\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{\tilde{y}}_{rp}\right)^R_\gamma=\sum_{r=1}^{s}u_r(\bar{\tilde{y}}_{rp})^R_\gamma=$$
$$\sum_{r=1}^{s}(u_r\bar{\tilde{y}}_{rp}+R^{-1}(\gamma)y^\beta_{rj})$$

خواهیم داشت:

$$\varphi\leq\sum_{r=1}^{s}(u_r\tilde{y}_{rp}+R^{-1}(\gamma)y^\beta_{rj})$$

پس از آن با در نظر گرفتن اندازه احتمال روی قید تصادفی اخیر و اعمال لم (۲) می‌توانیم این قید را از حالت تصادفی خارج کنیم:

$$Pr(\varphi\leq\sum_{r=1}^{s}(u_r\bar{\tilde{y}}_{rp}+R^{-1}(\gamma)y^\beta_{rj}))\geq\delta\Leftrightarrow$$
$$\varphi-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{\tilde{y}}_{rp}-R^{-1}(\delta)\sum_{r=1}^{s}u_ry^\beta_{rp}-$$
$$\left(\sum_{r=1}^{s}u_r^2\sigma_{rp}^2\right)^{1/2}\Phi^{-1}(1-\delta)\leq 0$$

در نهایت مدل قطعی شده زیر، در قالب یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\max\ \varphi\\
&s.t.\\
&\varphi-\sum_{r=1}^{s}u_ry_{rp}-R^{-1}(\gamma)\sum_{r=1}^{s}u_ry^\beta_{rp}-\\
&\bar{\sigma}^C_p\Phi^{-1}(1-\delta)\leq 0,\\
&\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ip}+R^{-1}(\gamma')\sum_{i=1}^{m}v_ix^\beta_{ip}+\\
&\bar{\sigma}^I_p\Phi^{-1}(1-\delta')\geq 1,\\
&\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ip}-L^{-1}(\gamma')\sum_{i=1}^{m}v_ix^\alpha_{ip}-\\
&\bar{\sigma}^I_p\Phi^{-1}(1-\delta')\leq 1,\\
&\sum_{r=1}^{s}u_ry_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\left(L^{-1}(\gamma_j)\sum_{r=1}^{s}u_ry^\alpha_{rj}+\right.\\
&\left.R^{-1}(\gamma_j)\sum_{i=1}^{m}v_ix^\beta_{ij}\right)-\\
&\bar{\sigma}^A_j\Phi^{-1}(1-\delta_j)\leq 0,\quad j=1,\ldots,n,\\
&\bar{\sigma}^C_p=\left(\sum_{r=1}^{s}u_r^2\sigma^2_{rp}\right)^{1/2},\\
&\bar{\sigma}^I_p=\left(\sum_{i=1}^{m}v_i^2\sigma^2_{ip}\right)^{1/2},\\
&\bar{\sigma}^A_j=\left(\sum_{r=1}^{s}u_r^2\sigma^2_{rj}+\sum_{i=1}^{m}v_i^2\sigma^2_{ij}\right)^{1/2},\\
&u_r,v_i,\ \bar{\sigma}^C_p,\ \bar{\sigma}^I_p,\bar{\sigma}^A_j\ \geq 0.
\end{aligned}\tag{۴}$$

۴- مدل FSDEA: رویکرد (α-برش)- احتمالی

از آنجایی که مدل (۴) غیر خطی است و این مساله بویژه در مدل‌های DEA در رسیدن به یک نمره کارایی معنادار بسیار مهم است. از این رو در این بخش رویکرد

جایگزینی از آنچه که در بخش قبل به وسیله توانا و همکاران ارائه شد، داده خواهد شد. در این جایگزینی رویکرد فازی ساعتی و همکاران [۵] بجای استفاده از رویکرد امکان توانا و همکاران [۱۶] در حل مدل فازی بکار گرفته می‌شود. مهمترین مزیت این جایگزینی در صورت قطعی یافته مدل (۵)، علاوه بر حفظ ساختار DEA مدل یعنی قرار گرفتن نمرات بین صفر و یک و داشتن حداقل یک واحد کارا، آن است که مدل نهایی برخلاف مدل (۴) منجر به یک مدل خطی خواهد شد.

با بکارگیری مدل فازی ساعتی در مدل تصادفی فازی (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\max\ \phi\\
&S.t.\\
&\phi \le \sum_{r=1}^{s}\hat{y}_{rk}\\
&\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ik}=1\\
&\sum_{r=1}^{s}\hat{y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ij}\le 0,\forall j\\
&v_i(\tilde{x}_{ij}-(1-\gamma)x_{ij}^{\alpha})\le \hat{x}_{ij}\le v_i(\tilde{x}_{ij}+(1-\gamma)x_{ij}^{\beta})\quad \forall i,j\\
&u_r(\tilde{y}_{rj}-(1-\gamma)y_{rj}^{\alpha})\le \hat{y}_{rj}\le u_r(\tilde{y}_{rj}+(1-\gamma)y_{rj}^{\beta})\quad \forall r,j\\
&u_r\ge 0\forall r, v_i\ge 0\forall i
\end{aligned}\tag{۵}$$

مدل (۴) هم اکنون دارای پارامترهای تصادفی است. از این رو، جهت قطعی‌سازی این مدل می‌توانیم از اندازه احتمال در قالب رویکرد CCP استفاده کنیم. مدل (۶) صورت قطعی یافته مدل (۵) است که با استفاده از لم (۲) و فرایندی مشابه تشکیل مدل (۴) ایجاد می‌شود.

$$\begin{aligned}
&E_k(\delta,\gamma)=\max\ \phi\\
&S.t.\\
&\phi\le\sum_{r=1}^{s}\hat{y}_{rk}\\
&\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ik}=1\\
&\sum_{r=1}^{s}\hat{y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ij}\le 0,\forall j\\
&v_i(x_{ij}-(1-\gamma)x_{ij}^{\alpha}-\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta))\le \hat{x}_{ij}\\
&\hat{x}_{ij}\le v_i(x_{ij}+(1-\gamma)x_{ij}^{\beta}+\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta))\quad\forall i,j\\
&u_r(y_{rj}-(1-\gamma)y_{rj}^{\alpha}-\sigma_{rj}\Phi^{-1}(1-\delta))\le\hat{y}_{rj}\\
&\hat{y}_{rj}\le u_r(y_{rj}+(1-\gamma)y_{rj}^{\beta}+\sigma_{rj}^{g}\Phi^{-1}(1-\delta))\quad\forall r,j\\
&u_r\ge 0\forall r, v_i\ge 0\forall i
\end{aligned}\tag{۶}$$

در مدل (۵) مقدار کارایی بر حسب سطوح معناداری γ و δواحد تحت بررسی DMU_k و بصورت $E_k(\delta,\gamma)$ تعریف شده است. قضیه ۱ نشان می دهد که این مقدار کارایی نسبت به هر یک از پارامترهای δ,γ تابعی نزولی خواهد بود.

قضیه ۱. به ازای $E_k(\delta,\gamma)$، جواب بهینه‌ای از مدل (۵)، داریم:

۱. اگر $\delta_1\le\delta_2$ آنگاه $E_k(\delta_1,\gamma)\ge E_k(\delta_2,\gamma)$

۲. اگر $\gamma_1\le\gamma_2$ آنگاه $E_k(\delta,\gamma_1)\ge E_k(\delta,\gamma_2)$

اثبات: برای اثبات کافی است نشان دهیم که ناحیه شدنی مدل (۶) کوچکتر خواهد شد زمانی که هریک از پارامترهای δ یا γ افزایش یابد. در نتیجه برای مساله ماکسیمم‌سازی مقدار کارایی در این حالت کاهش خواهد یافت. برای این منظور قید زیر از مدل (۶) را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
&v_i(x_{ij}-(1-\gamma)x_{ij}^{\alpha}-\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta))\le\hat{x}_{ij}\\
&\le v_i(x_{ij}+(1-\gamma)x_{ij}^{\beta}+\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta))
\end{aligned}\tag{۷}$$

از آنجایی که Φ^{-1} یک تابع صعودی است، توابع $-(1-\gamma)$ و $-\Phi^{-1}(1-\delta)$ صعودی خواهند بود. بنابراین توابع $(1-\gamma)$ و $\Phi^{-1}(1-\delta)$ کاهشی می‌باشند. از اینجا نتیجه می‌شود.

$$\begin{pmatrix} x_{ij}-(1-\gamma_2)x_{ij}^{\alpha}-\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta_2),\\ x_{ij}+(1-\gamma_2)x_{ij}^{\beta}+\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta_2)\end{pmatrix}\subseteq \begin{pmatrix} x_{ij}-(1-\gamma_1)x_{ij}^{\alpha}-\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta_1),\\ x_{ij}+(1-\gamma_1)x_{ij}^{\beta}+\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\delta_1)\end{pmatrix}$$

از این رو در این حالت کران های $\hat{x_{ij}}$ در (۷) محدودتر می‌شوند. دلایل مشابه‌ای می‌تواند برای $\hat{y}_{rj}$ در مدل (۶) بدست آید و این اثبات را کامل می‌کند.

تعریف ۱: در سطوح معناداری γ و δ، مقدار کارایی از DMUk در مدل تصادفی فازی DEA را بصورت $E_k^T(\delta,\gamma)=E_k(\frac{\delta}{2},\gamma)$ تعریف می‌کنیم.

مدل متناظر با $E_k^T(\delta,\gamma)$ بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&E_k^T(\delta,\gamma)=\max\ \phi\\
&S.t.\\
&\phi\le\sum_{r=1}^{s}\hat{y}_{rk}\\
&\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ik}=1\\
&\sum_{r=1}^{s}\hat{y}_{rj}-\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ij}\le 0,\forall j\\
&v_i(x_{ij}-(1-\gamma)x_{ij}^{\alpha}-\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\frac{\delta}{2}))\le\hat{x}_{ij}\\
&\le v_i(x_{ij}+(1-\gamma)x_{ij}^{\beta}+\sigma_{ij}\Phi^{-1}(1-\frac{\delta}{2}))\quad\forall i,j\\
&u_r(y_{rj}-(1-\gamma)y_{rj}^{\alpha}-\sigma_{rj}\Phi^{-1}(1-\frac{\delta}{2}))\le\hat{y}_{rj}\\
&\le u_r(y_{rj}+(1-\gamma)y_{rj}^{\beta}+\sigma_{rj}^{g}\Phi^{-1}(1-\frac{\delta}{2}))\quad\forall r,j\\
&u_r\ge 0\forall r,v_i\ge 0\forall i
\end{aligned}\tag{۸}$$

قضیه ۲. مقدار بهین $E_k^T(\delta,\gamma)$را از مدل (۸) در نظر بگیرید. آنگاه

الف) $E_k^T(\delta_1,\gamma)\ge E_k^T(\delta_2,\gamma)$ و $E_k^T(\delta,\gamma_1)\ge E_k^T(\delta,\gamma_2)$ جایی که $\delta_1\le\delta_2$ و $\gamma_1\le\gamma_2$.

ب) مقادیر $E_j^T(\delta,\gamma),\forall j$ بین ۰ و ۱ قرار دارند و به ازای واحدی چون DMUk برابر ۱ است. همچنین مدل (۸) به ازای هر γ و δ شدنی است.

اثبات الف) اثبات این قسمت با توجه به تعریف (۱) و قضیه ۱ بدیهی است.

اثبات ب) به راحتی از مدل (۸) می‌توان دید که $0\le E_j^T(\delta,\gamma)\le 1$. در ادامه به دنبال واحدی با مقدار کارایی ۱ خواهیم بود. مطابق (الف)، $E_k^T(\delta,\gamma)$نسبت به هر دو عامل γ و δ نزولی است. بنابراین، $E_k^T(\delta,\gamma)\ge E_k^T(1,1)$. با اعمال تغییر متغیر $\hat{y}_{ij}=u_r y_{rj}$ و $\hat{x}_{ij}=v_i x_{ij}$، $E_k^T(1,1)$ بصورت زیر در خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&E_k^T(1,1)=\max\ \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}\\
&s.t.\\
&\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ip}=1,\\
&\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}\le 0,\ \ j=1,\dots,n\\
&u_r,v_i\ge 0
\end{aligned}\tag{۹}$$

همانطور که دیده می‌شود مدل بدست آمده همان مدل DEA استاندارد (۱) می‌باشد. از این رو ناحیه شدنی مرتبط با آن ناتهی و قطعا واحدی کارا خواهد داشت. بنابراین به ازای چنین واحدی مقدار کارایی $E_k^T(\delta,\gamma)$ ۱ خواهد داشت. از طرفی با توجه به روند اثبات قضیه ۱ می‌توان دید ناحیه شدنی متناظر با $E_k^T(\delta,\gamma)$بزرگتر از ناحیه شدنی متناظر $E_k^T(1,1)$ است. از این رو ناحیه شدنی متناظر با $E_k^T(\delta,\gamma)$ نیز ناتهی خواهد بود.

۵- مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی به منظور اعتبار سنجی روش داده شده است و همچنین مقایسه این روش با رویکرد توانا و همکاران (۲۰۱۲) ارائه می‌شود. جدول (۱) یک مساله ارزیابی با ۲۰ واحد تصمیم گیرنده را نشان می‌دهد که شامل ۲ ورودی و ۲ خروجی می‌باشد. هر یک از عوامل ورودی و خروجی از نوع اعداد تصادفی فازی هستند. در حقیقت اعداد فازی مثلثی متقارن که میانه‌های آن‌ها دارای توزیع نرمال می‌باشند. از این رو در این مثال هر عامل ورودی و خروجی بصورت $(N(m,\sigma),\alpha)$ نمایش داده شده است. α گستره‌های (یکسان) چپ و راست و m,σ به ترتیب میانگین و واریانس توزیع نرمال می‌باشند.

جدول ۱. داده‌های ورودی و خروجی تصادفی فازی.

DMU	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی ۱	خروجی ۲
۱	(۲۸.۳و۲۸.۳و(۱و ۳۴۳.۳ N( )	(۲.۴و۲.۴و(۱و ۳۹.۶))N	(۷و۷و(۱و ۸۱ N( )	(۲۳.۵و۲۳.۵و(۱و ۲۳۰ N( )
۲	(۵۳.۲و۵۳.۲و(۱و ۵۸۶.۵ N( )	(۹و۹و(۱و ۹۹ N( )	(۳و۳و(۱و ۴۵ N( )	(۳۶.۵و۳۶.۵و(۱و ۳۴۵ N( )
۳	(۴۸و۴۸و(۱و ۵۴۰.۵ N( )	(۴.۶و۴.۶و(۱و ۵۹.۴ N( )	(۳و۳و(۱و ۴۹ N( )	(۳۸.۸و۳۸.۸و(۱و ۳۶۸.۱ N( )
۴	(۴۰و۴۰و(۱و ۴۷۳.۸ N( )	(۵.۲و۵.۲و(۱و ۵۵.۸ N( )	(۵و۵و(۱و ۶۴ N( )	(۴۴و۴۴و(۱و ۴۱۴ N( )
۵	(۵۰.۳و۵۰.۳و(۱و ۵۶۱.۲ N( )	(۴و۴و(۱و ۵۴ N( )	(۴و۴و(۱و ۵۹ N( )	(۲۲و۲۲و(۱و ۲۱۶.۲ N( )
۶	(۵۶.۴و۵۶.۴و(۱و ۶۱۶.۴ N( )	(۸و۸و(۱و ۹۰ N( )	(۷و۷و(۱و ۸۱ N( )	(۵۶.۷و۵۶.۷و(۱و ۵۲۹ N( )
۷	(۳۸.۷و۳۸.۷و(۱و ۴۰۲ N( )	(۳.۶و۳.۶و(۱و ۴۲.۳ N( )	(۳و۳و(۱و ۴۱ N( )	(۳۱.۶و۳۱.۶و(۱و ۲۹۵ N( )
۸	(۶۰.۵و۶۰.۵و(۱و ۶۵۳.۲ N( )	(۵.۶و۵.۶و(۱و ۶۸.۴ N( )	(۶و۶و(۱و ۷۲.۴ N( )	(۳۶.۸و۳۶.۸و(۱و ۳۴۹.۶ N( )
۹	(۲۶.۶و۲۶.۶و(۱و ۳۴۷.۳ N( )	(۲.۳و۲.۳و(۱و ۳۶ N( )	(۸و۸و(۱و ۹۰ N( )	(۴۶.۵و۴۶.۵و(۱و ۴۳۷ N( )
۱۰	(۲۱.۴و۲۱.۴و(۱و ۳۰۱.۳ N( )	(۱.۸و۱.۸و(۱و ۳۴.۲ N( )	(۹و۹و(۱و ۹۹ N( )	(۵۹و۵۹و(۱و ۵۴۹.۷ N( )
۱۱	(۴۸.۹و۴۸.۹و(۱و ۵۲۳.۲ N( )	(۵و۵و(۱و ۸۷.۵ N( )	(۵و۵و(۱و ۶۷.۵ N( )	(۳۲.۳و۳۲.۳و(۱و ۴۲۱ N( )
۱۲	(۳۱و۳۱و(۱و ۳۸۶.۴ N( )	(۳.۴و۳.۴و(۱و ۴۸.۶ N( )	(۱۰و۱۰و(۱و ۱۰۸ N( )	(۶۱.۸و۶۱.۸و(۱و ۵۷۵ N( )
۱۳	(۷۵.۲و۷۵.۲ و(۱و۷۸۵.۷ N( )	(۱.۴و۱.۴و(۱و ۵۰.۶ N( )	(۸و۸و(۱و ۸۷ N( )	(۵۴.۹و۵۴.۹و(۱و ۵۱۲.۹ N( )
۱۴	(۶۵.۱و۶۵.۱و(۱و ۶۹۴.۶ N( )	(۱۱و۱۱و(۱و ۱۰۸.۱ N( )	(۷و۷و(۱و ۷۸ N( )	(۵۰.۳و۵۰.۳و(۱و ۴۷۱.۵ N( )
۱۵	(۵۴.۴و۵۴.۵و(۱و ۵۹۸ N( )	(۱.۷و۱.۷و(۱و ۲۷ N( )	(۶و۶و(۱و ۶۷ N( )	(۴۱.۴و۴۱.۱و(۱و ۳۹۱ N( )
۱۶	(۶۷.۲و۶۷.۲و(۱و ۷۱۳ N( )	(۹و۹و(۱و ۱۲۶ N( )	(۱۰و۱۰و(۱و ۱۱۲ N( )	(۵۶.۷و۵۶.۷و(۱و ۵۲۹ N( )
۱۷	(۵۶و۵۶و(۱و ۶۱۱.۸ N( )	(۸.۸و۸.۸و(۱و ۹۷.۲ N( )	(۶و۶و(۱و ۷۳.۱ N( )	(۴۲.۷و۴۲.۷۳و(۱و ۴۰۲.۵ N( )
۱۸	(۶۱.۳و۶۱.۳و(۱و ۶۶۰.۱ N( )	(۷و۷و(۱و ۸۱ N( )	(۸و۸و(۱و ۹۳ N( )	(۶۳.۴۳و۶۳.۴و(۱و ۵۸۸.۸ N( )
۱۹	(۴۶.۷و۴۶.۷و(۱و ۵۲۹.۱ N( )	(۳.۶و۳.۶و(۱و ۵۰.۴ N( )	(۳و۳و(۱و ۴۸ N( )	(۲۸.۶و۲۸.۶و(۱و ۲۷۶ N( )
۲۰	(۵۷و۵۷و(۱و ۶۲۱ N( )	(۴.۴و۴.۴و(۱و ۵۷.۶ N( )	(۷و۷و(۱و ۷۷ N( )	(۴۲.۴و۴۲.۴و(۱و ۴۰۰.۲ N( )

جدول (۲) نتایج ارزیابی حاصل از دو رویکرد پیشنهادی این مقاله در مدل (۸) و همچنین مدل (۴) از رویکرد توانا و همکاران (۲۰۱۲) را نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود نتایج هر دو رویکرد علی‌رغم ماهیت متفاوت در مدلسازی مساله تصادفی فازی در بسیاری از موارد یکسان می‌باشد. همچنین این نتایج به ازای ۴ سطح معناداری متفاوت از δ, γ ارائه شده است که عبارتند از :

$$(\delta = 0.25, \gamma = 0.25),\ (\delta = 0.5, \gamma = 0.25),$$
$$(\delta = 0.75, \gamma = 0.25),\ (\delta = 0.5, \gamma = 0.5),$$
$$(\delta = 0.25, \gamma = 0.75).$$

در مقایسه نتایج کارایی حاصل از مدل (۸) در هر دسته از سطوح یاد شده، اعتبار قضیه (۱) مبنی بر نزولی بودن مقادیر کارایی نسبت به پارامترهای δ, γ دیده می‌شود.

جدول ۲. نتایج کارایی حاصل از مدل‌های (۴) و (۸)

DMU	$\delta = 0.25, \gamma = 0.25$		$\delta = 0.5, \gamma = 0.25$		$\delta = 0.75, \gamma = 0.25$		$\delta = 0.5, \gamma = 0.5$		$\delta = 0.25, \gamma = 0.75$	
	مدل(٦)	مدل(٤)	مدل(٦)	مدل(٤)	مدل(٦)	مدل(٤)	مدل(٦)	مدل(٤)	مدل(٦)	مدل(٤)
۱	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۷۸۱	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰
۲	۰.۵۶۳۶	.۰۶۰۲۴	۰.۵۴۶۹	۰.۵۷۶۲	۰.۵۵۰۵	۰.۵۳۰۵	۰.۴۴۵۵	۰.۴۴۵۵	۰.۳۵۳۶	۰.۳۵۲۳
۳	۰.۸۱۷۴	۰.۸۲۰۲	۰.۸۱۳۸	۰.۸۱۳۸	۰.۸۰۷۵	۰.۸۱۰۳	۰.۷۲۸۸	۰.۷۲۸۸	۰.۶۵۸۶	۰.۶۵۶۴
٤	۰.۷۹۹۵	۰.۸۱۰۸	۰.۷۵۹۳	۰.۷۶۳۷	۰.۷۲۹۱	۰.۷۲۰۷	۰.۵۷۴۸	۰.۵۷۴۸	۰.۵۲۷۱	۰.۵۲۵۳
۵	۰.۷۶۶۹	۰.۷۹۹۷	۰.۷۰۰۸	۰.۷۰۱۷	۰.۶۱۱۱	۰۶۳۸۷	۰.۵۲۹۶	۰.۵۳۲۲	۰.۴۵۱۳	۰.۴۲۴۷
٦	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۹۱۴	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰
۷	۰.۵۸۲۰	۰.۵۸۴۲	۰.۵۶۱۷	۰.۵۶۱۷	۰.۵۴۰۴	۰.۵۱۲۴	۰.۵۱۳۰	۰.۵۱۳۰	۰.۴۸۷۳	۰.۴۸۵۳
۸	۰.۴۶۹۱	۰.۴۷۲۱	۰.۴۵۱۷	۰.۴۵۱۷	۰.۴۳۲۳	۰.۴۳۳۳	۰.۴۱۶۰	۰.۴۱۶۰	۰.۴۰۰۷	۰.۳۹۸۵
۹	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۰۰۵	۰.۹۹۱۹	۰.۹۹۱۹	۰.۹۶۸۳	۰.۹۶۲۵
۱۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰
۱۱	۰.۵۷۳۰	۰.۵۷۴۸	۰.۵۷۰۸	۰.۵۷۰۸	۰.۵۶۶۹	۰.۵۷۰۸	۰.۵۲۱۴	۰.۵۲۱۴	۰.۴۸۰۰	۰.۴۷۸۴
۱۲	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۹۵۵	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰
۱۳	۰.۷۸۶۰	۰.۷۸۸۳	۰.۷۶۱۶	۰.۷۶۱۶	۰.۷۳۶۰	۰.۷۳۶۰	۰.۷۰۵۲	۰.۷۰۵۲	۰.۶۷۶۱	۰.۶۷۴۱
۱٤	۰.۴۹۳۶	۰.۴۹۵۲	۰.۴۹۲۰	۰.۴۹۲۰	۰.۴۸۸۸	۰.۴۹۱۹	۰.۴۴۶۱	۰.۴۴۶۱	۰.۴۰۷۵	۰.۴۰۶۱
۱۵	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰
۱٦	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۸۳۹	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰
۱۷	۰.۵۵۹۳	۰.۵۹۸۰	۰.۵۳۳۴	۰.۵۴۶۷	۰.۵۲۰۱	۰.۴۷۵۷	۰.۴۳۳۹	۰.۴۳۳۹	۰.۴۰۰۶	۰.۳۹۹۶
۱۸	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۸۸۴	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۰۵۸	۰.۹۲۳۳
۱۹	۰.۴۴۴۳	۰.۴۴۶۲	۰.۴۳۰۲	۰.۴۳۰۲	۰.۴۱۴۷	۰.۴۱۶۶	۰.۳۹۴۱	۰.۳۹۴۱	۰.۳۷۴۶	۰.۳۷۳۱
۲۰	۰.۵۹۸۱	۱.۰۰۰	۰.۵۷۵۲	۰.۵۷۵۲	۰.۵۴۹۵	۰.۵۴۷۷	۰.۵۳۰۲	۰.۵۳۰۲	۰.۵۱۱۶	۰.۵۰۸۵

۶- نتیجه‌گیری

این مقاله مدل DEA استاندارد را در محیط دو ترکیبی تصادفی فازی گسترش داده است که در آن عوامل ورودی و خروجی از نوع متغیرهای فازی مثلثی و با میانه‌های تصادفی از نوع توزیع نرمال می‌باشند. رویکرد توانا و همکاران (۲۰۱۲) در حل مدل DEA تحت این شرایط منجر به یک مدل غیر خطی شده است که برای حل آن نیاز به برنامه‌ریزی درجه دوم می‌باشد. همچنین مقادیر کارایی ورودی محور در فاصله بین ۰ تا ۱ قرار نمی‌گرفت. از این رو این مقاله در رفع این مسائل، مدل خطی ارائه شده است که مقادیر کارایی آن نیز در فاصله ۰ تا ۱ می‌باشند. همچنین شدنی بودن مدل نیز بررسی شده است. مثال عددی در مقایسه این مدل با مدل پیشنهادی توانا و همکاران (۲۰۱۲) نیز اعتبار این مدل را تایید می‌کند. به‌عنوان کارهای آتی رویکرد جایگزینی برای برنامه‌ریزی معناداری قیود در حل مسائل DEA تصادفی فازی پیشنهاد می‌شود.

فهرست منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978).Measuring the efficiency of decisionmakingunits.European Journal of Operational Research, 2(6), 429–444.
[2] Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., &Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. European Journal of Operational Research, 214, 457–472.
[3] Nasseri, S. H., Gholami, O., Ebrahimnejad, A, (2014). On ranking decision making units using relative similar units in data envelopment analysis, International Journal of Applied Decision Science,7 424-436.
[4] Kao, C., & Liu, S. T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. Fuzzy Sets and Systems, 113(3), 427–437.
[5] Saati, S., Memariani, A., Jahanshahloo, G.R., (2002).Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data.Fuzzy Optimization and Decision Making 1, 255–267.
[6] Puri, J., & Yadav, S. P.,(2014).A fuzzy DEA model with undesirable fuzzy outputs and its application, In press.
[7] Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems, 1(1), 3–28.
[8] Charnes, A., Cooper, W.W., (1959). Chance-constrained programming, Manage. Sci. 6 73–79.
[9] Land, K., Lovell, C. A. K., &Thore, S. (1994). Chance- constrained data envelopmentanalysis.Managerial and Decision Economics, 14, 541–554.
[10] Olesen, O. B., & Petersen, N. C. (1995). Chance constrained efficiency evaluation. Management Science, 41, 442–457.
[11] Kwakernaak, H. (1978). Fuzzy random variables. Part I: Definitions and theorems. Information Sciences, 15(1), 1–29.
[12] Kwakernaak, H. (1979). Fuzzy random variables. Part II: Algorithms and examples for the discrete case.Information Sciences, 17(3), 253–278.
[13] Feng, X., Liu,Y.K., (2006). Measurability criteria for fuzzy random vectors, Fuzzy Optimization and Decision Making 5 245–253.
[14] Liu, B., (2004). Uncertainty Theory, Springer- Verlag, Berlin,. [13] Liu, Y., Liu,B., (2003). Fuzzy random variable: a scalar expected value operator, Fuzzy Optimization and Decision Making 2 143–160.
[14] Qin, R., Liu, Y.K., (2010). Modeling data envelopment analysis by chance method in hybrid uncertain environments. Mathematics and Computers in Simulation 80 (5), 922–95
[15] Tavana, M., Khanjani Shiraz, R., Hatami-Marbini, A., Per J. Agrell, Paryab, P., (2012).Fuzzy stochastic data envelopment analysis withapplication to base realignment and closure (BRAC). Expert Systems with Applications 12247–12259.
[16] Tavana, M., Khanjani Shiraz, R., Hatami-Marbini, A., Per J. Agrell, Paryab, P., (2013). Chance-constrained DEA models with random fuzzy inputs and outputs. Knowledge-Based Systems 52 (2013) 32–52.
[17] Tavana, M., Khanjani Shiraz, R., Hatami-Marbini, A. (2014).A New Chance-Constrained DEA Model with Birandom Input and Output Data. Journal of the operational research society, 27.

[18] Nasseri, S. H., Gholami, O., (2016). New Approach for Solving Input-Oriented Primal DEA Models with Fuzzy Stochastic Data: Application to Insurance Industry. International Journal of Applied Decision Sciences. In Press.

[19] Khanjani Shiraz, R., Charles, V., Jalalzadeh, L. (2014). Fuzzy Rough DEA Model: a possibility and expected value approaches. Expert System With Applications. 41(2), 434–444.

[20] Sakawa, M. (1993). Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, New York.