

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مباحثی بر روی گراف‌های فازی دوقطبی و کاربردهای آن

هیلدا صالح*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۰/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۸/۲۸

چکیده

در این مقاله در ابتدا تفاضل متقارن و جمع متقارن دو گراف را بر روی گراف‌های فازی دوقطبی تعریف می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که گراف حاصل نیز یک گراف فازی دوقطبی است. در ادامه با استفاده از تعریف گراف‌های فازی دوقطبی قوی و گسترش این مفهوم، دو تعریف جدید بر روی گراف‌های فازی دوقطبی به نام قوی از بالا و قوی از پایین معرفی می‌کنیم. سپس نتایج به دست آمده را بر روی چند مثال عددی مورد بررسی قرار می‌دهیم. و در نهایت کاربردی از گراف‌های فازی دوقطبی را بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌های فازی، گراف فازی دوقطبی، گراف فازی دوقطبی قوی، تفاضل متقارن، جمع متقارن.

۱- مقدمه

مفهوم مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط لطفعلی عسکرزاده در سال ۱۹۶۵ با استفاده از تعمیم نظریه مجموعه‌های کلاسیک ارائه شد [۱]. هدف این نظریه یافتن الگوهای ریاضی است که با نحوه تفکر و استنتاج انسانی و همچنین با الگوهای طبیعی و واقعی تطابق و سازگاری داشته باشد. تئوری مجموعه‌های فازی پس از ارائه به سرعت بسط و گسترش یافت و در شاخه‌های مختلف علوم از جمله تحقیق در عملیات، حمل و نقل، نظریه اطلاعات، شبکه‌های عصبی، علوم مهندسی و سایر علوم به کار گرفته شد [۲و۳]. امروزه یکی از شاخه‌های پر کاربرد مجموعه‌های فازی در علم نظریه گراف می‌باشد.

یک گراف در حقیقت زوج مرتب $G = (V, E)$ است به طوری که $V = V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی از رئوس و $E = E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها است به طوری که $E \subseteq V \times V$. نظریه گراف‌های فازی برای اولین بار توسط رزنفلد در سال ۱۹۷۵ بر پایه مجموعه‌های فازی معرفی شد [۴]. در مقایسه با گراف‌های کلاسیک، گراف‌های فازی قدرت تطبیق بیشتری با مسایل واقعی جهان پیرامون ما را دارا می‌باشند. بنابراین نظریه گراف فازی به سرعت مورد توجه بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف علوم از جمله طبقه‌بندی، خوشه‌بندی، سیستم‌های اطلاعاتی، حمل و نقل و ... قرار گرفت و مطالعات بسیاری تاکنون در این زمینه انجام گرفته است [۵و۶]. از جمله دیگر کاربردهای مهم گراف‌های فازی استفاده در شبکه‌های ارتباطی تلفن‌های همراه می‌باشد به طوری که گراف‌های فازی در انتقال سیگنال‌های تلفن همراه به پیدا کردن مسیری با حداقل طول با حداکثر شدت سیگنال بین هر دو برج متوالی به عنوان شدت گراف‌های فازی در نظر گرفته می‌شوند [۷].

در سال ۱۹۹۴، مجموعه فازی دوقطبی با گسترش مجموعه‌های فازی کلاسیک توسط ژانگ معرفی شد [۸و۹]. از جمله کاربردهای مهم مجموعه‌های فازی دوقطبی استفاده در سیستم‌های اطلاعاتی دوقطبی به منظور برقراری ارتباط بین اطلاعات مثبت و منفی است. بدین صورت که اطلاعات مثبت به صورت عناصری با

درجه عضویت بین $[0, 1]$ و اطلاعات منفی به صورت عناصری با درجه عضویت بین $[-1, 0]$ معرفی می‌شوند. در سال ۲۰۱۱، اکرم [۹] با استفاده از مجموعه‌های فازی دوقطبی، گراف‌های فازی دوقطبی را تعریف کرد. از آن زمان به بعد گراف‌های فازی دوقطبی در شاخه‌های مختلف علوم کامپیوتر از جمله هوش مصنوعی، تشخیص الگو و شبکه به طور گسترده به کار گرفته شد. و تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام شده است. برای مطالعه بیشتر در زمینه گراف‌های فازی دوقطبی و آشنایی بیشتر با خواص ریاضی این دسته از گراف‌ها به مراجع [۱۲-۹] مراجعه کنید.

یکی از مباحث مهم در نظریه گراف‌های فازی تعریف اعمال کلاسیک در نظریه گراف بر روی گراف‌های فازی می‌باشد [۱۳و۱۴]. به همین منظور اعمال اجتماع، جمع، ضرب دکارتی و ترکیب توسط مندسون و پنگ بر روی گراف‌های فازی تعریف شد [۱۵]. همچنین دو عمل تنسور و ضرب نرمال توسط نیرمالا و ویجایا، بر روی گراف‌های فازی تعمیم داده شد [۱۶]. برای مطالعه بیشتر به [۱۹ و ۱۸و۱۷] مراجعه شود.

در این مقاله در ابتدا برخی مفاهیم مورد نیاز در زمینه مجموعه‌های فازی و گراف‌های فازی را بیان می‌کنیم سپس دو عمل تفاضل متقارن و جمع متقارن را بر روی گراف‌های فازی دوقطبی تعریف می‌کنیم. و برخی از خواص آن‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه با استفاده از مفهوم گراف‌های فازی دوقطبی قوی و گسترش این مفهوم، چند تعریف جدید بر روی گراف‌های فازی دوقطبی به نام قوی از بالا و قوی از پایین و همچنین گراف فازی دوقطبی نیمه قوی را معرفی می‌کنیم. و نتایج به دست آمده را بر روی چند مثال عددی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت کاربردی از گراف‌های فازی دوقطبی را بیان می‌کنیم.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش برخی مفاهیم مورد نیاز در زمینه مجموعه‌های فازی و گراف‌های فازی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۲-۵: [۹] فرض کنید $G = (A, B)$ یک گراف فازی دوقطبی است در این صورت گراف G قوی است اگر و تنها اگر به ازای هر xy عضو $E(G)$:

$$\mu_B^P(xy) = \min\{\mu_A^P(x), \mu_A^P(y)\}$$

و

$$\mu_B^N(xy) = \max\{\mu_A^N(x), \mu_A^N(y)\}$$

تعریف ۲-۶: [۱۳] جمع متقارن دو گراف فازی G_1 و G_2 با نماد $G_1 \vee G_2$ نمایش داده می‌شود و مجموعه رئوس آن عبارت است از $V(G_1) \times V(G_2)$. همچنین دو راس (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در $G_1 \vee G_2$ با یکدیگر مجاورند هرگاه x_1 با y_1 در G_1 مجاور باشند یا x_2 با y_2 در G_2 مجاور باشند و یا هر دو حالت برقرار باشد.

تعریف ۲-۷: [۱۳] تفاضل متقارن دو گراف فازی G_1 و G_2 با نماد $G_1 \oplus G_2$ نمایش داده می‌شود و مجموعه رئوس آن عبارت است از $V(G_1) \times V(G_2)$. همچنین دو راس (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در گراف $G_1 \oplus G_2$ با یکدیگر مجاورند هرگاه x_1 با y_1 در G_1 مجاور باشند یا x_2 با y_2 در G_2 مجاور باشند ولی هر دو حالت برقرار نباشد.

تعریف ۲-۸: [۱۵] ضرب دکارتی دو گراف فازی G_1 و G_2 با نماد $G_1 \times G_2$ نمایش داده می‌شود و مجموعه رئوس آن عبارت است از $V(G_1) \times V(G_2)$. همچنین دو راس (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در گراف $G_1 \times G_2$ با یکدیگر مجاورند هرگاه x_1 و $x_2 = y_2$

یا $x_1 = y_1$ و x_2 با y_2 در G_1 مجاور باشند و یا $x_1 = y_1$ و x_2 با y_2 در G_2 مجاور باشند به طوری که به ازای هر $(x_1, x_2) \in V(G_1 \times G_2)$ داریم:

$$\begin{aligned} & (\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2) \\ &= \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\} \end{aligned}$$

و

تعریف ۲-۱: [۱] مجموعه فازی A ، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

به طوری که X مجموعه مرجع است و $\mu_A(x)$ تابعی از X به $[0, 1]$ است که نشان دهنده درجه عضویت x در A است.

تعریف ۲-۲: [۴] زوج مرتب $G = (\mu, \rho)$ یک گراف فازی است به طوری که μ یک زیرمجموعه فازی از X است و $\rho: X \times X \rightarrow [0, 1]$ یک رابطه فازی متقارن بر روی μ است. به طوری که:

$$\rho(x, y) \leq \min\{\mu(x), \mu(y)\}.$$

لازم به توضیح است که در طول این مقاله نماد xy به جای (x, y) برای اعضای $E(G)$ به کار گرفته خواهد شد.

تعریف ۲-۳: [۶] فرض کنید X یک مجموعه نا تهی است. مجموعه فازی دوقطبی B بر روی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = \{(x, \mu_B^P(x), \mu_B^N(x)) | x \in X\}$$

به طوری که $\mu_B^P(x): X \rightarrow [0, 1]$ و $\mu_B^N(x): X \rightarrow [-1, 0]$

تعریف ۲-۴: [۹] زوج مرتب $G = (A, B)$ یک گراف فازی دوقطبی با مجموعه رئوس V است به طوری که $A = (\mu_A^P, \mu_A^N)$ یک مجموعه‌ی فازی دوقطبی در V و $B = (\mu_B^P, \mu_B^N)$ یک مجموعه فازی دوقطبی در $E \subseteq V \times V$ است به طوری که به ازای هر xy عضو $E(G)$ داریم:

$$\mu_B^P(xy) \leq \min\{\mu_A^P(x), \mu_A^P(y)\}$$

و

$$\mu_B^N(xy) \geq \max\{\mu_A^N(x), \mu_A^N(y)\}.$$

تعریف ۳-۱: فرض کنید $G_1 = (A_1, B_1)$ و $G_2 = (A_2, B_2)$ دو گراف دو قطبی فازی می‌باشند. به ازای هر (x_1, x_2) عضو $V_1 \times V_2$ ، جمع متقارن دو گراف دو قطبی فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mu_{A_1}^P \vee \mu_{A_2}^P)(x_1, x_2) = \min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_2}^P(x_2)\}$$

و

$$(\mu_{A_1}^N \vee \mu_{A_2}^N)(x_1, x_2) = \max\{\mu_{A_1}^N(x_1), \mu_{A_2}^N(x_2)\}$$

برای تعریف درجه عضویت هر یک از یال‌ها در گراف حاصل سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف):

فرض کنید $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_1 y_1 \in E(G_1)$ و $x_2, y_2 \in V(G_2)$ بنابراین:

$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^P \vee \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{B_1}^P(x_1 y_1), \mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\} \\ & (\mu_{B_1}^N \vee \mu_{B_2}^N)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \max\{\mu_{B_1}^N(x_1 y_1), \mu_{A_2}^N(x_2), \mu_{A_2}^N(y_2)\} \end{aligned}$$

(ب):

فرض کنید $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_1, y_1 \in V(G_1)$ و $x_2 y_2 \in E(G_2)$ در نتیجه:

$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^P \vee \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{B_2}^P(x_2 y_2), \mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_1}^P(y_1)\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^N \vee \mu_{B_2}^N)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \max\{\mu_{B_2}^N(x_2 y_2), \mu_{A_1}^N(x_1), \mu_{A_1}^N(y_1)\} \end{aligned}$$

(ج):

فرض کنید $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_1 y_1 \in E(G_1)$ و $x_2 y_2 \in E(G_2)$ بنابراین:

$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^P \vee \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{B_1}^P(x_1 y_1), \mu_{B_2}^P(x_2 y_2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\rho_1 \times \rho_2)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\rho_2(x_2, y_2), \mu_1(x_1) \mid x_1 = y_1 \\ & \in V(G_1), \quad x_2 y_2 \in E(G_2)\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & (\rho_1 \times \rho_2)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\rho_1(x_1, y_1), \mu_2(x_2) \mid x_2 = y_2 \\ & \in V(G_2), \quad x_1 y_1 \in E(G_1)\} \end{aligned}$$

تعریف ۲-۹: [۱۵] ترکیب دو گراف فازی G_1 و G_2 با نماد $G_1 [G_2]$ نمایش داده می‌شود و مجموعه رئوس آن عبارت است از $V(G_1) \times V(G_2)$. همچنین دو راس (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در گراف $G_1 \times G_2$ با یکدیگر مجاورند هرگاه $x_2 = y_2$ و x_1 با y_1 در G_1 مجاور باشند و یا $x_1 = y_1$ و x_2 با y_2 در G_2 مجاور باشند و یا $x_2 \neq y_2$ و x_1 با y_1 در G_1 مجاور باشند. به طوری که به طوری که به ازای هر (x_1, x_2) عضو $V(G_1 [G_2])$ داریم:

$$\begin{aligned} & (\mu_1 [\mu_2])(x_1, x_2) \\ &= \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & (\rho_1 [\rho_2])(x_1, x_2)(y_1, y_2) \\ &= \min\{\rho_2(x_2, y_2), \mu_1(x_1) \mid x_1 = y_1 \\ & \in V(G_1), \quad x_2 y_2 \in E(G_2)\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & (\rho_1 [\rho_2])(x_1, x_2)(y_1, y_2) \\ &= \min\{\rho_1(x_1, y_1), \mu_2(x_2) \mid x_2 = y_2 \\ & \in V(G_2), \quad x_1 y_1 \in E(G_1)\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & (\rho_1 [\rho_2])(x_1, x_2)(y_1, y_2) \\ &= \min\{\rho_1(x_1, y_1), \mu_2(x_2), \mu_2(y_2) \mid x_2 \\ & \neq y_2, \quad x_1 y_1 \in E(G_1)\} \end{aligned}$$

۳- جمع متقارن و تفاضل متقارن دو گراف فازی دو قطبی

در این بخش با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی برخی از مفاهیم گراف‌های کلاسیک را بر روی گراف‌های دو قطبی فازی گسترش می‌دهیم.

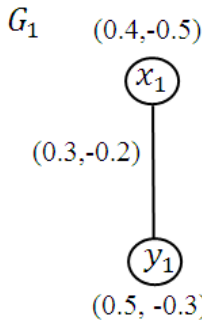
$$\begin{aligned} & \max\{\mu_{A_2}^N(x_2), \mu_{A_2}^N(y_2)\} \\ &= \max\{\max\{\mu_{A_1}^N(x_1), \mu_{A_2}^N(x_2)\}, \\ & \max\{\mu_{A_1}^N(y_1), \mu_{A_2}^N(y_2)\}\} \\ &= \max\{(\mu_{A_1}^N \vee \mu_{A_2}^N)(x_1, x_2), \\ & (\mu_{A_1}^N \vee \mu_{A_2}^N)(y_1, y_2)\}. \end{aligned}$$

ب) فرض کنید $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_1, y_1 \in V(G_1)$ و $x_2, y_2 \in E(G_2)$ بنابراین به طور مشابه با الف ثابت می‌شود.

ج) فرض کنید $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_1, y_1 \in E(G_1)$ و $x_2, y_2 \in V(G_2)$

$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^P \vee \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{B_1}^P(x_1, y_1), \mu_{B_2}^P(x_2, y_2)\} \\ &\leq \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_1}^P(y_1)\}, \\ & \min\{\mu_{B_2}^P(x_2), \mu_{B_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_2}^P(x_2)\}, \\ & \min\{\mu_{A_1}^P(y_1), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \min\{(\mu_{A_1}^N \vee \mu_{A_2}^N)(x_1, x_2), \\ & (\mu_{A_1}^N \vee \mu_{A_2}^N)(y_1, y_2)\}. \end{aligned}$$

مثال ۱-۳: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2 را همان طور که در شکل ۱-۳ نشان داده شده است در نظر بگیرید.



$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^N \vee \mu_{B_2}^N)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \max\{\mu_{B_1}^N(x_1, y_1), \mu_{B_2}^N(x_2, y_2)\} \end{aligned}$$

قضیه ۱-۳: فرض کنید $G_1 = (A_1, B_1)$ و $G_2 = (A_2, B_2)$ دو گراف دو قطبی فازی می‌باشند. بنابراین $G_1 \vee G_2$ یک گراف فازی دو قطبی است.

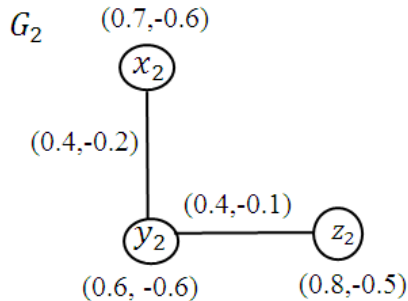
اثبات: فرض کنید $G = G_1 \vee G_2$ بنابراین با استفاده از تعریف گراف فازی دو قطبی داریم:

الف) فرض کنید $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_1, y_1 \in E(G_1)$ و $x_2, y_2 \in V(G_2)$ بنابراین:

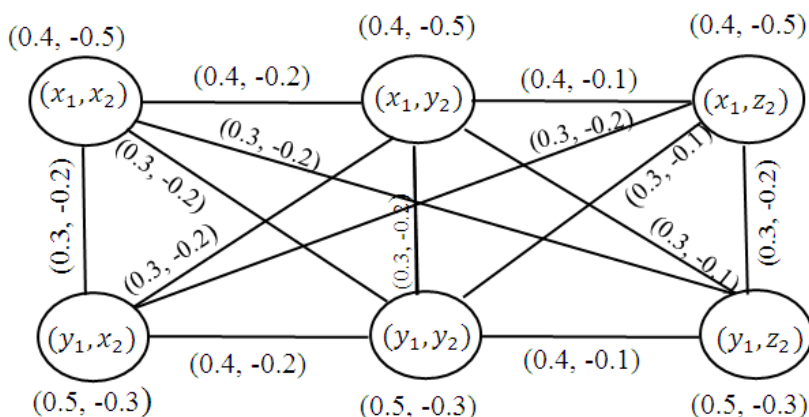
$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^P \vee \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{B_1}^P(x_1, y_1), \mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\} \\ &\leq \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_1}^P(y_1)\}, \\ & \mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\} \\ &= \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_2}^P(x_2)\}, \\ & \min\{\mu_{A_1}^P(y_1), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \min\{(\mu_{A_1}^P \vee \mu_{A_2}^P)(x_1, x_2), \\ & (\mu_{A_1}^P \vee \mu_{A_2}^P)(y_1, y_2)\}. \end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} & (\mu_{B_1}^N \vee \mu_{B_2}^N)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \\ & \max\{\mu_{B_1}^N(x_1, y_1), \mu_{A_2}^N(x_2), \mu_{A_2}^N(y_2)\} \\ & \geq \max\{\max\{\mu_{A_1}^N(x_1), \mu_{A_1}^N(y_1)\} \end{aligned}$$



شکل ۱-۳: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2



شکل ۳-۲: جمع متقارن دو گراف فازی دو قطبی G_2 و G_1

$$(\mu_{B_1}^N \vee \mu_{B_2}^N)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ = \max\{\mu_{B_1}^N(x_1 y_1), \mu_{A_2}^N(x_2), \mu_{A_2}^N(y_2)\}$$

حالت دوم:

فرض کنید: $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_2 y_2 \in E(G_2)$ و $x_1 y_1 \in V(G_1)$ در نتیجه:

$$(\mu_{B_1}^P \vee \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \\ \min\{\mu_{B_2}^P(x_2 y_2), \mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_1}^P(y_1)\}$$

و

$$(\mu_{B_1}^N \vee \mu_{B_2}^N)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ = \max\{\mu_{B_2}^N(x_2 y_2), \mu_{A_1}^N(x_1), \mu_{A_1}^N(y_1)\}$$

قضیه ۳-۲: فرض کنید $G_1 = (A_1, B_1)$ و $G_2 = (A_2, B_2)$ دو گراف فازی دو قطبی می‌باشند. بنابراین $G_1 \oplus G_2$ یک گراف فازی دو قطبی است. **اثبات:** به طور مشابه با قضیه ۳-۱ ثابت می‌شود.

مثال ۳-۱: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2 را همان طور که در شکل ۳-۳ نشان داده شده است در نظر بگیرید. و تفاضل متقارن G_1 و G_2 در شکل ۳-۴ نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می‌کنید تفاضل متقارن دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2 یک گراف فازی دو قطبی است.

جمع متقارن G_1 و G_2 در شکل ۳-۲ نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می‌کنید $G_1 \vee G_2$ یک گراف فازی دو قطبی است.

تعریف ۳-۲: فرض کنید $G_1 = (A_1, B_1)$ و $G_2 = (A_2, B_2)$ دو گراف فازی دو قطبی فازی می‌باشند. بنابراین تفاضل متقارن دو گراف فازی دو قطبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mu_{A_1}^P \vee \mu_{A_2}^P)(x_1, x_2) = \\ \min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_2}^P(x_2)\}$$

و

$$(\mu_{A_1}^N \vee \mu_{A_2}^N)(x_1, x_2) \\ = \max\{\mu_{A_1}^N(x_1), \mu_{A_2}^N(x_2)\}$$

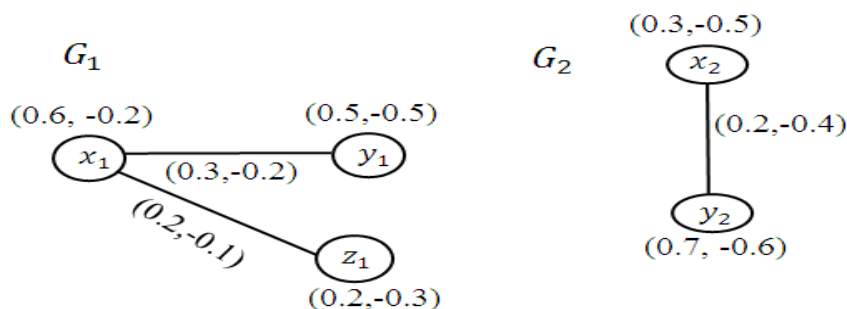
همچنین برای تعریف درجه عضویت هر یک از یال‌ها در گراف حاصل دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول:

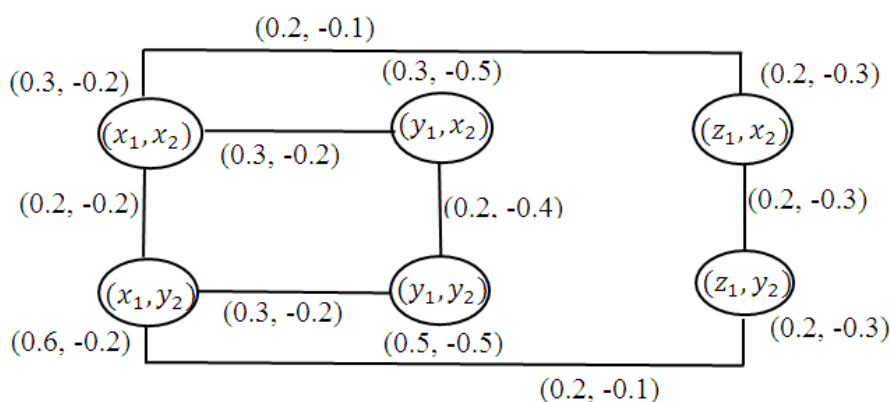
فرض کنید $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G)$ به طوری که $x_1 y_1 \in E(G_1)$ و $x_2, y_2 \in V(G_2)$ بنابراین:

$$(\mu_{B_1}^P \vee \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ = \min\{\mu_{B_1}^P(x_1 y_1), \mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\}$$

و



شکل ۳-۳: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2



شکل ۳-۴: تفاضل متقارن دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2

مشاهده کرد که $G_1 \times G_2$ یک گراف فازی دو قطبی قوی است. در حالیکه G_1 و G_2 گراف‌های فازی قوی نیستند.

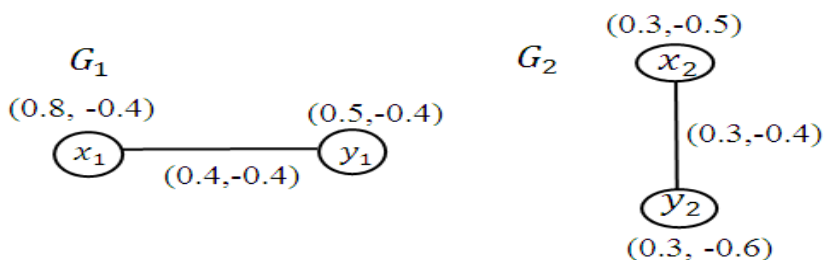
مثال ۴-۲: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2 در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. ترکیب دو گراف G_1 و G_2 با استفاده از تعریف ۳-۵ [۹] در شکل ۴-۴ نمایش داده شده است.

۴- گراف فازی دو قطبی قوی

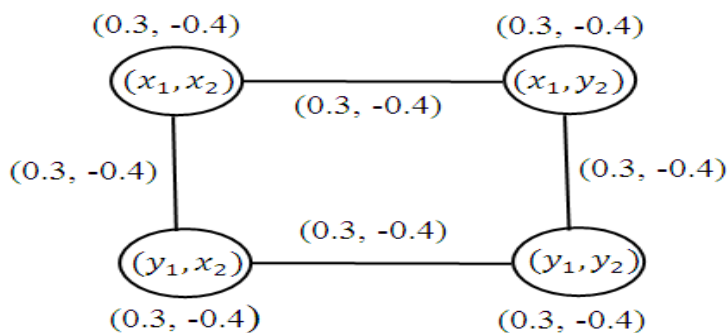
در این بخش بر مبنای تعریف گراف‌های فازی دو قطبی قوی، مفهومی جدید را بروی این دسته از گراف‌ها تعریف می‌کنیم. قبل از شروع برای روشن شدن انگیزه بحث چند مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۴-۱: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2 را همان طور که در شکل ۳-۴ نشان داده شده است در نظر بگیرید.

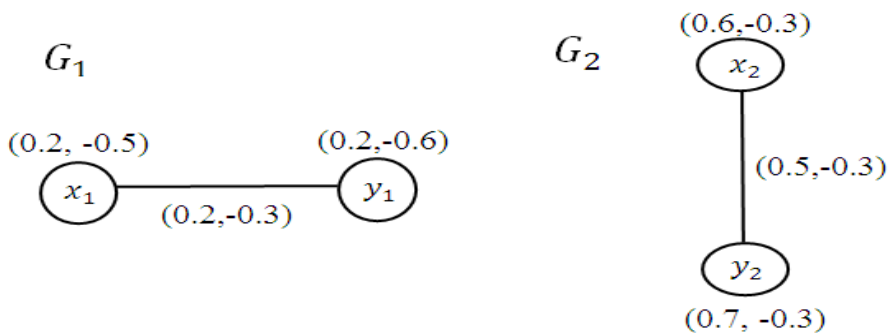
ضرب دکارتی دو گراف با استفاده از تعریف ۳-۳ [۹] در شکل ۴-۲ نمایش داده شده است. به راحتی می‌توان



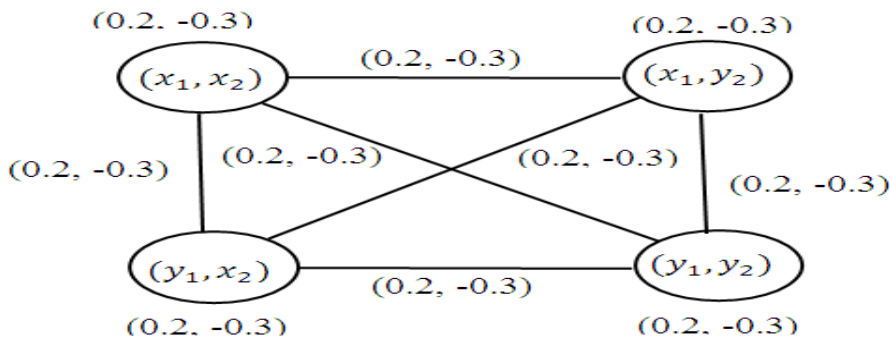
شکل ۴-۱: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2



شکل ۴-۲: ضرب دکارتی دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2



شکل ۴-۳: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2



شکل ۴-۴: ترکیب دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2

تذکره ۴-۱: اگر یک گراف فازی دوقطبی قوی باشد آنگاه نیمه قوی، قوی از بالا و قوی از پایین است. ولی عکس مطلب لزوماً برقرار نیست.

تذکره ۴-۲: اگر یک گراف فازی دوقطبی نیمه قوی باشد آنگاه قوی از بالا و یا قوی از پایین است. ولی عکس مطلب لزوماً برقرار نیست.

مثال ۴-۳: دو گراف فازی دو قطبی نشان داده شده در شکل ۴-۵ را در نظر بگیرید. بدیهی است که G_1 و G_2 به ترتیب گراف‌های از بالا قوی و از پایین قوی هستند.

قضیه ۴-۱: فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف فازی دو قطبی و از بالا قوی می‌باشند آن‌گاه:
الف) $G_1 \times G_2$ از بالا قوی است.
ب) $G_1[G_2]$ از بالا قوی است.
ج) $G_1 + G_2$ از بالا قوی است.

اثبات الف): فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف فازی دو قطبی و از بالا قوی می‌باشند و $G_1 = (A_1, B_1)$ و همچنین $G_2 = (A_2, B_2)$ بنابراین $G_1 \times G_2 = (A_1 \times A_2, B_1 \times B_2)$

همان طور که مشاهده می‌کنید $G_1[G_2]$ یک گراف فازی دو قطبی قوی است. درحالی‌که G_1 و G_2 گراف‌های فازی قوی نمی‌باشند.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید یافته‌های این تحقیق قضایای اثبات شده در [۹] را تایید نمی‌کند. بر این اساس تعاریف زیر را به منظور گسترش مفهوم گراف دوقطبی فازی قوی ارائه می‌دهیم.

تعریف ۴-۱: گراف فازی دو قطبی $G = (A, B)$ را نیمه قوی گویند هرگاه به ازای هر $xy \in E(G)$:

$$\mu_B^P(xy) = \min(\mu_A^P(x), \mu_A^P(y))$$

یا

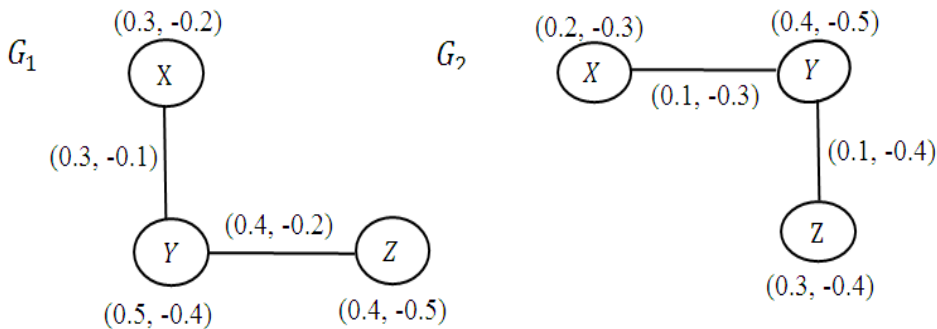
$$\mu_B^N(xy) = \max(\mu_A^N(x), \mu_A^N(y))$$

تعریف ۴-۲: گراف فازی دو قطبی $G = (A, B)$ از بالا قوی گویند هرگاه به ازای هر $xy \in E(G)$:

$$\mu_B^P(xy) = \min(\mu_A^P(x), \mu_A^P(y))$$

تعریف ۴-۳: گراف فازی دو قطبی $G = (A, B)$ از پایین قوی گویند هرگاه به ازای هر $xy \in E(G)$:

$$\mu_B^N(xy) = \max(\mu_A^N(x), \mu_A^N(y))$$



شکل ۴-۵: دو گراف فازی دو قطبی G_1 و G_2

$$\begin{aligned} &= \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_2}^P(x_2)\}, \\ &\min\{\mu_{A_1}^P(y_1), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \min\{(\mu_{A_1}^P \circ \mu_{A_2}^P)(x_1, x_2), \\ &(\mu_{A_1}^P \circ \mu_{A_2}^P)(y_1, y_2)\}. \end{aligned}$$

اثبات ج) اثبات بدیهی است.

قضیه ۴-۲: فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف فازی دو قطبی و از بالا قوی می‌باشند آن‌گاه:
الف) $G_1 \times G_2$ از پایین قوی است.
ب) $G_1[G_2]$ از پایین قوی است.
ج) $G_1 + G_2$ از پایین قوی است.
اثبات: به طور مشابه با قضیه ۴-۱ ثابت می‌شود.

قضیه ۴-۳: فرض کنید $G_1 \times G_2$ یک گراف فازی دو قطبی نیمه قوی است بنابراین حداقل یکی از دو گراف G_1 یا G_2 یک گراف فازی دو قطبی و نیمه قوی می‌باشند.

اثبات: فرض کنید هیچ یک از گراف G_1 و G_1 یک گراف فازی دو قطبی و نیمه قوی نمی‌باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}^P(x_1y_1) &< \min\{\mu_{A_1}^P(y_1), \mu_{A_1}^P(x_1)\} \\ &\text{و} \\ \mu_{A_1}^N(x_1y_1) &> \max\{\mu_{A_1}^N(y_1), \mu_{A_1}^N(x_1)\} \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \mu_{A_2}^P(x_2y_2) &< \min\{\mu_{A_2}^P(y_2), \mu_{A_2}^P(x_2)\} \\ &\text{و} \\ \mu_{A_2}^N(x_2y_2) &> \max\{\mu_{A_2}^N(y_2), \mu_{A_2}^N(x_2)\} \end{aligned}$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} E &= \{(z, x_2)(z, y_2) | z \in V(G_1), x_2y_2 \in E(G_2)\} \\ \cup &= \{(x_1, w)(y_1, w) | x_1y_1 \in E(G_1), w \in V(G_2)\} \end{aligned}$$

الف) فرض کنید

$$(z, x_2)(z, y_2) \in E(G_1 \times G_2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &(\mu_{B_1}^P \times \mu_{B_2}^P)((z, x_2)(z, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{A_1}^P(z), \mu_{B_1}^P(x_2y_2)\} \end{aligned}$$

و با استفاده از تعریف ۴-۲ داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{B_1}^P(x_1y_1) &= \min\{\mu_{A_1}^P(y_1), \mu_{A_1}^P(x_1)\} \\ &\text{و} \\ \mu_{B_2}^P(x_2y_2) &= \min\{\mu_{A_2}^P(y_2), \mu_{A_2}^P(x_2)\} \end{aligned}$$

حالت ۱) به ازای هر $x \in A_1$ و $x_2y_2 \in B_2$

بنابراین

$$\begin{aligned} &(\mu_{B_1}^P \times \mu_{B_2}^P)((x, x_2)(x, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{A_1}^P(x), \mu_{B_2}^P(x_2y_2)\} \\ &= \min\{\mu_{A_1}^P(x), \min\{\mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x), \mu_{A_2}^P(x_2)\}, \\ &\min\{\mu_{A_1}^P(x), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \min\{(\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(x, x_2) \\ &, (\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(x, y_2)\} \end{aligned}$$

حالت ۲) به ازای هر $x_1y_1 \in B_1$ و $z \in A_2$ داریم:

$$\begin{aligned} &(\mu_{B_1}^P \times \mu_{B_2}^P)((x_1, z)(y_1, z)) \\ &= \min\{\mu_{B_1}^P(x_1y_1), \mu_{A_2}^P(z)\} \\ &= \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_1}^P(y_1)\}, \mu_{A_2}^P(z)\} \\ &= \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_2}^P(z)\}, \\ &\min\{\mu_{A_1}^P(y_1), \mu_{A_2}^P(z)\}\} \\ &= \min\{(\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(x_1, z), \\ &(\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(y_1, z)\} \end{aligned}$$

اثبات ب) فرض کنید:

$$G_1[G_2] = (A_1 \circ A_2, B_1 \circ B_2)$$

حالت ۱) فرض کنید $(x \in A_1, x_2y_2 \in B_2)$ در این حالت اثبات مشابه با قسمت الف است بنابراین از اثبات این قسمت چشم پوشی می‌کنیم.

حالت ۲) فرض کنید $x_1y_1 \in B_1$ و $x_2 \neq y_2$ بنابراین:

$$\begin{aligned} &(\mu_{B_1}^P \circ \mu_{B_2}^P)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \\ &= \min\{\mu_{B_1}^P(x_1y_1), \mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\} \\ &= \min\{\mu_{A_1}^P(x_1), \mu_{A_1}^P(y_1), \\ &\min\{\mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \end{aligned}$$

شده و از این ابزار برای کسب موفقیت و سود بیشتر، به شکل‌ها، رنگ‌ها و فرم‌های مختلف بهره می‌برند. قرن حاضر با وجود احاطه رسانه‌های مختلف قرن "انفجار اطلاعات" نام گرفته در این میان برعکس گذشته انسانها ان‌چنان در این جامعه صنعتی با کمبود وقت مواجه‌اند که نمی‌توانند حتی توجه سطحی به پیام‌های بی‌شمار موجود در اطراف خود داشته باشند بنابراین کسانی در این عصر موفق به جلب توجه مردم و جذب مخاطب می‌شوند که با تسلط به روشهای نوین بر مخاطب خود تاثیر گذاشته‌اند. و بدین ترتیب باعث تغییر در رفتار مخاطب خود و موفق به ترغیب او به خرید کالا یا استفاده از خدمات می‌گردند. در مطالعاتی که تاکنون در زمینه رفتارهای گروهی انجام گرفته است این موضوع به اثبات رسیده است که هر مشتری می‌تواند بر روی افکار و انتخاب سایر مشتریان تاثیرگذار باشد. جذب مشتریان با استفاده مشتریان قبلی و همچنین از دست دادن مشتریان بالقوه براساس نظرات سایر مشتریان امری انکار ناپذیر است.

امروزه نظریه گراف فازی مورد توجه بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف علوم از جمله علوم اجتماعی، علوم مدیریت و ... قرار گرفت و مطالعات بسیاری تاکنون در این زمینه انجام گرفته است. یکی از دستاوردهای مهم نظریه گراف‌های فازی استفاده از آن برای توصیف روابط میان عناصر مختلف در دنیای واقعی است. به عنوان مثال گروهی از مشتریان را در نظر بگیرید که تحت تاثیر سایر مشتریان برای خرید یک محصول خاص قرار دارند برای مدل‌سازی رفتار این دسته از مشتریان، گراف‌های فازی جهت‌دار ابزاری مناسب و کاربردی است.

گروهی از مشتریان یک محصول را در نظر بگیرید در این شرایط هر راس در یک گراف جهت‌دار به عنوان یک مشتری نظر گرفته می‌شود. و درجه عضویت هر راس نشان دهنده میزان تعلق هر مشتری به مجموعه مشتریان محصول مورد نظر است. همچنین درجه عضویت هر یال جهت‌دار از راس X به راس Y، نشان دهنده قدرت تاثیرگذاری مشتری X بر روی مشتری Y است. توجه به نکته ضروری است که این گراف فاقد طوقه است. به عنوان نمونه گراف فازی جهت‌دار از گروهی از مشتریان را در شکل ۵-۱ نظر بگیرید به

$$\begin{aligned} &< \min\{\mu_{A_1}^P(z), \min\{\mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \min\{\min\{\mu_{A_1}^P(z), \mu_{A_2}^P(x_2)\}, \\ &\min\{\mu_{A_1}^P(z), \mu_{A_2}^P(x_2)\}\} \\ &= \min\{(\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(z, x_2), \\ &(\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(z, y_2)\} \end{aligned}$$

بنابراین $G_1 \times G_2$ از بالا قوی نمی‌باشد.
از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} &(\mu_{B_1}^N \times \mu_{B_2}^N)((z, x_2)(z, y_2)) \\ &= \max\{\mu_{A_1}^P(z), \mu_{B_1}^P(x_2 y_2)\} \\ &> \max\{\mu_{A_1}^P(z), \max\{\mu_{A_2}^P(x_2), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \max\{\max\{\mu_{A_1}^P(z), \mu_{A_2}^P(x_2)\}, \\ &\max\{\mu_{A_1}^P(z), \mu_{A_2}^P(y_2)\}\} \\ &= \max\{(\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(z, x_2), \\ &(\mu_{A_1}^P \times \mu_{A_2}^P)(z, y_2)\} \end{aligned}$$

بنابراین $G_1 \times G_2$ از پایین قوی نمی‌باشد. و این یک تناقض است.

(ب) فرض کنید

$$(x_1, w)(y_1, w) \in E(G_1 \times G_2)$$

به طور مشابه با (الف) اثبات می‌شود. بنابراین صرف نظر می‌شود.

قضیه ۴-۴: فرض کنید $G_1[G_2]$ یک گراف فازی دو قطبی نیمه قوی است بنابراین حداقل یکی از دو گراف G_1 یا G_2 یک گراف فازی دو قطبی و نیمه قوی می‌باشند.

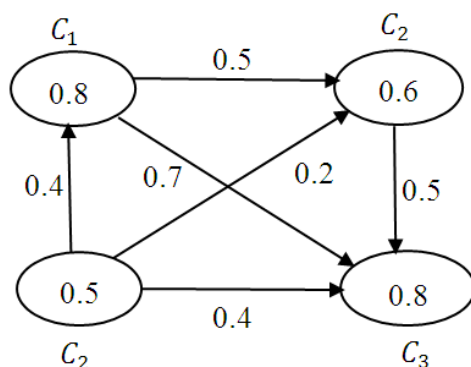
اثبات: به طور مشابه با قضیه ۴-۳ ثابت می‌شود.

۵- کاربرد گراف‌های فازی دوقطبی

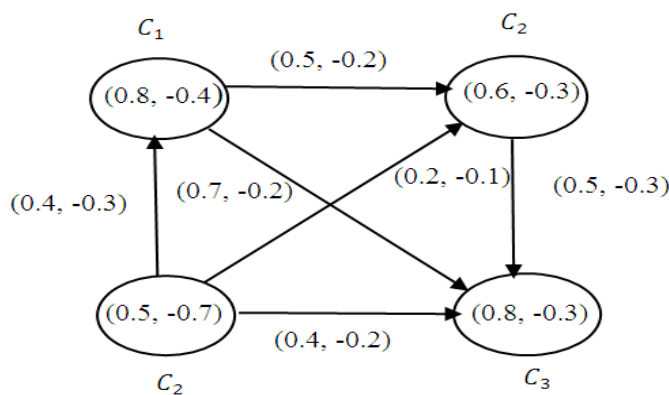
امروزه تبلیغات به معنای تحت تاثیر قراردادن نگرش‌ها و افکار دیگران برای تحقق یک هدف خاص است. هدف از تبلیغ هر چه باشد کوششی است منظم و برنامه ریزی شده برای دستکاری ادراک و همگرا ساختن افراد و هدایت رفتار افکار عمومی به سوی هدف صاحبان تبلیغ. صاحبان تکنولوژی برای ارائه‌ی محصول خود به مخاطب و بالا بردن میزان پذیرش وی، دست به دامن تبلیغات

مناسب برای نشان دادن همه روابط میان مشتریان می‌باشند در گراف فازی دوقطبی قدرت تاثیر یک فرد بر روی فرد دیگر در غالب درجه عضویت مثبت و منفی تعریف می‌شود. یک عدد مثبت به عنوان میزان تاثیر یک فرد در جذب یک مشتری و عدد منفی به عنوان قدرت یک مشتری در دفع یک مشتری دیگر می‌باشد. به عنوان مثال همان طور که در شکل ۵-۲ مشاهده می‌کنید درجه عضویت مثبت و منفی به عنوان درصد مثبت و منفی تاثیرگذاری مشتریان تفسیر می‌شود.

عنوان مثال مشتری C_1 به میزان ۰.۷ قابلیت تاثیرگذاری و جذب مشتری C_3 را خواهد داشت. اما در شرایط واقعی قابلیت تاثیرگذاری هر مشتری بر روی مجموعه مشتریان یک محصول خاص، همواره مثبت نمی باشد. به عنوان مثال تصور کنید دو فرد در یک گروه خاص همواره با یکدیگر دچار کنش می‌باشند بنابراین تاثیر گذاری بین چنین افرادی نمی‌تواند به صورت مثبت باشد. در چنین حالتی گراف‌های فازی جهت دار نمی‌توانند به درستی نشان‌دهنده رفتار سیستم باشند. در چنین شرایطی گرافهای فازی دو قطبی ابزاری



شکل ۵-۱: گراف فازی جهت دار



شکل ۵-۲: گراف فازی دوقطبی

منظور گسترش مفهوم گراف‌های فازی دوقطبی قوی چند تعریف جدید در این زمینه ارایه شد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله برخی از اعمال جدید بر روی گراف‌های فازی دوقطبی معرفی شد و برخی از خاصیت‌های مهم درباره آن‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفت. به علاوه به

- [11] S. Samanta, M. Pal. Some more results on bipolar fuzzy sets and bipolar fuzzy intersection graphs, *J. Fuzzy Math.* 22 (2) (2014).
- [12] H.L. Yang, S.G. Li, W.H. Yang, Y. Lu. Notes on “bipolar fuzzy graphs”, *Information Science.* 242:113-121 (2013).
- [13] B. Frelih, S. Miklavič. Edge regular graph products. *The electronic journal of combinatorics*, 20: 62-66 (2013).
- [14] W.Imrich, S. Klavžar. *Product Graphs: Structure and Recognition.* Wiley, New York (2000).
- [15] J.N.Mordeson, C.S.Peng. “Operation on fuzzy graphs”. *Information Sciences* 79: 159-170 (1994).
- [16] G. Nirmala and M. Vijaya, Fuzzy graphs on composition, Tensor and Normal Products, *International Journal of Scientific and Research Publications*, 21-7.
- [17] J. N. Mordeson, P.S.Nair. Fuzzy Graphs and Fuzzy Hyper graphs: *Information Sciences* 90: 39-49(1996).
- [18] J.N.Mordeson, Premch, S.Nair. *Fuzzy Graphs and Fuzzy hypergraphs*, Physica-Verlag, Heidelberg (2000).
- [19] M. Rostamy-Malkhalifeh, F. Falahati-Nezhad, H.Saleh. A comment on “Fuzzy graphs on composition, Tensor and Normal Products”. *International Journal of Scientific and Research Publications*, 6 (9) 256-262(2016).
- [1] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control* 8: 338-353 (1965).
- [2] L.A. Zadeh. Toward a generalized theory of uncertainty (GTU) an outline. *Information Sciences* 172 (1-2) 1-40 (2005).
- [3] L.A. Zadeh. Is there a need for fuzzy logic?. *Information Sciences* 178 (13) 2751-2779 (2008).
- [4] A. Rosenfeld. Fuzzy graphs, in: L.A. Zadeh, K.S. Fu, M. Shimura (Eds.), *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*, Academic Press, New York, 77-95 (1975).
- [5] J. Zhang, X. Yang. Some properties of fuzzy reasoning in propositional fuzzy logic systems. *Information science.* 180: 4661-4671 (2010).
- [6] W.R. Zhang. Bipolar fuzzy sets and relations: a computational framework for cognitive modeling and multi agent decision analysis. In: *Proceedings of IEEE 706 Conf* 305-309 (1994).
- [7] M. Aman. Regular and irregular fuzzy graphs and bipolar fuzzy graphs. M. S c. Thesis, (1392).
- [8] W.R. Zhang. Bipolar fuzzy sets. In: *Proceedings of Fuzzy-IEEE.* 835-840 (1998).
- [9] M. Akram. Bipolar fuzzy graphs. *Information Sciences* 181: 5548-5564 (2011).
- [10] G. Gorai, M. Pal. Ceratin types of product bipolar fuzzy graphs, *Int. J. Appl.Comput. Math.* (2015). <http://dx.doi.org/10.1007/s40819-015-0112-0>.

