دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هشتم، زمستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

λ–رنگ آمیزی برخی از گراف‌ها و حدس Δ^2

غفار رئیسی *

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد ، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۶/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۰۲

چکیده

به ازای گراف داده شده G، توان دوم گراف G، که با G^2 نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)$ به طوریکه دو راس در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر فاصله این دو راس در G حداکثر 2 باشد. گراف G را مربعی گوییم هرگاه گرافی مانند H وجود داشته باشد به‌طوریکه، $G = H^2$. تابع $f: V(G) \to \{0,1, \dots, k\}$ را یک λ–رنگ آمیزی از G می‌نامیم هرگاه برای هر دو راس $x, y \in V$ با $d(x, y) = 1$ داشته باشیم $|f(x) - f(y)| \geq 2$ به علاوه اگر $d(x, y) = 2$ ، آنگاه $|f(x) - f(y)| \geq 1$. کمترین مقدار k که به ازای آن یک λ–رنگ آمیزی از G وجود داشته باشد را با $\lambda(G)$ نشان می‌دهیم. در سال ۱۹۹۳ گریکس و یه حدس زدند اگر G گرافی با ماکسیمم درجه $\Delta \geq 2$ باشد، آنگاه $\lambda(G) \leq \Delta^2$. در این مقاله، ضمن ارائه کران‌هایی برای λ–رنگ آمیزی گراف‌ها، حدس مذکور را برای گراف‌های مربعی، گراف‌های خطی و گراف‌های فاقد ماینور گراف‌های کامل K_4 و K_5 اثبات خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: λ–رنگ آمیزی، حدس Δ^2، گراف مربعی، گراف فاقد ماینور K_l .

*. Email: g.raeisi@math.iut.ac.ir

مقدمه

در سراسر این مقاله، گراف‌ها ساده در نظر گرفته شده و برای اصطلاحات و نمادهای نظریه گراف که در این مقاله ارائه نشده، خواننده را به مرجع[۱] ارجاع می‌دهیم. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. فاصله دو راس u و v در گراف G، طول کوتاه‌ترین مسیر در G بین رئوس u و v تعریف می‌شود و با نماد $d(u,v)$ نشان داده می‌شود. درجه راس v، مجموعه همسایه‌های راس v، کمترین و بیشترین درجه رئوس در گراف G به ترتیب با $deg_G(v)$، $N_G(v)$، $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان داده می‌شوند. به علاوه، اگر S زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف G باشد، زیرگراف القائی از G روی رئوس S را با $G[S]$ نشان می‌دهیم. به ازای عدد صحیح و مثبت k، توان k–ام گراف G، که با G^k نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)$ به طوریکه دو راس در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر فاصله این دو راس در Gحداکثر k باشد. به راحتی می‌توان دید که برای هر دو راس u و v در گراف G،

$$d_{G^k}(u,v)=\left\lceil\frac{d_G(u,v)}{k}\right\rceil.$$

گراف G را مربعی گوییم هرگاه گرافی مانند H وجود داشته باشد به‌طوریکه، $G=H^2$.

در نظریه گراف، رنگ‌آمیزی گراف یکی از حالت‌های خاص مسئله‌های برچسب‌گذاری گراف است. رویکرد کلی آن استفاده از نظیر کردن رنگ‌هایی به یال‌ها یا راس‌هاست که این رنگ‌آمیزی محدودیت خاصی را رعایت کند. در ساده‌ترین حالت، رنگ‌آمیزی از گزاف که در آن هیچ دو راس مجاوری هم رنگ نباشند را رنگ آمیزی مجاز می‌نامیم. کمترین تعداد رنگ مورد نیاز در یک رنگ‌آمیزی مجاز از G را عدد رنگی نامیده و با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم. رنگ‌آمیزی گراف‌ها کاربردهای زیادی در زمینه‌های عملی و تئوری گوناگون دارد. علاوه بر مسئله‌های کلاسیک تعریف شده در این زمینه، با در نظر گرفتن محدودیت‌های مختلفی روی نوع گراف‌ها، روی روش رنگ‌آمیزی و حتی تعداد و رنگ عناصر گراف، مسئله‌های متنوعی با کاربردهای وسیع در صنعت و علوم تعریف و حل می‌شود. در این میان، مساله تخصیص کانال رادیوئی را می‌توان با نوع از خاصی از رنگ‌آمیزی گراف‌ها به نام λ–رنگ‌آمیزی مدل‌بندی کرد.[۴،۲] در مساله تخصیص کانال‌های رادیوئی، علاوه بر قراردهی مکانی منابع رادیویی، تخصیص کانال‌های موجود در باند فرکانسی قابل دسترس به صورتی که تداخلی در شبکه به وجود نیاید، از اهمیت خاصی برخوردار است که به وسیله‌ی الگوریتم‌های رنگ‌آمیزی در نظریه‌ی گراف به هر کدام از این منابع رادیویی یک کانال اختصاص داده می‌شود به طوریکه کمترین تداخل اتفاق افتد.

تابع $f:V(G)\to\{0,1,\dots,k\}$ را یک λ–رنگ آمیزی از G می‌نامیم هرگاه برای هر دو راس $x,y\in V(G)$ با $d(x,y)=1$ داشته باشیم $|f(x)-f(y)|\geq 2$ به علاوه اگر $d(x,y)=2$، آنگاه $|f(x)-f(y)|\geq 1$. کمترین مقدار k که به ازای آن یک λ–رنگ آمیزی از G وجود داشته باشد را با $\lambda(G)$ نشان می‌دهیم.

مقالات بسیار زیادی وجود دارند که به مطالعه و بررسی مساله λ–رنگ‌آمیزی گراف‌ها پرداخته‌اند. بسیاری از این مقالات، $\lambda(G)$ را به ازای گراف‌های خاص G محاسبه کرده‌اند[۸]، [۳]. در سال ۱۹۹۲ گریکس و یه[۳] حدس زیر را در مورد λ–رنگ آمیزی گراف‌ها بیان کردند که به حدس Δ^2 معروف می‌باشد.

حدس ۱. ([۳]) اگر G گرافی با ماکسیمم درجه $\Delta\geq 2$ باشد، آنگاه $\lambda(G)\leq\Delta^2$.

در مرجع[۳] نشان داده شده که اگر G گرافی با ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه $\lambda(G)\leq\Delta^2+2\Delta$.

به علاوه، در سال ۲۰۰۳ کرال و همکاران‌شان[۴] نشان دادند که برای هر گراف G با ماکسیمم درجه Δ داریم $\lambda(G)\leq\Delta^2+\Delta-1$ به علاوه نشان داده شد که اگر G گرافی با قطر ۲ باشد آنگاه $\lambda(G)\leq\Delta^2$. به علاوه نشان داده شده[۳] که محاسبه $\lambda(G)$ برای هر گراف دلخواه G، یک مسأله NP می‌باشد.

در این مقاله، ضمن ارائه کران‌هایی برای λ–رنگ آمیزی گراف‌ها، حدس فوق را برای کلاس‌هایی از گراف‌ها از جمله گراف‌های مربعی و گراف‌های فاقد ماینور K_4 و K_5

اثبات خواهیم کرد.

یک الگوریتم برای λ-رنگ‌آمیزی گراف‌ها

گریکس و یه[۳] الگوریتمی را بیان کردند که کران بالائی برای λ–رنگ آمیزی گراف G ارائه می‌دهد. قبل از بیان این الگوریتم، به چند تعریف و نماد نیاز داریم. زیرمجموعه X از $V(G)$ را یک مجموعه i– مستقل می‌نامیم هرگاه فاصله هر دو رأس در X بزرگتر از i باشد. با این تعریف، مجموعه‌های ۱– مستقل همان مجموعه‌های مستقل در گراف می‌باشند. زیرمجموعه X از مجموعه Y یک مجموعه ۲– مستقل ماکسیمال نامیده می‌شود هر گاه X یک مجموعه ۲– مستقل بوده و به علاوه X زیر مجموعه سره از هیچ مجموعه ۲– مستقل دیگر Y نباشد. حال الگوریتم زیر را بیان می‌کنیم که یک کران بالا برای λ–رنگ‌آمیزی گراف G ارائه می‌دهد.

الگوریتم ۱

ورودی الگوریتم : گراف $G = (V, E)$

خروجی الگوریتم: بزرگترین برچسب k

ایده الگوریتم: در مرحله i–ام از الگوریتم، یک زیر مجموعه ۲– مستقل از بین رئوس برچسب گذاری نشده انتخاب می‌شود که از رئوس برچسب‌گذاری شده در مرحله قبل فاصله حداقل ۲ داشته باشند. رئوس مجموعه ۲– مستقل یافت شده را اندیس i می‌دهیم. اندیس i از صفر شروع شده و در هر مرحله از الگوریتم یک واحد افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار k همان مقدار i در آخرین مرحله از الگوریتم می‌باشد.

آغاز الگوریتم

قرار دهید $X_{-1} = \emptyset$ ، $V = V(G)$، $i = 0$ و مراحل زیر را تکرار کنید.

۱– مجموعه‌های Y_i و X_i را به صورت زیر تشکیل دهید:

× Y_i را مجموعه رئوسی از G در نظر بگیرید که برچسب گذاری نشده‌اند و به علاوه برای هر $y \in X_{i-1}$ داشته باشیم $d(x, y) \geq 2$.

× X_i را یک مجموعه ۲– مستقل ماکسیمال از Y_i در نظر بگیرید. (اگر $Y_i = \emptyset$ قرار دهید $X_i = \emptyset$)

۲– رئوس انتخاب شده در مجموعه X_i را با عدد i برچسب‌گذاری کنید.

۳– V را با $V - X_i$ جایگزین کنید.

۴– اگر $V \neq \emptyset$ آنگاه i را یک واحد اضافه کنید و سپس به مرحله ۱ برگردید.

۵– i یافت شده را به عنوان k ذخیره کنید.

پایان الگوریتم

حال فرض کنید k خروجی الگوریتم بالا و x راس با این برچسب باشد. مجموعه‌های I_1 ، I_2 و I_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

I_1 را مجموعه برچسب‌های i، $0 \leq i \leq k-1$، در نظر بگیرید به طوریکه به ازای راسی مانند $y \in X_i$ داشته باشیم $d(x, y) = 1$. I_2 را مجموعه برچسب‌های i، $0 \leq i \leq k-1$ در نظر بگیرید به طوریکه به ازای راسی مانند $y \in X_i$ داشته باشیم $d(x, y) \leq 2$ و در نهایت فرض کنید I_3 مجموعه تمام برچسب‌های $0 \leq i \leq k-1$ باشد به طوریکه برای هر راس $y \in X_i$ داشته باشیم $d(x, y) \geq 3$.

چانگ وکو[۸] نشان دادند که

$$\lambda(G) \leq k \leq |I_2| + |I_3| \leq |I_1| + |I_2|.$$

بنابراین برای یافتن کران بالا برای $\lambda(G)$ کافی است $|I_1| + |I_2|$ را تخمین بزنیم.

λ-رنگ‌آمیزی گراف‌های مربعی

در این بخش، نشان خواهیم داد حدس ۱ در مورد گراف‌های مربعی درست است و به عنوان نتیجه‌ای از آن، کران بالایی برای λ-رنگ‌آمیزی گراف کلی[1] یک گراف بیان خواهیم کرد.

قضیه ۱. اگر G گرافی مربعی با ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه $\lambda(G) \leq \Delta^2$

1. Total Graph

اثبات: فرض کنید H گرافی باشد که $G = H^2$ و به علاوه فرض کنید k بزرگترین برچسب باشد که از الگوریتم ۱ بدست آمده باشد و x رأس با این برچسب باشد. کران بالائی برای $|I_1| + |I_2|$ در گراف G ارائه خواهیم داد. فرض کنید $1 \leq i \leq 4$ و قرار دهید:

$$H_i = \{ y \in V(H):\ d_H(x, y) = i\}$$

بنابر تعریف H_i، داریم: $N_G(x) = H_1 \cup H_2$. به علاوه

$$|I_1| \leq |H_1| + |H_2|, |I_2| \leq \sum_{i=1}^{4} |H_i| \qquad (۱)$$

ادعا: $|H_1| + |H_3| + |H_4| + 1 \leq |H_2|\Delta$.

اثبات ادعا: برای اثبات ، قرار دهید:

$$S = \{(z, y) : z \in H_2\ , y \in N_G(x)\}$$

و عناصر مجموعه S را شمارش می‌کنیم. واضح است که $|S| \leq |H_2|\Delta.$ زیرا هر رأس دارای درجهٔ حداکثر Δ می‌باشد. از طرفی دیگر،

$$|S| = |H_1| + |H_3| + |H_4| + 1$$

زیرا تمام رئوس واقع در H_1 و H_3 و H_4 به همراه رأس x در G با رئوس H_2 مجاورند. لذا

$$|H_1| + |H_3| + |H_4| + 1 \leq |H_2|\Delta$$

و این نیز اثبات ادعا را تمام می‌کند.

حال بنابر ادعای فوق داریم:

$$|H_3| + |H_4| < |H_2|\Delta.$$

با ترکیب رابطه فوق و (۱)، خواهیم داشت:

$$|I_1| + |I_2| \leq 2\,(|H_1| + |H_2|) + |H_2|\Delta = |H_2|(\Delta + 2) + 2|H_1| \qquad (۲)$$

حال، حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم.

حالت۱). $|H_1| = 1$.

فرض کنید $H_1 = \{y\}$. اگر $|H_2| < \Delta - 1$ در این صورت بنابر رابطه ۲، $|I_1| + |I_2| \leq \Delta^2$. بنابراین می‌توان فرض کرد $|H_2| = \Delta - 1$. در این حالت $deg_H(y) = \Delta$ و از آنجا که ماکسیمم درجه در G برابر Δ^2 است، لذا $H_3 = H_4 = \emptyset$. در این حالت، $deg_G(x) = \Delta = n - 1.$

این نیز ایجاب می‌کند که $G = K_n$ و لذا

$$\lambda(G) = \lambda(K_n) = 2(n - 1) \leq (n - 1)^2.$$

حالت۲). $|H_1| = t$ ،$t \geq 2$.

از آنجا که $|H_1| + |H_2| \leq \Delta$، خواهیم داشت $|H_2| \leq \Delta - t$. لذا بنابر رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$|I_1| + |I_2| \leq \Delta^2.$$

بنابراین در هر حالت، $|I_1| + |I_2| \leq \Delta^2$ و لذا $\lambda(G) \leq \Delta^2$ که این نیز برهان قضیه را به پایان می‌رساند.

فرض کنید G یک گراف باشد. گراف کلی نسبت داده شده به گراف G را با $T(G)$ نشان می‌دهیم و آن را گرافی تعریف می‌کنیم که رئوس آن $V(G) \cup E(G)$ است و مجاورت‌ها در $T(G)$ بر اساس مجاورت‌ها در G تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، اگر $v, v' \in V(G)$ و به علاوه $e, e' \in E(G)$ در اینصورت:

الف) $vv' \in E(T(G))$ اگروتنها اگر $vv' \in E(G)$

ب) $ve \in E(T(G))$ اگر و تنها اگر رأس v در گراف G بر یال e واقع باشد.

ج) $ee' \in E(T(G))$ اگر وتنها اگر یال‌های e', e در G مجاور باشند.

گراف کلی یک گراف اهمیت زیادی در رنگ‌آمیزی گراف‌ها دارد. عدد رنگی کلی گراف G، که با $\chi_t(G)$ نشان داده می‌شود به‌صورت $\chi_t(G) = \chi(T(G))$ تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان دید که اگر G گرافی با ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه $\chi_t(G) \geq \Delta + 1$. به علاوه حدس معروفی[۹] نیز وجود دارد که بنا بر آن حدس، برای هر گراف G با ماکسیمم درجه Δ، $\chi_t(G) \leq \Delta + 2$.

به ازای گراف داده شده G، گراف مشتق[۲] G که با $S(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که با جایگزینی هریال از G با مسیری به طول ۲ حاصل می شود. به راحتی می‌توان دید که ارتباط بین $T(G)$ و $S(G)$ به صورت زیر قابل بیان است.

لم ۲. برای هر گراف دلخواه G ، $S^2(G) \cong T(G)$.

2. Subdivision Graph

حال بنا بر قضیه ۱ و لم ۲، قضیه زیر را خواهیم داشت که نشان می‌دهد حدس Δ^2 برای گراف‌های کلی نیز برقرار است.

قضیه ۳. برای هر گراف دلخواه G ،
$$\lambda(T(G) \le \Delta^2\big(T(G)\big)$$

چند کران برای λ -رنگ‌آمیزی گراف‌ها

در این بخش، چند کران برای λ–رنگ آمیزی گراف‌ها بیان و سپس کاربردهایی از کران‌های ارائه شده را ارائه خواهیم کرد.

یکی از مفاهیم که ارتباط نزدیکی با رنگ‌آمیزی گراف‌ها دارد، مفهوم تباهیدگی گراف‌ها می‌باشد. فرض کنید G یک گراف و k عدد صحیح و مثبتی باشد. ترتیب σ روی رئوس G را k–خوشایند می‌نامیم. هرگاه هر رأس v_i دارای حداکثر $k-1$ همسایه در $G[v_1,\dots,v_{i-1}]$ باشد. کمترین مقدار k که به ازای آن، گراف G دارای ترتیبی $k-$ خوشایند روی رئوس باشد، را عدد تباهیدگی G نامیده و با $col(G)$ نشان می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید که برای هر گراف G،
$$\chi(G) \le col(G)$$

در قضیه زیر، کرانی برای λ–رنگ‌آمیزی گراف دلخواه G بر حسب $col(G)$، $col(G^2)$ و Δ ارائه خواهیم کرد.

قضیه ۴. فرض کنید G گرافی با ماکسیمم درجه Δ باشد و به علاوه، $a=(\Delta+2)(col(G)-1)$ و $b=col\,(G^2)+2\Delta-1$. در اینصورت
$$\lambda(G) \le min\{a,b\}.$$

بالاخص اگر G گرافی با $col(G) \le \Delta-1$ باشد، آنگاه $\lambda(G) \le \Delta^2-4$.

اثبات: فرض کنید $col(G)=t$. بنابراین ترتیب $v_1,\dots,v_n$ روی رئوس G وجود دارد به طوریکه هر راس v_i دارای حداکثر $t-1$ همسایه در $G[v_1,\dots,v_{i-1}]$ می‌باشد. با توجه به این ترتیب از رئوس و بنابر الگوریتم حریصانه، رئوس گراف G را λ– رنگ‌آمیزی می‌کنیم. این الگوریتم حداکثر برچسب‌های $0,1,\dots,(\Delta+2)\,(t-1)$ را استفاده می‌کند. برای دیدن این مطلب، فرض کنید این الگوریتم رئوس $v_1,\dots,v_{i-1}$ را رنگ آمیزی کرده باشد و الگوریتم به دنبال رنگ مناسب برای راس v_i باشد. از آنجا که درجه راس v_i در $G[v_1,\dots,v_{i-1}]$ برابر $t-1$ می‌باشد و حداکثر $(t-1)(\Delta-1)$ رأس به فاصله ۲ از رأس v_i وجود دارند، لذا رنگ‌های غیر مجاز برای رأس v_i حداکثر $(t-1)(\Delta-1)+3(t-1)$ می‌باشد. از آنجا که مجموعه رنگ‌ها به صورت
$$C=\{0,1,\dots,(t-1)(\Delta+2)\}$$
است لذا رنگی وجود دارد که می‌تواند به رأس v_i اختصاص داده شود. لذا الگوریتم حریصانه در هر مرحله می‌تواند رنگ مناسب را برای رأس v_i انتخاب کند. بنابراین، در این حالت
$$\lambda(G) \le (\Delta+2)(col(G)-1).$$

با استدلال مشابه، (با به کاربردن الگوریتم حریصانه و ترتیب $v_1,\dots,v_n$ روی رئوسG^2) به دست می‌آوریم که $\lambda(G) \le col(G^2)+2\Delta-1$ و این نیز برهان قضیه را به پایان می‌رساند.

در ادامه، کاربردهایی از این قضیه را بیان می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید که برای هر گراف G با ماکسیمم درجه Δ، $col(G) \le \Delta+1$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف $\Delta-$ منظم باشد. لذا اگر G گراف منظم نباشد، با به کار بردن قضیه قبل، خواهیم داشت $\lambda(G) \le \Delta^2+\Delta-2$. به علاوه، از آنجا که هر درخت T همواره رأسی با درجه ۱ دارد، لذا $col(T) \le 2$ و بنابر قضیه ۴، $\lambda(T) \le \Delta+2$. از طرفی، به راحتی می‌توان دید که برای هر گراف G، $\Delta+1 \le \lambda(G)$. لذا برای هر درخت دلخواه T، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۵. اگر T درختی با ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه
$$\lambda(T) \in \{\Delta+1,\Delta+2\}.$$

نشان داده شده است[۱۰] که اگر G گرافی باشد که مانیور K_4 را به عنوان زیر گراف نداشته باشد. آنگاه $\delta(G) \le 2$. لذا اگر G گرافی باشد که مانیور K_4 را

نداشته باشد، آنگاه $col(G) \leq 3$ و لذا بنابر قضیه ۴، $\lambda(G) \leq 2\Delta + 4$. به علاوه بنابر قضیه واگنر[۱۱]، هر گراف فاقد مانیور K_5 (به علاوه مانیور $K_{3,3}$)، دارای رأسی با درجه حداکثر ۵ است. به‌عبارت دیگر، اگر G گرافی فاقد مانیور K_5 باشد، آنگاه $col(G) \leq 6$ و لذا بنابر قضیه ۴، $\lambda(G) \leq 5\Delta + 10$. بنابراین، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۶. اگر G گرافی با ماکسیمم درجه Δ و فاقد مانیور K_l ، $l \in \{4,5\}$، باشد آنگاه $\lambda(G) \leq l(\Delta + 2)$

با توجه به نتایج ۵ و۶، به نظر می‌رسد اگر G گرافی با ماکسیمم درجه Δ و فاقد مانیور K_l باشد، آنگاه رئوس G را می‌توان با حداکثر $l(\Delta + 2)$ رنگ λ-رنگ‌آمیزی کرد. لذا حدس زیر را ارائه می‌دهیم که برای $l \leq 5$ اثبات شده و $l = 6$ اولین عددی است که به ازای آن این حدس باید مورد بررسی قرار گیرد.

حدس. اگر G گرافی با ماکسیمم درجه Δ و فاقد مانیور K_l باشد، آنگاه $\lambda(G) \leq l(\Delta + 2)$.

در ادامه، کران بالای دیگری برای λ- رنگ‌آمیزی گراف‌ها بیان خواهیم کرد.

قضیه ۷. فرض کنید G، گرافی دلخواه و x راس با بزرگترین برچسب باشد که از الگوریتم ۱ بدست آمده باشد. اگر H زیرگراف القائی از G روی رئوس $N(x)$ باشد، آنگاه

$$\lambda(G) \leq \deg(x) + \sum_{y \in N(x)} \deg(y) - 2|E(H)|.$$

اثبات: بنابر الگوریتم ۱، $|I_1| \leq deg(x)$ و به علاوه $|I_2| \leq \sum_{y \in N(x)} deg(y)$. اما بوضوح برای هر یال e در H، تعداد رئوس به فاصله ۲ از راس x به اندازه ۲ واحد کاهش خواهد یافت. لذا

$$|I_2| \leq \sum_{y \in N(x)} deg(y) - 2|E(G)|.$$

بنابراین،

$$\lambda(G) \leq |I_1| + |I_2| \leq deg(x) + \sum_{y \in N(x)} deg(y) - 2|E(H)|$$

و این نیز برهان قضیه را به پایان می‌رساند.

حال در ادامه، کاربردهایی از قضیه فوق را ارائه خواهیم کرد.

نتیجه ۸. فرض کنید r یک عدد صحیح مثبت و G گرافی همبند باشد به‌طوریکه برای هر راس v، گراف القائی روی $N(v)$ دارای حداکثر r مولفه همبندی باشد. در اینصورت $\lambda(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 2r$.

اثبات: فرض کنید x راس با بزرگترین برچسب باشد که از الگوریتم ۱ بدست آمده باشد و $p = deg(x)$. قرار دهید $H = G[N(x)]$. از آنجا که هر گراف همبند n راسی دارای حداقل $n - 1$ یال است، لذا H دارای حداقل $n - r$ یال می‌باشد. لذا بنا بر قضیه ۷،

$$|I_1| + |I_2| \leq 2p + p(\Delta - 1) - 2(p - r)$$

حال برای $1 \leq x \leq \Delta$، قرار دهید

$$f(x) = 2x + x(\Delta - 1) - 2(x - r)$$

واضح است که $f(x)$ در نقطه $x = \Delta$ ماکسیمم مقدار خود را اتخاذ می‌کند. لذا

$$\lambda(G) \leq |I_1| + |I_2| \leq \Delta^2 - \Delta + 2r.$$

و این نیز برهان را به پایان می‌رساند.

با توجه به نتیجه ۸، به راحتی می‌توان دید که اگر G گرافی با ماکسیمم درجه Δ باشد که فاقد $K_{1,3}$ به صورت القائی باشد، آنگاه $r \leq 2$ و لذا حدس ۱، برای هر گراف $K_{1,3}$- آزاد[3] برقرار است. قبل از ارائه نتیجه دیگری از قضیه ۷، به گزاره زیر نیاز داریم. لازم به ذکر است که گراف G یک گراف k- بحرانی نامیده می‌شود هرگاه $\chi(G) = k$ و برای هر زیرگراف سره H از G، $\chi(H) < k$. به راحتی می‌توان نشان داد[۱] اگر G یک گراف k- بحرانی باشد آنگاه $\delta(G) \geq k - 1$.

گزاره ۹. اگر G گرافی همبند با $\chi(G) = k$ باشد، آنگاه $|E(G)| \geq |V(G)| - k + \frac{k(k-1)}{2}$

اثبات. بوضوح حکم برای $k \leq 2$ برقرار است. لذا فرض کنید $k \geq 3$. فرض کنید H زیر گرافی $k-$ بحرانی از G باشد. بوضوح $\delta(H) \geq k - 1$ و $|V(H)| \geq k$. لذا $|E(H)| \geq \frac{|V(H)|(k-1)}{2}$

از آنجا که گراف G همبند است، خواهیم داشت:

3. Claw-free

$$|E(G)| \geq |E(H)| + |V(G)| - |V(H)|.$$

بنابراین

$$|E(G)| \geq \frac{|V(H)|(k-1)}{2} + |V(G)| - |V(H)|$$

برای $x \geq k$، قرار دهید

$$f(x) = \frac{(k-1)x}{2} + |V(G)| - x$$

به راحتی می‌توان دید که تابع $f(x)$ برای هر $x \geq k \geq 3$ تابعی صعودی است و لذا کمترین مقدار خود را در $x = k$ اتخاذ می‌کند. یعنی

$$|E(G)| \geq |V(G)| - k + \frac{k(k-1)}{2}$$

گراف G را موضعاً همبند[4] می‌نامیم هر گاه برای هر راس v در G، گراف $G[N(v)]$ یک گراف همبند باشد. با استفاده از گزاره قبل و قضیه ۷، نتیجه زیر را خواهیم داشت که کران بالائی برای رنگ‌آمیزی گراف‌های موضعاً همبند ارائه می‌دهد.

نتیجه ۱۰. اگر G گرافی موضعاً همبند با ماکسیمم درجه Δ باشد و برای هر راس v، $\chi(G[N(v)]) \geq k$، آنگاه

$$\lambda(G) \leq \Delta^2 - \Delta - k(k-3).$$

اثبات. فرض کنید x راس با بزرگترین برچسب باشد که از الگوریتم ۱ بدست آمده باشد. قرار دهید $p = deg(x)$ و $H = G[N(x)]$. بنابر گزاره ۹، $|E(H)| \geq p - k + \frac{k(k-1)}{2}$ از آنجا که $|I_1| \leq p$ و

$$|I_2| \leq p + p(\Delta - 1) - 2|E(H)|$$

لذا بنا بر قضیه ۷،

$$|I_1| + |I_2| \leq p(\Delta - 1) - k(k-3)$$

اما تابع $f(x) = x(\Delta - 1) - k(k-3)$، با شرط $1 \leq x \leq \Delta$، هنگامی بیشترین مقدار را دارد که $x = \Delta$ بنابراین

$$|I_1| + |I_2| \leq \Delta(\Delta - 1) - k(k-3).$$

لذا $\lambda(G) \leq \Delta^2 - \Delta - k(k-3)$.

بنا بر نتیجه ۱۰، اگر G گرافی موضعا همبند با ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه $\lambda(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 2$ و این بدان معناست که حدس ۱ برای گراف‌های موضعاً همبند درست می‌باشد.

به عنوان آخرین نتیجه از قضیه ۷، نتیجه زیر را خواهیم داشت که حدس ۱ را برای هر گراف یالی[5] اثبات می‌کند. لازم به یاداوری است که اگر G یک گراف باشد، گراف یالی نسبت داده شده به گراف G را با $L(G)$ نشان می‌دهیم و آن را گرافی تعریف می‌کنیم که رئوس آن $E(G)$ است و مجاورت‌ها در $L(G)$ بر اساس مجاورت یال‌ها در G تعریف می‌شوند. گراف G را گراف یالی می‌نامیم هرگاه گرافی مانند H باشد به‌طوریکه $G = L(H)$.

نتیجه ۱۱. اگر G گراف یالی با ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه $\lambda(G) \leq \frac{1}{2}\Delta^2 + 2\Delta$.

اثبات. فرض کنید $G = L(K)$ و $x = uv$ راس G با بزرگترین برچسب باشد که از الگوریتم ۱ بدست آمده باشد و H زیر گراف القائی از G توسط $N(x)$ باشد. فرض کنید $p_1 = deg_K(u)$، $p_2 = deg_K(v)$. بنابراین خواهیم داشت $deg_G(x) = p_1 + p_2$. به وضوح $|E(H)| \geq \binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2}$.

فرض کنید Δ' ماکسیمم درجه گراف K باشد. واضح است که $\Delta \leq 2\Delta'$. بنابر قضیه ۷، $|I_1| \leq p_1 + p_2$

$$|I_2| \leq (p_1 + p_2)\Delta - 2|E(H)|.$$

لذا

$$|I_1| + |I_2| \leq (p_1 + p_2)(\Delta + 2) - p_1^2 - p_2^2.$$

تابع دو متغیره $f(x,y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x,y) = (x+y)(2\Delta' + 2) - x^2 - y^2$$

به طوریکه $1 \leq x, y \leq \Delta'$. به وضوح بیشترین مقدار $f(x,y)$ در $(x,y) = (\Delta', \Delta')$ اتفاق می‌افتد. (در این حالت $\Delta = 2\Delta'$). بنابراین

$$|I_1| + |I_2| \leq f(\Delta', \Delta') = \frac{\Delta^2}{2} + 2\Delta.$$

لذا، $\lambda(G) \leq \frac{\Delta^2}{2} + 2\Delta$ و این نیز برهان را به پایان می‌رساند.

4. Locally Connected
5. Line Graph

فهرست منابع

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co. INC, 1976.

[2] W.K. Hale, Frequency assignment: theory and applications, *Proc. IEEE* 68 (1980), 1497-1514.

[3] J.R. Griggs, R. K. Yeh, Labeling graphs with a condition at distance 2, *SIAM J. Discrete Math*. 5 (1992), 586-595.

[4] D. Kral, R. Skrekovski, A theorem about channel assignment problem, *SIAM J. Discrete Math.* 16 (3) (2003) 426-437.

[5] P. Bella, D. Kral, B. Mohar, K. Quittnerova, Labeling planar graphs with a condition at distance two, *European J. Combin* 28 (2007), 2201-2239.

[6] D. Sakai, Labeling chordal graphs with a condition at distance two, *SIAM J. Discrete Math.* 7 (1994), 133-140.

[7] S. Panda, P. Goel,L(2,1)-labelling of dually chordal graphs and strongly orderable graphs, *Inform. Process. Letters*, 112 (2012), 552-556.

[8] G.J. Chang, D. Kuo, The L(2,1)-labeling problem on graphs, *SIAM J. Discrete Math*. 9 (1996), 309-316.

[9] M. Behzad, Graphs and Their Chromatic Numbers. Ph.D. Thesis, Michigan State University, 1965.

[10] J. Duffn, Topology of series-parallel networks, *J. Math. Anal. Appl*. (1965) 303-318.

[11] K. Wagner, Uber eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Math. Ann*. 144 (1937), 570-590.