

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

استفاده از توابع پایه شعاعی با پارامتر شکلی متغیر برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی

حنانه نوجوان^۱، سعید عباس بندی^{۲*}، توفیق الهویرنلو^۳

^(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۱/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۹/۲۴

چکیده

در این مقاله از روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای نیوتن موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان استفاده شده است. به منظور پایداری بیشتر از هسته‌های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده برای ساخت توابع پایه‌ای نیوتن استفاده شده است. در ادامه با در نظر گرفتن توابع پایه‌ای معرفی شده به عنوان توابع آزمون، تابع جواب در راستای متغیر مکان با استفاده از توابع آزمون به روش هم مکانی تقریب زده می‌شود. سپس با استفاده از روش خطوط، به دستگامی از معادلات با مشتقات معمولی بر حسب تابع جواب در راستای متغیر زمان دست یافتیم. روش‌های معرفی شده را برای حل معادله غیرخطی برگرز به کار گرفته و با مشاهده نتایج عددی دقت و کارایی روش مشخص خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: روش بدون شبکه موضعی، روش خطوط، توابع پایه‌ای نیوتن، هسته شعاعی به طور متغیر مقیاس شده، معادله غیرخطی برگرز.

۱ - مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان به طور وسیعی در مدل‌بندی پدیده‌های متنوع طبیعی در علوم پایه و علوم مهندسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. جواب‌های این رده از مدل‌های ریاضی برای پیش‌بینی رفتار پدیده‌های مختلف به کار می‌روند، به نحوی که کاملاً بر نتایج حاصل از شرایط تجربی و آزمایشگاهی منطبق می‌باشند. متأسفانه در اغلب موارد یک روش تحلیلی برای محاسبه جواب‌های دقیق این مسائل وجود ندارد، لذا بررسی عددی این مسائل دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشند. روش‌های عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان ارائه شده‌اند.

به طور کلی در حل عددی بسیاری از مسائل با استفاده از روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی در اغلب موارد به اصلاح کردن شبکه‌ها در نواحی خاصی از دامنه، به خصوص نزدیک مرزها می‌باشد که سبب پیچیدگی محاسباتی خواهد شد. به علاوه روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی برای حل مسائل با ابعاد بزرگ مناسب نمی‌باشند.

در دهه‌های اخیر برخی روش‌های عددی ارائه و توسعه یافته‌اند که بدون نیاز به شبکه‌بندی دامنه، برای حل معادلات استفاده می‌شوند. مهمترین هدف ارائه و توسعه روش‌های بدون شبکه، فائق آمدن بر مشکل شبکه‌بندی و شبکه‌بندی مجدد کل دامنه می‌باشد.

در سال‌های اخیر چندین روش بدون شبکه معرفی شده‌اند که از مهمترین رده آنها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

روش گالرکین با عناصر آزاد^۱[1]، روش بازتولید عناصر هسته^۲[2]، روش بدون شبکه هم محلی بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی^۳[3]، روش نوده‌های مرزی^۴[4]، روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی^۵[5,6,7,8]، روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین^۶[9,10,11,12] و روش درون‌یابی شعاعی نقاط^۷[13]. به علت کثرت این روش‌ها، بیان همه آنها

امکان پذیر نیست اما، مرجع [14] یک بازنگری (تا حدی کلی) از این روش‌ها ارائه داده است. در سال ۱۹۹۰ برای اولین بار کانسا یک روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه نمود. در حقیقت در این مقاله کانسا یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی را به عنوان تقریب جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه کرد.

یکی از معایب اصلی روش هم محلی توابع پایه شعاعی سراسری این است که شامل ماتریس‌های پر حاصل از گسسته‌سازی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد که این ماتریس‌ها اغلب بدحالت هستند. برای غلبه بر بدحالتی آنها روش هم محلی توابع پایه شعاعی موضعی اولین بار توسط سارلر [15] برای مسائل انتشار معرفی شد که دارای نتایج بهتری از نظر دقت و کار آیی بود. با توجه به اهمیت روش هم محلی توابع پایه‌ای شعاعی موضعی می‌توان از آن در حل مسائل پیچیده مانند انتقال - انتشار گرما با تغییر فاز، انتقال حرارت و جریان سیال، معادلات ناویر استوکس، جریان آشفتگی و مسائلی از این قبیل استفاده کرد.

اخیراً نیز در مقالات گسترده استفاده از روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی که برای هر زیر دامنه از کل دامنه اعمال می‌شود بررسی شده است [۱۷، ۱۶، ۱۸، ۱۹]. استفاده از روش موضعی باعث تنک شدن ماتریس ضرایب و به دنبال آن کاهش بدوضعی ماتریس ضرایب می‌شود. بنابراین روش به کار برده شده در این مقاله نیز به فرم موضعی می‌باشد.

بعد از معرفی روش پیشنهادی، به حل عددی معادله برگرز که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه دوم می‌باشد و به عنوان یک مدل ساده شده برای آشفتگی، رفتار لایه مرزی، فرم‌بندی موج ضربه‌ای و انتقال دادن جرم به کار برده می‌شود، می‌پردازیم.

۵. Meshless local boundary integral equation method

۶. Meshless local Petrov-Galerkin method

۷. Radial point interpolation method

۱. Element free Galerkin method

۲. Reproducing kernel particle method

۳. RBF

۴. Boundary node method

می‌شود، اما جواب به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شود. با کاهش این پارامتر عدد وضعیت کاهش یافته و مسئله پایدارتر می‌شود، اما جواب از جواب واقعی دورتر می‌شود. از این رو با اصل عدم قطعیت^۸ مواجه هستیم. این اصل منجر به تلاش‌هایی برای یافتن پارامتر شکلی بهینه شده است، یعنی مقداری که در عین حال که مسئله را از لحاظ عددی پایدار نگه می‌دارد، حداکثر دقت را نیز ارائه کند. این تلاش‌ها اگر چه منجر به یافتن مقادیری برای پارامتر شکل شده است اما همگی وابسته به شرایط خاص مسئله است و همچنان تحقیقات برای یافتن پارامتر شکلی بهینه در حالت کلی ادامه دارد.

به همین دلیل است که در بیشتر موارد پارامتر شکلی برای هر مسئله به طور تجربی بدست می‌آید.

۳- هسته‌های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده

ایده اصلی روش هسته‌های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده توسط بوزینی و همکاران در [۲۸] مطرح شده است. **تعریف:** C را یک تابع مقیاس $c: \square^d \rightarrow (0, \infty)$ در نظر بگیرید. هسته به طور متغیر مقیاس شده روی \square^d به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$K_c(x, y) = K((x, c(x)),$$

$$(y, c(y))), \forall x, y \in \square^d.$$

قضیه: اگر K مثبت (نیمه) معین باشد آنگاه k_c نیز معین مثبت است. اگر K و C پیوسته باشند آن گاه K_c نیز پیوسته است.

اگر K هسته شعاعی باشد یعنی

$$K_c(x, y) = \phi(r^2),$$

آن گاه

$$K_c(x, y) = \phi(r^2 + (c(x) - c(y))^2),$$

$$r = \|x - y\|_2, x, y \in \square^d.$$

یک هسته شعاعی متغیر است.

یکی از هسته‌های مهم، هسته مترن-سوبولف $r^v k_v(r)$ به طوریکه

در سال‌های اخیر روش‌های عددی متعددی برای حل معادله برگرز با عدد رینولدز کوچک و بزرگ ارائه شده‌اند ([۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷]). در این مقاله به حل مثال‌های مختلف این معادله با اعداد رینولدز مختلف پرداخته و کارایی روش را بویژه برای معادله با عدد رینولدز بزرگ بررسی می‌کنیم.

۲- هسته‌های با پارامتر شکلی ثابت

تعریف: فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی از \mathbb{R}^d باشد. آنگاه تابع دو متغیره $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را یک هسته حقیقی روی Ω می‌نامند. هسته (\cdot, \cdot) را یک هسته شعاعی روی Ω گویند، هرگاه $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که:

$$k(x, y) = \varphi(\|x - y\|), \quad \forall x, y \in \Omega$$

هسته‌ها در \square^d می‌توانند مجهز به پارامتر شکل C به صورت زیر شوند.

$$K_c(x, y) = K\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) \quad x, y \in \square^d$$

که این عامل نقش اساسی در کنترل شکل توابع پایه‌ای شعاعی دارد. بنابراین هسته‌های شعاعی در \square^d را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [28].

$$K_c(x, y) = \phi\left(\frac{x - y}{c}\right) \quad \forall x, y \in \square^d,$$

$$K_c(x, y) = \phi\left(\frac{r}{c}\right), r = \|x - y\|_2, x, y \in \square^d,$$

انتخاب پارامتر شکل موضوعی است که بیش از دو دهه مطرح شده است [29, 30]. روش دقیق برای بدست آوردن این پارامتر وجود ندارد بنابراین بیشتر محققان با آزمون و خطا مقدار مطلوب این پارامتر را بدست می‌آورند. شاباک و همکاران با در نظر گرفتن پارامتر شکلی برای توابع پایه‌ای شعاعی، متوجه شدند که با افزایش این پارامتر عدد وضعیت افزایش یافته و مسئله ناپایداری

$$\Lambda = (\lambda_i, 1 \leq i \leq n)^T,$$

$$F = (S(x_i, c(x_i)), 1 \leq i \leq n)^T.$$

۴- توابع پایه‌ای نیوتن

استفاده از توابع پایه‌ای نیوتن به جای توابع پایه‌ای استاندارد به نتایج دقیق‌تر و پایدارتری منجر می‌شود که در این بخش به توضیح این توابع می‌پردازیم [31].

هسته معین مثبت متقارن هموار $K: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ روی دامنه Ω را در نظر بگیرید. استفاده از پایه‌های استاندارد برای درون‌یابی وقتی فاصله تفکیک کوچک باشد، منجر به ماتریس هسته بدوضع $A = (K(x_j, x_k))_{1 \leq j, k \leq n}$ که ناپایدار است، می‌شود. برای رفع این مشکل، شاباک و همکاران در [31] به معرفی توابع پایه‌ای نیوتن که متعامد یک‌ه و کامل در فضای هیلبرت محلی می‌باشند، پرداخته‌اند. توابع پایه‌ای نیوتن $\{N_k(x)\}_{k=1}^n$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$N_k(x) = \sum_{j=1}^n K(x, x_j) \tilde{c}_{jk}, \quad (2)$$

$$1 \leq k \leq n.$$

به طوری‌که $N(x) = (N_1(x), \dots, N_n(x))$ و $T(x) = (K(x, x_1), \dots, K(x, x_n))$ ، فرم ماتریسی رابطه (۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$N(x) = T(x) \tilde{C}$$

که ماتریس $\tilde{C} = (\tilde{c}_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ را ماتریس ساختار می‌نامیم. همچنین ماتریس مقدار $V = (N_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$ از پایه $N(x)$ به فرم ماتریسی $V = A \tilde{C}$ می‌باشد به طوری‌که A ماتریس مقدار از پایه‌های استاندارد می‌باشد. بنابراین پایه‌های جدید $N(x)$ با انتخاب‌های متفاوت حاصل

می‌شوند. یکی از این انتخاب‌ها تجزیه چولسکی ماتریس A به صورت $A = LL^T$ که L یک ماتریس پایین

$$v = m - \frac{d}{2}, r = \|x - y\|_2, x, y \in \square^d,$$

و فضای محلی متناظر با این هسته بازتولیدی، فضای سوبولف $W_2^m(\mathbb{R}^d)$ می‌باشد.

بنابراین هسته مترن-سوبولف به طور متغیر مقیاس شده به صورت زیر می‌باشد.

$$\left(r^2 + ((c(x) - c(y))^2)^{v/2} \right)^{-v/2} K_v \left(\left(r^2 + ((c(x) - c(y))^2)^{v/2} \right)^{1/2} \right),$$

$$r = \|x - y\|_2, x, y \in \square^d.$$

هسته‌های به طور متغیر مقیاس شده فاصله تفکیک را زیاد می‌کنند، بنابراین پایداری افزایش می‌یابد. از طرفی فاصله انباشتگی نیز زیاد می‌شود که باعث افزایش کران خطا می‌شود. در [۲۸] ثابت شده است که هرگاه فاصله تفکیک و فاصله انباشتگی متناسب باشند، ارتباط نزدیکی بین خطا و پایداری وجود دارد.

۱.۳. درون‌یابی

مسئله درون‌یابی برای نقاط گره‌ای متمایز

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \Omega \subset \square^d$$

و f_1, f_2, \dots, f_n به طوری که $i = 1, 2, \dots, n, f_i \in \square$ مشابه درون‌یابی با استفاده از هسته شعاعی می‌باشد.

تابع چند متغیره $S: \square^n \rightarrow (0, \infty)$ را در نظر بگیرید. تقریب تابع S با هسته (تابع) شعاعی به طور متغیر مقیاس شده Φ به صورت زیر خواهد بود.

$$S(x, c(x)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(r_j), \quad (1)$$

$$r_j = \|(x, c(x)) - (y, c(y))\|$$

که با قراردادن نقاط $x_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ در (۱) دستگاه معادلات خطی زیر را خواهیم داشت. $FAL =$ در آن

$$A = \left(\|x_i - x_j\|_2^2 + ((c(x_i) - c(x_j))^2) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} K_c(x, y) = \phi'(s) \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

$$= \phi'(s) \left((x_i - y_i) + ((c(x) - c(y)) \frac{\partial c}{\partial x_i}) \right).$$

به همین ترتیب می‌توانیم دیگر مقادیر مشتقات جزئی را با توجه به مطالب بالا بدست آوریم [۳۳]. در این مقاله برای راحتی، اندیس C از K_c را حذف می‌کنیم.

۵- روش هم محلی توابع پایه‌ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده

با توجه به توضیحاتی که در بخش‌هایی قبلی ذکر شد، به شرح روش پیشنهادی مقاله برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی می‌پردازیم. معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, t \in (0, T], \quad (۴)$$

با شرط اولیه زیر:

$$\mathcal{I}u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (۵)$$

و با شرایط مرزی دیریکله و نیومن

$$u(x, t) = g^D(x, t), \quad (۶)$$

$$x \in D \subset \partial\Omega, t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = g^N(x, t), \quad (۷)$$

$$x \in N \subset \partial\Omega, t \in [0, T]$$

که در آن $\mathcal{L}: H \rightarrow F$ یک عملگر مشتق می‌باشد و \mathcal{I} یک عملگر خطی می‌باشد. همچنین H و F فضاهای هیلبرت توابع روی $\bar{\Omega}$ می‌باشند. فرض بر این است که مساله (۴) تا (۷) خوش وضع می‌باشد. حال نقاط گسسته $x^{[i]}, 1 \leq i \leq n$ و هسته معین مثبت متقارن $\square: \Omega \times \Omega \rightarrow \square$ را در نظر می‌گیریم. نقاط را به صورت $\{X^I \cup X^D \cup X^N\}$ مرتب می‌کنیم که در آن $X^I = \{x^{[1]}, \dots, x^{[z_1]}\}$ مجموعه نقاط درونی و $X^D = \{x^{[z_1+1]}, \dots, x^{[z_1+z_2]}\}$ نقاط مرزی دیریکله و $X^N = \{x^{[z_1+z_2+1]}, \dots, x^{[n]}\}$

مثلی نامنفرد بوده و با انتخاب $\tilde{C} = (L^T)^{-1}$ ماتریس مقدار متناظر با پایه جدید به صورت $V = L$ می‌باشد که خوش وضع تر از ماتریس A می‌باشد [32]. ویژگی‌های پایداری توابع پایه‌ای نیوتن نسبت به پایه‌های استاندارد و لاگرانژ در [۳۱] نشان داده شده است. همچنین مشاهده شده است که عدد حالت ماتریس هم محلی متناظر با توابع پایه‌ای نیوتن کوچکتر از ماتریس متناظر با توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد. تحقیقات نظری درباره مشخصات ماتریس مقدار حاصل شده از توابع پایه‌ای نیوتن همچنان ادامه دارد. اگر مقادیر پایه نیوتن و نگاهت خطی \mathcal{L} مانند مشتقات در نقاط مختلف مورد نیاز باشند، سیستم‌های خطی زیر را به ترتیب بدست می‌آوریم.

$$VN^T(x) = T(x)^T,$$

و

$$V \mathcal{L}(N^T(\cdot)) = \mathcal{L}(T(\cdot)^T), \quad (۳)$$

قابل ذکر است که توابع مورد استفاده در این مقاله توابع پایه‌ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده، به صورت زیر می‌باشد.

$$N_c(x) = T_c(x)\tilde{C},$$

که با در نظر گرفتن هسته به طور متغیر مقیاس شده $K_c(x, y)$ در معادله (۲) بدست می‌آید. با توجه به (۳) برای بدست آوردن مشتقات $K_c(x, y)$ از نماد گزاره‌ای و تکنیک مطرح شده در [33] استفاده می‌کنیم که برای روش‌های مبتنی بر هسته با استفاده از برنامه نویسی در متلب بسیار مفید می‌باشد. فرض کنید:

$$K_c(x, y) = \phi \left(\frac{1}{2} (\|x - y\|_2^2 + (c(x) - c(y))^2) \right),$$

$$x, y \in \square^d.$$

قرار می‌دهیم $K_c(x, y) = \phi(s)$ بطوری که

$$s = \frac{1}{2} (\|x - y\|_2^2 + (c(x) - c(y))^2)$$

بنابراین:

$$L(u^{[i]}(x, t)) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) L(N_j^{[i]}(x)),$$

$$x \in S_i,$$

و عملگر مشتق در مختصات دکارتی می‌باشد. بنابراین معادله زیر حاصل می‌شود:

$$L(u^{[i]}(x^{[i]}, t)) = L(N^{[i]}) * N^{-[i]} * U^{[i]},$$

به طوری که

$$L(N^{[i]}) = \left(L(N_j^{[i]}(x^{[i]})) \right)_{1 \leq j \leq n_s}.$$

حال با قراردادن نقاط هم محلی درونی $x^{[i]}, i = 1, \dots, z_1$ در معادله (۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathcal{L}u(x^{[i]}, t) = f(x^{[i]}, t)$$

بنابراین:

$$\mathcal{L}u^{[i]}(x^{[i]}, t) = f(x^{[i]}, t)$$

در نتیجه:

$$\mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(x^{[i]})\right) \quad (۱۰)$$

$$= f(x^{[i]}, t), \quad i = 1, \dots, z_1.$$

با در نظر گرفتن معادله (۹) فرم ماتریسی معادله (۱۰) فقط شامل بردار مجهول $U^{[i]}$ است که فقط وابسته به t می‌باشد. سپس با مجموع مقادیر تابع در نقاط مرکزی سیستم موضعی، یک سیستم سراسری ODE با بردار مجهول سراسری U که مقادیر تابع را در تمام نقاط درونی فراهم می‌کند، بدست می‌آید. در ادامه می‌خواهیم شرایط مرزی (۷) و (۶) را در معادله اعمال کنیم.

برای این منظور فرض می‌کنیم:

$$U = (U^I, U^D, U^N)^T,$$

$$U^I = (u(x^{[i]}, t), 1 \leq i \leq z_1),$$

مجموعه نقاط مرزی نیومن می‌باشند. z_1 و z_2 تعداد نقاط داخلی و نقاط مرزی دیریکله می‌باشند. برای هر نقطه

مرکزی $x^{[i]}$ و $(i = 1, \dots, n)$ شبکه

$$S_i = \{x_k^{[i]}\}_{k=1}^{n_s}$$

مرکزی $x^{[i]}$ و $n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در

همسایگی آن می‌باشند. همچنین پایه‌های نیوتن $N_1^{[i]}, N_2^{[i]}, \dots, N_{n_s}^{[i]}$. تناظر با این نقاط را تشکیل

می‌دهیم. در این روش بدون شبکه موضعی، تابع مجهول

$u(x, t)$ به ازای هر نقطه مرکزی $x^{[i]}$ روی S_i به

صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌های نیوتن به طور متغیر

مقیاس شده و به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u^{[i]}(x, t) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(x), \quad (۸)$$

$$x \in S_i$$

فرم ماتریسی درون یابی برای هر زیر دامنه به شکل زیر می‌باشد:

$$U^{[i]} = N^{[i]} * \alpha^{[i]}(t),$$

و در هر زیر دامنه، ضرایب مجهول $\alpha^{[i]}(t)$ توسط روش هم محلی به صورت زیر است:

$$\alpha^{[i]} = N^{-[i]} * U^{[i]} \quad (۹)$$

به طوریکه

$$U^{[i]} = \begin{pmatrix} u^{[i]}(x_1^{[i]}, t), u^{[i]}(x_2^{[i]}, t) \\ \dots, u^{[i]}(x_{n_s}^{[i]}, t) \end{pmatrix}^T,$$

$$\alpha^{[i]} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{[i]}(t), \alpha_2^{[i]}(t) \\ \dots, \alpha_{n_s}^{[i]}(t) \end{pmatrix}^T,$$

$$N^{[i]} = \left(N_j^{[i]}(x_k^{[i]}) \right)_{1 \leq k \leq n_s, 1 \leq j \leq n_s}.$$

می‌باشد. مشتقات مکانی $u^{[i]}$ در نقاط $x^{[i]}$ با استفاده

از مشتقات توابع پایه‌های نیوتن به طور متغیر مقیاس شده

بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (g^N(x^{[i]}, t), z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n)^T \\ & -W(:, 1: z_1) * U^I - \\ & W(:, z_1 + 1: z_1 + z_2) * U^D. \end{aligned} \quad (13)$$

به علاوه با استفاده از شرط اولیه (۵) داریم:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(0) \mathcal{I}(N_j^{[i]}(x^{[i]})) = u_0(x^{[i]}), i = 1, \dots, z_1.$$

فرض کنید ماتریس تنک D با ابعاد $z_1 \times n$ به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} D(i, I_i) &= \mathcal{I}(N^{[i]}) * N^{-[i]}, \\ i &= 1, \dots, z_1, \end{aligned}$$

به طوری که:

$$\mathcal{I}(N^{[i]}) = \left(\mathcal{I}(N_j^{[i]}(x^{[i]})) \right)_{1 \leq j \leq n_s}$$

سپس معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} D(:, 1: z_1) * U^I(0) &= (u_0(x^{[i]}), 1 \leq i \leq z_1)^T \\ -D(:, z_1 + 1: z_1 + z_2) * U^D(0) &- \\ D(:, z_1 + z_2 + 1: n) * U^N(0) & \end{aligned} \quad (14)$$

با توجه به تساوی (۹) و با در نظر گرفتن (۱۱) و (۱۳) معادله (۱۰) معادله ODE زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\tilde{\mathcal{L}}(U^I(t)) = \mathcal{F}(U^I(t))$$

با شرط اولیه (۱۴) که در آن $\tilde{\mathcal{L}}$ عملگر خطی مشتق می‌باشد و \mathcal{F} عملگری است که شامل ماتریس‌های تنک می‌باشد. لازم به ذکر می‌باشد که غیرخطی بودن معادله حفظ شده است و معادله دیفراسیل معمولی با یک حل گر خوب ODE به طور اتوماتیک گام زمانی منطقی را تعیین می‌کند و میزان سختی سیستم را تشخیص می‌دهد و معادله را حل می‌کند.

$$\begin{aligned} U^D &= (u(x^{[i]}, t), z_1 + 1 \leq i \leq z_1 + z_2), \\ U^N &= (u(x^{[i]}, t), z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

از شرط دیریکله (۶) داریم:

$$U^D = (g^D(x^{[i]}, t), z_1 + 1 \leq i \leq z_1 + z_2). \quad (15)$$

و از شرط نیومن (۷) نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial n}(x^{[i]}) = g^N(x^{[i]}, t), z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n,$$

به طوری که فرم ماتریسی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} N_n^{[i]} * N^{-[i]} * U^{[i]} &= g^N(x^{[i]}, t), \\ z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n, \end{aligned} \quad (16)$$

9

$$N_n^{[i]} = \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial n}(x^{[i]}) \right), j = 1, \dots, n_s.$$

اکنون فرض کنید، برداری شامل اندیس نقاط مرکزی $x^{[i]}$ و تعداد $n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در همسایگی نقطه مفروض‌اند می‌باشد. همچنین ماتریس تنک W را که ابعاد آن $(n - z_1 - z_2) \times n$ می‌باشد به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} W(i - z_1 - z_2, I_i) &= N_n^{[i]} * N^{-[i]}, \\ i &= z_1 + z_2 + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

با جایگذاری W در معادله (۱۲) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} W * U &= (g^N(x^{[i]}, t), \\ & z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n)^T. \end{aligned}$$

همچنین بردار مجهول U^N را بر حسب بردار مجهول U^I می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W(:, z_1 + z_2 + 1: n) * U^N =$$

مقیاس شده و به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u^{[i]}(x, t) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(x), x \in S_i \quad (۱۹)$$

سیس داریم:

$$\alpha^{[i]} = N^{-[i]} * U^{[i]} \quad (۲۰)$$

که بردارها و ماتریس به صورت زیر می‌باشند.

$$U^{[i]} = \begin{pmatrix} u^{[i]}(x_1^{[i]}, t), u^{[i]}(x_2^{[i]}, t), \\ \dots, u^{[i]}(x_{n_s}^{[i]}, t) \end{pmatrix}^T,$$

$$\alpha^{[i]} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{[i]}(t), \alpha_2^{[i]}(t), \\ \dots, \alpha_{n_s}^{[i]}(t) \end{pmatrix}^T,$$

$$N^{[i]} = (N_j^{[i]}(x_k^{[i]}))_{1 \leq k \leq n_s, 1 \leq j \leq n_s}$$

حال با قرار دادن نقاط داخلی ($i = 1, \dots, n-2$) در معادله دیفرانسیل جزئی (۱۵) به معادله زیر می‌رسیم.

$$u_t^{[i]}(x^{[i]}, t) = -u^{[i]}(x^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(x^{[i]}) \right) + \quad (۲۰)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial^2 N_j^{[i]}}{\partial x^2}(x^{[i]}) \right) + f(x^{[i]}, t).$$

با استفاده از معادله (۲۰) داریم:

$$u_t^{[i]}(x^{[i]}, t) = -u^{[i]}(x^{[i]}, t) (N_x^{[i]} * N^{-[i]} * U^{[i]}) + \frac{1}{\text{Re}} (N_{xx}^{[i]} * N^{-[i]} * U^{[i]}) + f(x^{[i]}, t), \quad (۲۱)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-2,$$

به طوری که:

$$N_x^{[i]} = \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(x^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right),$$

$$N_{xx}^{[i]} = \left(\frac{\partial^2 N_j^{[i]}}{\partial x^2}(x^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right),$$

۶- روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه‌ای نیوتن

به طور متغیر مقیاس شده برای حل معادله برگرز

در این قسمت روش گفته شده در مقاله را روی معادله برگرز برای بدست آوردن جواب عددی به کار می‌گیریم. ابتدا فرمول بندی مسئله را توضیح می‌دهیم.

معادله یک بعدی برگرز زیر را در نظر بگیرید.

$$u_t(x, t) = -u(x, t)u_x(x, t) + \frac{1}{\text{Re}} u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (۱۵)$$

$$x \in [a, b], t \in [0, T]$$

همراه با شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$u(x, 0) = \phi(x), x \in [a, b], \quad (۱۶)$$

$$\beta_1 u(a, t) + \gamma_1 u_x(a, t) = g_1(t), t \in [0, T], \quad (۱۷)$$

$$\beta_2 u(b, t) + \gamma_2 u_x(b, t) = g_2(t), t \in [0, T], \quad (۱۸)$$

که Re عدد رینولدز و $\frac{1}{Re}$ ویسکوزیته سینماتیک می‌باشد.

اگر نقاط گسسته $X = \{x^{[1]}, x^{[2]}, \dots, x^{[n]}\}$ را در بازه $[a, b]$ به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$a < x^{[1]} < \dots < x^{[n-2]} < b,$$

$$x^{[n-1]} = a,$$

$$x^{[n]} = b.$$

برای هر $x^{[i]} \in X$ ($i = 1, \dots, n$) شبکه

$S_i = \{x_k^{[i]}\}_{k=1}^{n_s}$ که شامل نقطه مرکزی $x^{[i]}$ و

$n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در مجاورت نقطه

مفروض می‌باشند، در نظر می‌گیریم. متناظر با این نقاط،

توابع پایه‌ای نیوتن

$$N_1^{[i]}, N_2^{[i]}, \dots, N_{n_s}^{[i]}.$$

را تشکیل داده. در ادامه تابع مجهول $u(x, t)$ به ازای

هر نقطه مرکزی $x^{[i]} \in X$ ($i = 1, \dots, n$) روی S_i

به صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌ای نیوتن به طور متغیر

$$\beta_2(u^{[n]}(x^{[n]}, t)) + \gamma_2(N_x^{[n]} * N^{-[n]} * U^{[n]}) = g_2(t), \quad (24)$$

اگر W را ماتریس تنک با ابعاد $n \times 2$ به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$W(i-n+2, I_i) = \beta_{i-n+2}(I_i) + \gamma_{i-n+2}(N_x^{[i]} * N^{-[i]}), i = n-1, n,$$

به طوری که برداری $n \times 1$ با عدد ۱ در درایه ۱ ام و صفر در بقیه درایه‌ها می‌باشد. با جایگذاری W در معادلات (۲۳) و (۲۴) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$W * U = (g_i(t), i = 1, 2)^T.$$

که بردار مجهول $(u(x^{[i]}, t), i = n-1, n)^T$ می‌تواند بر حسب بردار مجهول \tilde{U} به صورت زیر نوشته شود: $W(:, n-1:n) * (u(x^{[i]}, t), i = n-1, n)^T$ (۲۵) $= (g_i(t), i = 1, 2)^T - W(:, 1:n-2) * \tilde{U}$.

در نتیجه با قراردادن معادله (۲۵) در (۲۲) معادله ODE با شرط اولیه زیر را داریم.

$$\tilde{U}(0) = (\phi(x^{[i]}), 1 \leq i \leq n-2).$$

۷- نتایج عددی

در این قسمت، به حل مثال‌های مختلف معادله برگرز یک بعدی می‌پردازیم. برای حل معادله، هسته مترن با پارامترهای $v = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ و تابع مقیاس $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ برای مثال ۱ و $c(x) = 1-x^2$ برای مثال ۲ در نظر گرفته شده است.

نقاط مرکزی و هم محلی در نظر گرفته شده، نقاط چپیشف $x^{[i]} = -\cos(\frac{\pi(i-1)}{n-1}), i = 1, \dots, n,$

به بازه $[-1, 1]$ می‌باشند و قابل انتقال به بازه $[a, b]$ با

$$\text{تبدیل } y = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} \text{ می‌باشند.}$$

همچنین نقاط متساوی الفاصله

در ادامه فرض می‌کنیم که I_i برداری شامل اندیس نقطه مرکزی $x^{[i]}$ و $n_s - 1$ نقطه همسایگی نقطه مفروض قرار گرفته‌اند، باشد. به کمک آن، ماتریس-های تنک D_1 و D_2 با ابعاد $(n-2) \times n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_1(i, I_i) = N_x^{[i]} * N^{-[i]}, i = 1, 2, \dots, n-2, \\ D_2(i, I_i) = N_{xx}^{[i]} * N^{-[i]}, i = 1, 2, \dots, n-2.$$

با جایگذاری D_1 و D_2 در رابطه (۲۱) معادله زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$U_t = -\tilde{U} * (D_1 * U) + \frac{1}{Re}(D_2 * U) + F, \quad (22)$$

که بردارها به صورت زیر می‌باشند.

$$U = (u(x^{[1]}, t), \dots, u(x^{[n]}, t))^T, \\ \tilde{U} = (u(x^{[1]}, t), \dots, u(x^{[n-2]}, t))^T, \\ F = (f(x^{[1]}, t), \dots, f(x^{[n-2]}, t))^T,$$

* ضرب نقطه‌ای بین بردار و ماتریس می‌باشد. حال با اعمال شرایط مرزی (۱۷) و (۱۸) در نقاط $x^{[n]}$ و $x^{[n-1]}$ داریم:

$$\beta_1(u^{[n-1]}(x^{[n-1]}, t)) + \gamma_1(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[n-1]}(t) \frac{\partial N_j^{[n-1]}}{\partial x}(x^{[n-1]})) = g_1(t), \\ \beta_2(u^{[n]}(x^{[n]}, t)) + \gamma_2(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[n]}(t) \frac{\partial N_j^{[n]}}{\partial x}(x^{[n]})) = g_2(t),$$

و با استفاده از رابطه (۲۰) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\beta_1(u^{[n-1]}(x^{[n-1]}, t)) + \gamma_1(N_x^{[n-1]} * N^{-[n-1]} * U^{[n-1]}) = g_1(t), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sin(\pi x) \text{ و شرط مرزی دیریکله} \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ (\gamma_1 = \gamma_2 = g_1(t) = g_2(t) &= 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(i)} &= a + (i-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n-1} \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید که $f(x,t)=0$ می‌باشد. جواب دقیق در مقاله [34] به صورت زیر می‌باشد.

$$u(x,t) = \frac{2\pi\mu \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2\mu\pi^2 t)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \exp(-n^2\mu\pi^2 t)} \quad (26)$$

با ضرایب فوریه

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 \exp\left[-\frac{1}{2\pi\mu}[1-\cos(\pi x)]\right] dx, \\ a_n &= 2 \int_0^1 \exp\left[-\frac{1}{2\pi\mu}[1-\cos(\pi x)]\right] \cos(n\pi x) dx \\ (n &= 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

که $\mu = \frac{1}{\text{Re}}$ می‌باشد.

نیز برای حل استفاده شده است. در فرم موضعی زیر دامنه-هایی با $n_s = 5$ از دامنه اصلی انتخاب شده‌اند که در شکل (۱) مشاهده می‌کنید.

همچنین در شکل (۲) ماتریس‌های تنک D_1 و D_2 برای $n = 50$ رسم شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌کنید هر سطر شامل ۵ درایه غیر صفر می‌باشد و بقیه درایه‌ها صفر می‌باشند.

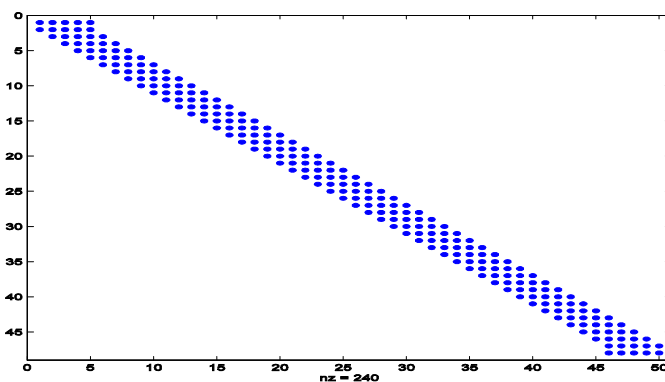
برای حل معادله دیفرانسیل معمولی حاصل شده از Ode113 برنامه متلب، استفاده کرده‌ایم. برای محاسبه دقت روش، خطای نرم $L_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j - \tilde{u}_j|$ را به کار برده‌ایم که u و \tilde{u} به ترتیب بیانگر مقدار واقعی و مقدار تقریبی می‌باشند.

مثال ۱: معادله برگرز (۱۵) با شرط اولیه

شکل ۱. مجموعه نقاط متساوی الفاصله و دامنه‌های موضعی با فرض $n_s = 5$ در نقاط داخلی و مرزی. \times بیانگر نقطه مرکزی می‌باشد.



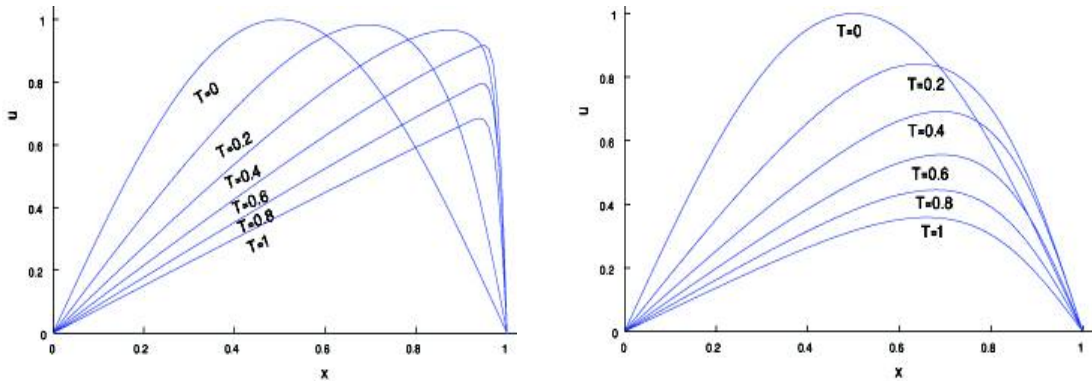
شکل ۲. ماتریس‌های تنک D_1 و D_2



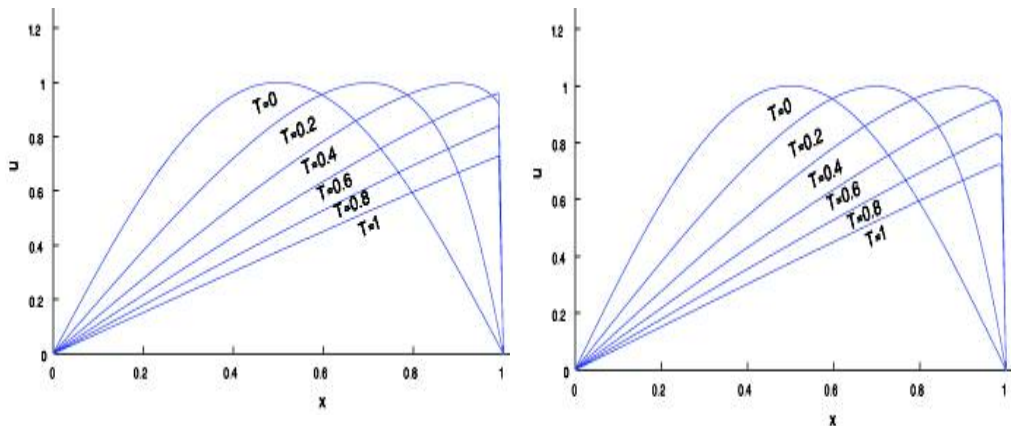
هم محلی توابع پایه‌ای نیوتن برای $Re=1000$ و $Re=10000$ در زمان‌های مختلف در نقاط یکنواخت با پارامتر ثابت $c=10$ در شکل (۸) رسم شده است. نمودار u برای $t \geq 0.4$ همانطور که در شکل‌های (۶) و (۸) مشاهده می‌کنید در نزدیکی سمت راست مرز دارای شیب تندی می‌باشد. در واقع برای مقادیر بزرگ عدد رینولدز عبارت جابجایی بر عبارت پخش غالب است و با استفاده از روش هم محلی توابع پایه‌ای نیوتن با پارامتر ثابت این نوسانات از بین نمی‌رود. اما نتایج عددی روش مطرح شده با پارامتر شکلی متغیر پایدار هستند و همانطور که در شکل (۴) و (۷) مشخص است، نوسانی مشاهده نمی‌شود.

نتایج عددی روش بیان شده برای مقادیر مختلف عدد رینولدز ۱۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ در زمان‌های $T = 0, 0/2, 0/4, 0/6, 0/8, 1$ چیشف و پارامتر شکلی متغیر در شکل‌های ۳ و ۴ و ۵ رسم شده است. نتایج عددی روش هم محلی توابع پایه‌ای نیوتن با پارامتر ثابت $c=10$ برای $Re=1000$ و $Re=10000$ در نقاط چیشف در زمان‌های مختلف T در شکل (۶) رسم شده است. همچنین نمودار u برای $Re=1000$ و $Re=10000$ در زمان‌های مختلف T با استفاده از نقاط متساوی الفاصله و پارامتر شکلی متغیر در شکل (۷) رسم شده است. نتایج عددی با استفاده از روش

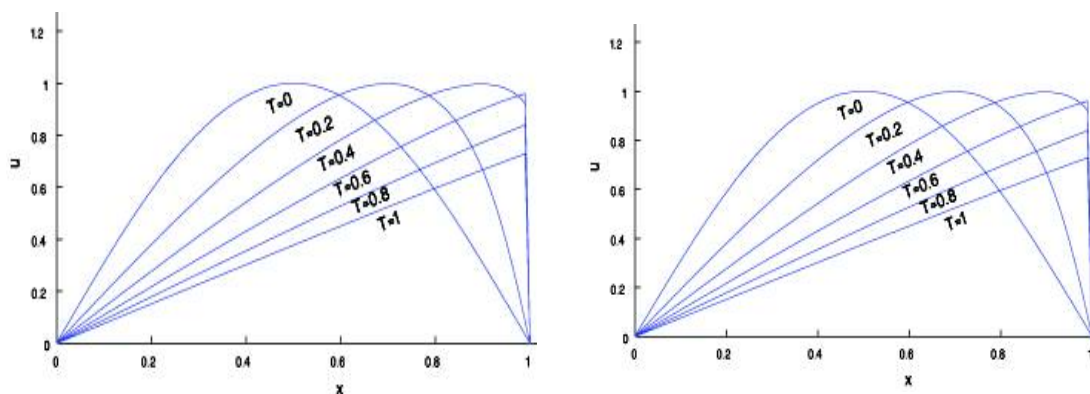
شکل ۳. نتایج عددی u با فرض $v=3/2, c(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $n=55$ نقاط چیشف برای $Re=10$ (راست) و $Re=100$ (چپ)



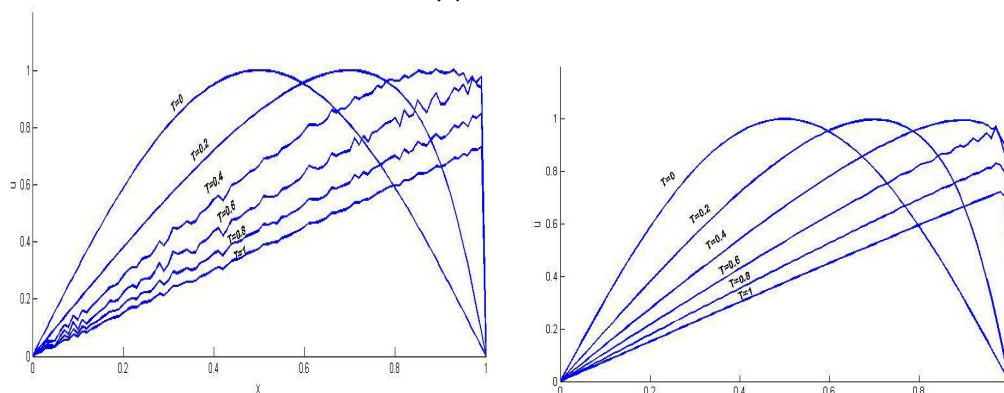
شکل ۴. نتایج عددی u با فرض $v=3/2, c(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $n=55$ نقاط چیشف برای $Re=1000$ (راست) و $Re=150$ (چپ) برای $Re=10000$ (چپ).



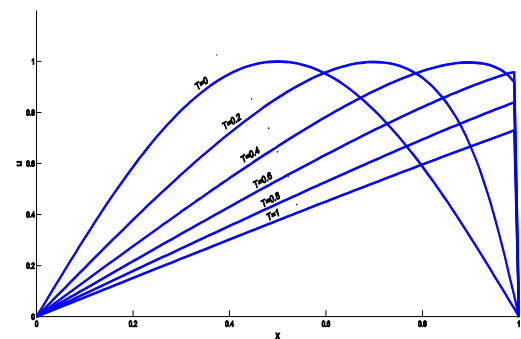
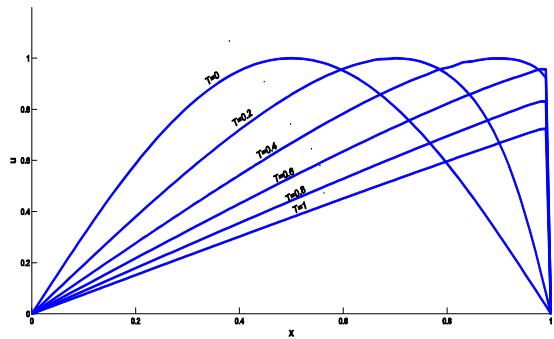
شکل ۵. نتایج عددی u با فرض $v=3/2, c(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $n=300$ نقاط چیشف برای $Re=100000$ (راست) و $n=865$ برای $Re=1000000$ (چپ)



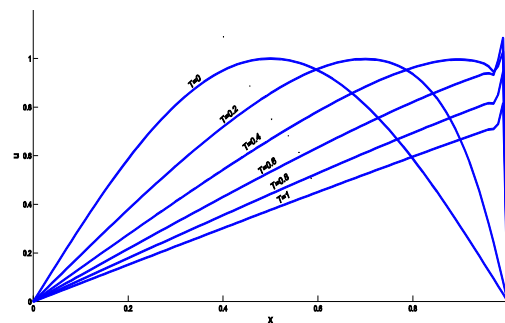
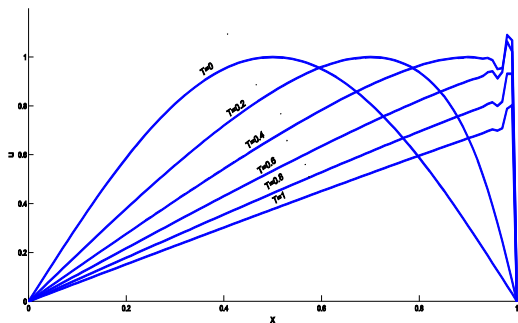
شکل ۶. نتایج عددی u با فرض $\nu = 3/2, c = 10$ و $n=55$ نقاط چبیشف برای $Re=1000$ (راست) و $n=15$ برای $Re=10000$ (چپ)



شکل ۷. نتایج عددی u با فرض $\nu = 3/2, c(x) = \sqrt{1-x^2}$ و نقاط متساوی الفاصله $n=200$ برای $Re=1000$ (راست) و $n=400$ برای $Re=10000$ (چپ)



شکل ۸. نتایج عددی u با فرض $v = 3/2, c = 10$ و نقاط متساوی الفاصله $n=200$ برای $Re=1000$ (راست) و $n=400$ برای $Re=10000$ (چپ)



جواب که باعث کند شدن همگرایی می‌شود نمی‌توان به جواب تحلیلی (۲۶) اعتماد کرد. بنابراین نتایج عددی گزارش شده در جدول شماره ۳ برای عدد رینولدز $Re=10000$ با نتایج سایرین مقایسه شده است. اعداد داخل جدول نشان می‌دهد که جواب بدست آمده به جواب دیگران نزدیک می‌باشد.

در جدول ۱ و ۲ نتایج عددی روش برای $Re=100$ و $Re = \frac{1000}{3}$ که با نقاط چبیشف بدست آمده با جواب دقیق و با نتایج سایرین مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌کنید روش از دقت مطلوبی برخوردار است. برای اعداد رینولدز بزرگ به علت وجود سری فوریه در

جدول ۱. نتایج عددی و خطای u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}, v = 5/2, n = 90, Re = 100$

جدول ۲. نتایج عددی و خطای u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $v = 5/2$, $n = 90$, $Re = 1000/3$

x	t	[24]	روش	جواب دقیق	خطا
0.25	0.4	0.23193	روش [24]	0.23193	1.0×10^{-5}
	0.6	0.26898	روش [24]	0.26898	1.0×10^{-5}
	0.8	0.22149	روش [24]	0.22149	1.0×10^{-6}
	1.0	0.18819	روش [24]	0.18819	1.0×10^{-6}
0.5	0.4	0.7512	روش [24]	0.7512	1.0×10^{-5}
	0.6	0.72945	روش [24]	0.72945	1.0×10^{-5}
	0.8	0.63916	روش [24]	0.63916	1.0×10^{-5}
	1.0	0.57444	روش [24]	0.57444	1.0×10^{-5}
0.75	0.4	0.91046	روش [24]	0.91046	1.0×10^{-5}
	0.6	0.76722	روش [24]	0.76722	1.0×10^{-5}
	0.8	0.64744	روش [24]	0.64744	1.0×10^{-5}
	1.0	0.55608	روش [24]	0.55608	1.0×10^{-5}
1.0	0.4	0.7512	روش [24]	0.7512	1.0×10^{-5}
	0.6	0.72945	روش [24]	0.72945	1.0×10^{-5}
	0.8	0.63916	روش [24]	0.63916	1.0×10^{-5}
	1.0	0.57444	روش [24]	0.57444	1.0×10^{-5}

نتایج عددی

جدول ۳
u با فرض

$$c(x) = \sqrt{1-x^2}, v = 5/2, n = 175, T = 0.5, Re = 10000$$

روش	[36]	[23]	[35]	x
۰.۰۳۷۹۲۳	۰.۰۳۷۹۲۳	۰.۰۳۷۹	۰.۰۴۲۴	۰.۰۵
۰.۰۸۳۴۱۲	۰.۰۸۳۴۱۹	۰.۰۸۳۴	۰.۰۸۴۳	۰.۱۱
۰.۱۲۱۲۸۸	۰.۱۲۱۲۸۸	۰.۱۲۱۳	۰.۱۲۶۳	۰.۱۶
۰.۱۶۶۶۸۲	۰.۱۶۶۶۸۲	۰.۱۶۶۷	۰.۱۶۸۴	۰.۲۲
۰.۲۰۴۴۴۵	۰.۲۰۴۴۴۵	۰.۲۰۴۴	۰.۲۱۰۳	۰.۲۷
۰.۲۴۹۶۶۰	۰.۲۴۹۶۶۱	۰.۲۴۹۷	۰.۲۵۲۲	۰.۳۳
۰.۲۸۷۲۳۸	۰.۲۸۷۲۳۹	۰.۲۸۷۲	۰.۲۹۳۹	۰.۳۸
۰.۳۳۲۱۸۵	۰.۳۳۲۱۸۶	۰.۳۳۲۲	۰.۳۳۵۵	۰.۴۴
۰.۳۷۶۹۴۲	۰.۳۷۶۹۴۳	۰.۳۷۶۹	۰.۳۷۶۹	۰.۵۰
۰.۴۱۴۰۷۰	۰.۴۱۴۰۷۰	۰.۴۱۴۱	۰.۴۱۸۲	۰.۵۵
۰.۴۵۸۳۸۶	۰.۴۵۸۳۸۵	۰.۴۵۸۴	۰.۴۵۹۲	۰.۶۱
۰.۴۹۵۰۹۰	۰.۴۹۵۰۸۸	۰.۴۹۵۱	۰.۴۹۹۹	۰.۶۶
۰.۵۳۸۸۲۱	۰.۵۳۸۸۱۷	۰.۵۳۸۸	۰.۵۴۰۴	۰.۷۲
۰.۵۷۴۹۵۷	۰.۵۷۴۹۴۷	۰.۵۷۴۹	۰.۵۸۰۵	۰.۷۷
۰.۶۱۷۹۰۷	۰.۶۱۷۹۰۹	۰.۶۱۷۹	۰.۶۲۰۰	۰.۸۳
۰.۶۵۳۴۴۳	۰.۶۵۳۳۰۳	۰.۶۵۳۳	۰.۶۶۰۰	۰.۸۸
۰.۶۹۵۰۱۹	۰.۶۹۵۲۱۶	۰.۶۹۵۲	۰.۶۹۵۷	۰.۹۴
۰.۷۲۲۱۲۱	۰.۷۲۹۶۰۰	۰.۷۲۹۶	-	۰.۹۹

مثال ۲: معادله برگرز (۱۵) با شرط اولیه

$$\Phi(x) = \frac{1}{4} \cos(\pi x)$$

جدول (۴) خطای مطلق روش برای پارامتر ثابت $C=10$ و متغیر $c(x) = 1 - x^2$ بدست آمده است. نتایج جدول تاثیر پارامتر شکلی متغیر را نشان می‌دهد.

و شرایط مرزی

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$\beta_1 = \beta_2 = g_1(t) = g_2(t) = 0$$

۸- حل زوج معادلات دو بعدی غیرخطی برگرز

زوج معادلات دو بعدی غیرخطی برگرز با شرایط اولیه و مرزی در عبارت زیر معرفی شده است.

$$\begin{cases} U_t(X, t) = -U(X, t)U_x(X, t) \\ -V(X, t)U_y(X, t) + \frac{1}{Re} \Delta U(X, t), \\ V_t(X, t) = -V(X, t)V_y(X, t) \\ -U(X, t)V_x(X, t) + \frac{1}{Re} \Delta V(X, t), \end{cases} \quad (27)$$

$$X \in \Omega \subset \square^2, t \in [0, T]$$

را در نظر بگیرید. همچنین

$$f(x, t) = -\frac{1}{4} e^{-(\mu t)} \cos(\pi x)$$

$$\left[\mu + \frac{\pi}{4} e^{(\mu t)} \sin(\pi x) - \mu \pi^2 \right],$$

و $\mu = \frac{1}{Re}$ جواب دقیق معادله به صورت زیر

در می‌باشد [37]. $u(x, t) = \frac{1}{4} e^{-(\mu t)} \cos(\pi x)$.

می‌باشد. Δ عملگر لاپلاس و U و V توابع مجهول می‌باشند.

نقاط دامنه را همانند قبل به صورت $\{X^I \cup X^D \cup X^N\}$ مرتب می‌کنیم که در آن X^I مجموعه نقاط درونی و X^D مجموعه نقاط مرزی دایره‌ای و X^N مجموعه نقاط مرزی نیومن می‌باشند. برای هر نقطه مرکزی $X^{[i]}$, $1 \leq i \leq n$ شبکه $S_i = \{X_k^{[i]}\}_{k=1}^{n_s}$ را در نظر می‌گیریم که شامل نقطه مرکزی $X^{[i]}$ و $n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در مجاورت نقطه مفروض می‌باشند، در نظر می‌گیریم. به دنبال یافتن جواب‌هایی به فرم زیر می‌باشیم.

$$\begin{cases} (U(X,t), V(X,t)) \\ = (f^D(X,t), g^D(X,t)) \\ X \in D \subseteq \partial\Omega, t \in [0, T] \\ (\frac{\partial U}{\partial n}(X,t), \frac{\partial V}{\partial n}(X,t)) \\ = (f^N(X,t), g^N(X,t)) \\ X \in N \subseteq \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} U(X,0) = U_0(X), \\ V(X,0) = V_0(X), \end{cases} \quad X \in \bar{\Omega}, \quad (29)$$

که در آن $X = (x, y)$ و Re عدد رینولدز می‌باشد. $g^N, f^N, g^D, f^D, v_0, u_0$ توابع معلوم می‌باشند. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ دامنه مورد نظر و $\partial\Omega$ مرز دامنه Ω

جدول ۴. خطای مطلق برای مقادیر مختلف Re با نقاط یکنواخت $c(x) = 1 - x^2, v = 7/2, n = 25$

Re	C	خطای C ثابت	خطای روش
۱۰۰	۱۰	۲.۰×۱۰^{-۴}	۱.۵×۱۰^{-۵}
۱۰۰۰	۱۰	۹.۴×۱۰^{-۵}	۵.۹×۱۰^{-۶}
۱۰۰۰۰	۱۰	۱.۵×۱۰^{-۵}	۷.۱×۱۰^{-۶}
۱۰۰۰۰۰	۱۰	۱×۱۰^{-۵}	۷.۲×۱۰^{-۶}

$$\alpha^{[i]}(t) = (\alpha_j^{[i]}(t))_{1 \leq j \leq n_s}^T,$$

$$\beta^{[i]}(t) = (\beta_j^{[i]}(t))_{1 \leq j \leq n_s}^T,$$

$$N^{[i]} = (N_j^{[i]}(X_k^{[i]}))_{1 \leq k \leq n_s, 1 \leq j \leq n_s},$$

$$U^{[i]} = (U^I, U^D, U^N)^T,$$

$$V^{[i]} = (V^I, V^D, V^N)^T,$$

$$U^I = (U(x^{[j]}, t), \quad 1 \leq j \leq z_1),$$

$$U^D = (U(X^{[j]}, t), \quad z_1 + 1 \leq j \leq z_1 + z_2),$$

$$U^N = (U(X^{[j]}, t), \quad z_1 + z_2 + 1 \leq j \leq n),$$

$$V^I = (V(X^{[j]}, t), \quad 1 \leq j \leq z_1),$$

$$V^D = (V(X^{[j]}, t), \quad z_1 + 1 \leq j \leq z_1 + z_2),$$

$$V^N = (V(X^{[j]}, t), \quad z_1 + z_2 + 1 \leq j \leq n),$$

$$U^{[i]}(X,t) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(X), X \in S_i,$$

$$V^{[i]}(X,t) = \sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(X), X \in S_i,$$

در نتیجه معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \alpha^{[i]}(t) = N^{-1[i]} * U^{[i]}, \\ \beta^{[i]}(t) = N^{-1[i]} * V^{[i]}, \end{cases} \quad (30)$$

به طوری که

حال با قراردادن نقاط داخلی $X^{[i]} (i = 1, \dots, z_1)$ در

معادله (۲۷) معادلات زیر بدست می‌آید.

بعدی می‌باشند را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} D_1(i, I_i) &= N_x^{[i]} * N^{-[i]}, \\ D_2(i, I_i) &= N_y^{[i]} * N^{-[i]}, \\ D_3(i, I_i) &= \Delta N^{[i]} * N^{-[i]}. \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۲۷) داریم:

$$\begin{cases} \tilde{U}_i = -\tilde{U} * (D_1 * U) - \tilde{V} * (D_2 * U) + \frac{1}{\text{Re}} (D_3 * U), \\ \tilde{V}_i = -\tilde{V} * (D_2 * V) - \tilde{U} * (D_1 * V) + \frac{1}{\text{Re}} (D_3 * V), \end{cases}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} U &= (U(X^{[1]}, t), \dots, U(X^{[n]}, t))^T, \\ \tilde{U} &= (U(X^{[1]}, t), \dots, U(X^{[z_1]}, t))^T, \\ V &= (V(X^{[1]}, t), \dots, V(X^{[n]}, t))^T, \\ \tilde{V} &= (V(X^{[1]}, t), \dots, V(X^{[z_1]}, t))^T, \end{aligned}$$

با توجه به شرایط دیریکله، معادله زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} U^D = (f^D(X^{[j]}, t)), \\ z_1 + 1 \leq z_1 + z_2, \\ V^D = (g^D(X^{[j]}, t)), \\ z_1 + 1 \leq z_1 + z_2, \end{cases} \quad (32)$$

و با توجه به شرایط نیومن، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j(t) \frac{\partial N_j}{\partial n}(X_i) &= \\ f^N(X_i, t), z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n, \\ \sum_{j=1}^{n_s} \beta_j(t) \frac{\partial N_j}{\partial n}(X_i) &= \\ g^N(X_i, t), z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

که به ترتیب

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial n} * N^{-1} * U &= \\ f^N(X_i, t), z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n, \\ \frac{\partial N}{\partial n} * N^{-1} * V &= \\ g^N(X_i, t), z_1 + z_2 + 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_t^{[i]}(X^{[i]}, t) &= \\ -U^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(X^{[i]}) \right) \\ -V^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial y}(X^{[i]}) \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \Delta N_j^{[i]}(X^{[i]}), \\ V_t^{[i]}(X^{[i]}, t) &= \\ -V^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial y}(X^{[i]}) \right) \\ -U^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(X^{[i]}) \right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) \Delta N_j^{[i]}(X^{[i]}),$$

با استفاده از معادله (۳۰) فرم ماتریسی معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} U_t^{[i]} &= -U^{[i]} * (N_x^{[i]} * N^{-[i]} * U^{[i]}) \\ -V^{[i]} * (N_y^{[i]} * N^{-[i]} * U^{[i]}) \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} (\Delta N^{[i]} * N^{-[i]} * U^{[i]}), \\ V_t^{[i]} &= -V^{[i]} * (N_y^{[i]} * N^{-[i]} * V^{[i]}) \\ -U^{[i]} * (N_x^{[i]} * N^{-[i]} * V^{[i]}) \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} (\Delta N^{[i]} * N^{-[i]} * V^{[i]}), \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} N_x^{[i]} &= \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(X^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right), \\ N_y^{[i]} &= \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial y}(X^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right). \end{aligned}$$

فرض کنید بردار I_i شامل اندیس نقاط مرکزی $x^{[i]}$ و تعداد $n_s - 1$ نقطه، در مجاورت نقطه مرکزی باشند ماتریس‌های تنک D_1, D_2, D_3 که $z_1 \times n$

مثال ۳: معادلات مطرح شده در (۲۷) - (۲۹) را در نظر بگیرید. شرایط اولیه از قرارداد $t = 0$ و شرایط مرزی دیریکله از قرار دادن $x = 0, 1$ و $y = 0, 1$ در جواب تحلیلی که در [38] به صورت زیر بیان شده است، بدست می‌آید.

$$u(x, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((-4x + 4y - t)(\frac{Re}{32})))}$$

$$v(x, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((-4x + 4y - t)(\frac{Re}{32})))}$$

جواب معادله برای اعداد رینولدز بالا دارای شیب تندی می‌باشد. این ویژگی در شکل (۹) مشاهده می‌شود. در ادامه نمودار خطای مطلق را برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با پارامتر شکلی ثابت $c = 10$ در شکل (۱۰) رسم کرده‌ایم. همچنین نمودار خطای مطلق برای تعداد نقاط مختلف با پارامتر شکلی متغیر

$$c(x, y) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((-4x + 4y)(\frac{100}{32})))}$$

در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) رسم شده است. از تصاویر بالا می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر شکلی متغیر منجر به کاهش خطا نسبت به پارامتر ثابت می‌شود علاوه بر این با افزایش نقاط خطا کاهش می‌یابد و این نشان‌دهنده همگرایی روش می‌باشد.

$$\frac{\partial N}{\partial n} = \left(\frac{\partial N_j}{\partial n} (X_i) \right)_{z_1+z_2+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

می‌باشد. فرض کنید

$$w = \frac{\partial N}{\partial n} * N^{-1},$$

بنابراین بردارهای V^N و U^N به صورت زیر معرفی

می‌شوند.

$$\begin{cases} w(:, z_1 + z_2 + 1 : n) * U^N \\ = (f^N(X_i, t), z_1 \\ + z_2 + 1 \leq i \leq n)^T \\ -w(:, 1 : z_1) * U^I \\ -w(:, z_1 + 1 : z_1 + z_2) * U^D, \\ w(:, z_1 + z_2 + 1 : n) * V^N \\ = (g^N(X_i, t), z_1 \\ + z_2 + 1 \leq i \leq n)^T \\ -w(:, 1 : z_1) * V^I \\ -w(:, z_1 + 1 : z_1 + z_2) * V^D. \end{cases} \quad (34)$$

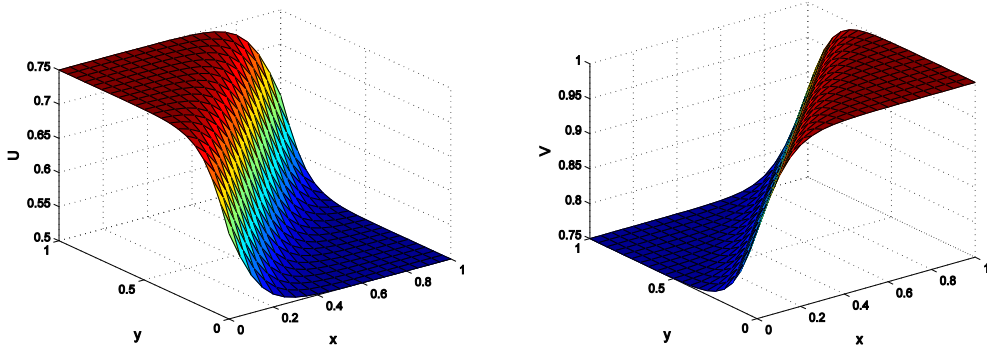
با قرار دادن معادلات (۳۳) و (۳۴) در (۳۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ODE با شرایط اولیه زیر تشکیل می‌شود.

$$\begin{cases} \tilde{U}_I(0) = \tilde{U}_{I0}, \\ \tilde{V}_I(0) = \tilde{V}_{I0}, \end{cases}$$

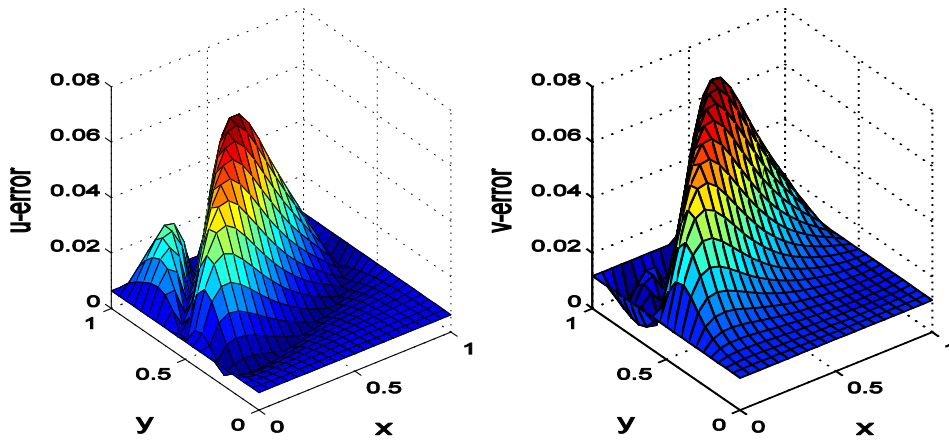
به طوری که

$$\begin{cases} \tilde{U}_{I0} = (U_0(X_j), 1 \leq j \leq z_1)^T, \\ \tilde{V}_{I0} = (V_0(X_j), 1 \leq j \leq z_1)^T. \end{cases}$$

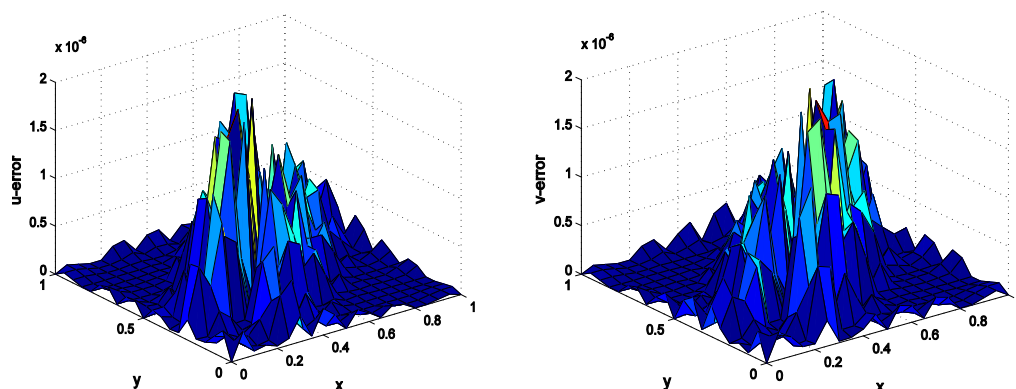
شکل ۹. نتایج عددی u و v برای $Re=100$ در زمان $T=2$ با نقاط یکنواخت $n=1681$ با پارامتر شکلی متغیر



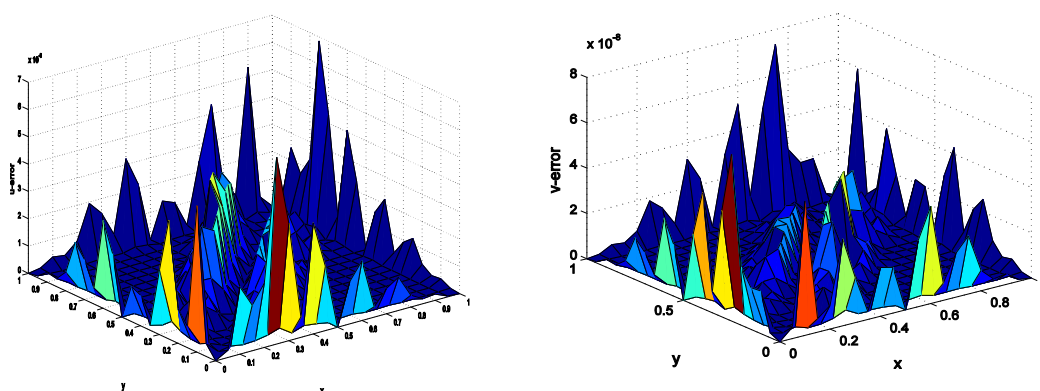
شکل ۱۰. نمودار خطای مطلق برای $Re=100$ در زمان $T=2$ با نقاط یکنواخت $n=1681$ با پارامتر شکلی ثابت $c=10$



شکل ۱۱. نمودار خطای مطلق برای $Re=100$ در زمان $T=2$ با نقاط یکنواخت $n=441$ با پارامتر شکلی متغیر



شکل ۱۲. نمودار خطای مطلق برای $Re=100$ در زمان $T=2$ با نقاط یکنواخت $n=1681$ با پارامتر شکلی متغیر



نتیجه گیری

یافتیم که با حل گر ode113 در نرم افزار متلب به جواب‌های عددی رسیدیم. روش پیشنهادی را برای مثال - های مختلف معادله برگرز با شرایط اولیه و مرزی دیریکله و نیومن پیاده کرده و به مقایسه نتایج آنها با نتایج سایرین و جواب دقیق پرداختیم. نتایج عددی نشان دادند که پایه - های مجهز شده به پارامتر شکلی متغیر با حفظ دقت مطلوب از پایداری بیشتری نسبت به پارامتر شکلی ثابت برخوردارند و این نشان دهنده کارایی و دقت روش می - باشد.

در این مقاله یک روش بدون شبکه موضعی مبتنی بر توابع پایه‌ای نیوتن ارائه شد و برای حل معادله برگرز یک بعدی و دو بعدی به کار گرفته شد. در روند حل عددی معادله برگرز غیرخطی با عدد رینولدز بالا اغتشاشاتی بوجود می‌آید که منجر به ناپایداری جواب می‌شود. برای غلبه بر این مشکل و پایداری بیشتر، تابع مقیاس برای پارامتر شکل پایه‌های نیوتن معرفی کردیم. در ادامه توابع پایه‌ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده را به عنوان توابع آزمون در نظر گرفته و تابع جواب را در راستای متغیر مکان با استفاده از توابع آزمون به روش هم محلی تقریب زدیم. سپس با استفاده از روش خطوط به دستگاهی از معادلات با مشتقات معمولی بر حسب تابع جواب در راستای متغیر زمان دست

equation". Numer Methods Partial Differential Equations 24, 1222-1235.

[9] Atluri, S.N., Shen,S., "The Meshless Local Petrov-Galerkin Method, (MLPG)". Tech Science Press, 2002.

[10] Dehghan, M., Mirzaei, D. (2009). "Meshless Local Petrov-Galerki method (MLPG) for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity". Appl. Numer.Math. 59, 1043-1058.

[11] Dehghan, M., Mirzaei, D. (2008). "The meshless local Petrov Galerkin (MLPG) method for the generalized two-dimensional nonlinear Schrodinger equation". Engineering Analysis with Boundary Elements. 32, 747-756.

[12] Mazarei M.M., A. Aminataei A. (2012). "Numerical Solution of Poisson's Equation Using a Combination of Logarithmic and Multiquadric Radial Basis Function Networks". Journal of Applied Mathematics. dx.doi.org/10.1155/286391.

[13] Liu, G.R. (2003). "Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method". CRC press.

[14] Nguyen, V.P., Rabczuk, T., Bordas, S., Duflo, M. (2008). "Meshless methods: A review and computer implementation aspects," Math. Comput. Simul. 79, 763-813.

[15] Sarler, B. (2007). "From global to local radial basis function collocation method for transport phenomena". Berlin: Springer, 257-282.

[16] Yun, D.F., Hon, Y.C. (2016). "Improved localized radial basis

فهرست منابع

[1] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994). "Element-free Galerkin methods". Int. J. Numer. Methods Engrg. 37, 229-256.

[2] Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F. (1995). "Reproducing kernel particle methods". Int. J. Numer. Methods Fluids 21, 1081-1106.

[3] Kansa, E.J. (1990). "Multiquadrics—a scattered data approximationscheme with application to computational fluid dynamics, part I". Comput. Math Appl. 19, 127-145.

[4] Mukherjee, Y.X., Mukherjee, S. (1997). "The boundary node method for potential problems". Int. J. Numer. Methods Eng. 40, 797-815.

[5] Zhu, T., Zhang, J.D., Atluri, S.N. (1998). "A local boundary integralequation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach". Comput. Mech. 21, 223-235.

[6] Sladek, J., Sladek, V., Atluri, S.N. (2000). "Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problem of elasticity with nonhomogeneous material properties". Comput. Mech. 24, 456-462.

[7] Dehghan, M., Mirzaei, D. (2008). "Numerical solution to the unsteady two-dimensional Schrodinger equation using meshless local boundary integral equation method". Int. J. Numer. Methods Eng. 76, 501-520.

[8] Mohebbi, A., Dehghan, M. (2008). "High order compact solution of the one-space-dimensional linear hyperbolic

۱۸۳،۲۴۱۳-۲۴۲۳.

- [25] Jiwari, R. (2015). "A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers' equation". *Comput. Phys. Commun.* 188,59-67.
- [26] Mittal, R., Jain, R. (2012). "Numerical solutions of nonlinear burgers equation with modified cubic b-splines collocation method". *Appl. Math. Comput.* 218(15), 7839-7855.
- [27] Xie, H., Zhou, J., Jiang, Z., Guo, X. (2016). "Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods". *J. Nonlinear Sci. Appl.* 9, 3727-3734.
- [28] Bozzini, M., Lenarduzzi, L., Rossini, M., Schaback, R. (2015). "Interpolation with variably scaled kernels". *IMA J. Numer. Anal.* 35,199-219.
- [29] L.T. Luh, The shape parameter in the Gaussian function, *Comput. Math. Appl.* 63 (2012) 687-694.
- [30] Sarra, S., Sturgill, D. (2009). "A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33, 1239-1245
- [31] Muller, S., Schaback, R. (2009). "A Newton basis for kernel spaces". *J. Approx. Theory.* 161, 645-655.
- [32] Pazouki, M., Schaback, R. (2011). "Bases for kernel-based spaces". *J. Comput. Appl. Math.* 236, 575-588
- [33] Schaback, R. (2011). "Matlab Programming for Kernel -Based methods". Technical Report, <http://num.math.unigoettingen>
- function collocation method for multi-dimensional convection-dominated problems". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 67, 63-80.
- [17] Sarra, S. (2012). "A local radial basis function method for advection-diffusion-reaction equations on complexly shaped domains". *Appl. Math. Comp.* 218, 9853-9865.
- [18] Sarler, B. (2007). "From global to local radial basis function collocation method for transport phenomena". Berlin: Springer, 257-282.
- [19] Lee, C., Liu, X., Fan, S. (2003). "Local multiquadric approximation for solving boundary value problems". *Comput. Mech.* 30, 396-409.
- [20] Abbasbandy, S., Darvishi, M.T. (2005). "A numerical solution of Burgers' equation by time discretization of Adomian's decomposition method". *Appl. Math. Comput.* 170,95-102.
- [21] Asaithambi, A. (2010). "Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation". *Appl. Math. Comput.* 216, 2700-2708.
- [22] Dag, I., Irk, D., Saka, B. (2015). "A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines". *Appl. Math. Comput.* 163(1),199-211.
- [23] Hashemian, A. Shodja, H.M. (2008). "A meshless approach for solution of Burgers' equation". *J. Comput. Appl. Math.* 220, 226-239.
- [24] Jiwari, R. (2012). "A haar wavelet quasi linearization approach for numerical simulation of Burgers' equation". *Comput. Phys. Commun.*

de/schaback/research/papers/MPfKB
M.pdf.

[34] Caldwell, J. Smith, P. (1982). "Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number". Appl. Math. Model. 6, 381–385

[35] Hon, Y.C., Mao, X.Z. (1998)." An efficient numerical scheme for Burgers' equation". Appl.Math.Comp.95,37-50.

[36] Zhang, X.H, Ouyang, J., Zhang, L. (2009). "Element-free characteristic Galerkin method for Burgers'equation". Eng. Anal. Bound. Elem. 33, 356–362.

[37] Pugh, S.M. (1995). "Finite element approximation of Burgers equation". M.S. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.

[38] Sarler, B., Vertnik, R., Kosec, G. (2012). " Radial basis function collocation method for the numerical solution of the twodimensional transient nonlinear coupled Burgers' equations". Appl. Math. Model. 36, ۱۱۴۸–۱۱۶۰.