

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

خاصیت‌هایی از جبرهای لی پوچ توان

محمدرضا ریسمانچیان^{۱*}، مهدی ارسخان^۲

(^۱) گروه ریاضی محض، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، جمهوری اسلامی ایران.

(^۲) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد یزد، جمهوری اسلامی ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۰/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۱۶

چکیده

در این مقاله با استفاده از تعریف‌های سری‌های مرکزی و پوچ توانی در جبرهای لی، نتیجه‌هایی شبیه به کارهای هالس و لینوکس در سال ۱۹۷۶ و هکستر در سال ۱۹۸۶ را ارائه می‌دهیم. در انتها ثابت خواهیم کرد که هر ایده‌آل غیربدیهی از یک جبرلی پوچ توان دارای اشتراک غیر بدیهی با مرکز آن جبر لی است، که این شبیه به نتیجه فلیپ هال در نظریه گروه‌ها است.

واژه‌های کلیدی: مرکز جبرلی، سری مرکزی، ایده‌آل کمین، موضعاً پوچ توان.

۱- مقدمه

از آنجا که ارتباط تنگاتنگی بین نظریه گروه‌ها و جبرهای لی وجود دارد، در دهه‌های اخیر مفاهیم و پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی نظریه گروه‌ها، به طور مشابه در جبرهای لی نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. چون گروه‌های پوچ توان رده‌ی مهمی از از گروه‌ها را در بر می‌گیرند، مشابه با آن نتیجه‌ها نیز در جبرهای لی قابل توجه است که به عنوان مثال برخی از آنها را می‌توان در [۱-۴] مشاهده نمود. در این خصوص برخی خواص پوچ توانی از گروه‌ها را در جبرهای لی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

یک جبر لی L فضای برداری روی میدان F است همراه با ضرب براکت $L \times L \rightarrow L$: $[,]$ به قسمی که ضرب روی هر مولفه خطی است و

$$\forall x \in L : [x, x] = 0, \\ \forall x, y, z \in L : [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

(اتحاد ژاکوبی).

در صورتی که مشخصه میدان مخالف ۲ فرض شود خاصیت اول معادل است با این که

$$\forall x, y \in L : [x, y] = -[y, x].$$

تمام جبرهای لی مورد بحث در این نوشته (از بعد متناهی یا نامتناهی) روی یک میدان ثابت F در نظر گرفته شده‌اند. فرض کنیم I و J دو زیر فضا از جبر لی L باشند. در این صورت زیر فضای زیر را تعریف می‌کنیم،

$$[I, J] = \langle [i, j] \mid i \in I, j \in J \rangle.$$

زیر فضای I از L را زیر جبر L گویند اگر $[I, I] \subseteq I$. همچنین I را ایده‌آل L گویند اگر $[I, L] \subseteq I$.

در صورتی که I و J هر دو ایده‌آل L باشند، $[I, J]$ نیز یک ایده‌آل از L است.

حال دو ایده‌آل از L را به صورت زیر یادآور می‌شویم،

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0, \forall y \in L\}, \\ L^2 = [L, L] = \langle [x, y] \mid x, y \in L \rangle.$$

توجه شود $Z(L)$ را مرکز و L^2 را مشتق L گویند و به طور مشخص ایده‌آل‌هایی از L هستند.

فرض کنیم I ایده‌آلی از L باشد. در این صورت فضای

$$\text{خارج قسمت } \frac{L}{I} \text{ با ضرب } [,]_I,$$

$$[x + I, y + I]_I = [x, y] + I, x, y \in L,$$

یک جبر لی خواهد بود (گزاره ۵.۱.۱ از [۵] را ببینید). لازم به ذکر است جهت سادگی در نوشتار $[,]_I$ را با همان $[,]$ نشان می‌دهیم.

در ادامه دو مفهوم مورد استفاده از جبرهای لی را یادآور می‌شویم. فرض کنیم $L^1 = L$ و $Z_1(L) = Z(L)$ باشند. به صورت استقرایی برای هر $i \geq 1$ تعریف می‌کنیم

$$\frac{Z_{i+1}(L)}{Z_i(L)} = Z\left(\frac{L}{Z_i(L)}\right) \text{ و } L^{i+1} = [L, L^i].$$

واضح است که $L^i \supseteq L^{i+1}$ و $Z_i(L) \subseteq Z_{i+1}(L)$. با توجه به مطالب بیان شده دو سری کاهشی و افزایشی از ایده‌آل‌های L (بخش ۷.۱ از [۵] را ببینید) به صورت زیر بیان می‌شوند،

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \dots \supseteq L^i \supseteq \dots, \quad (*)$$

$$0 = Z_0(L) \subseteq Z_1(L) \subseteq Z_2(L) \subseteq \dots \subseteq Z_i(L) \subseteq \dots \quad (**)$$

سری (\times) را سری مرکزی پایینی و سری $(\times \times)$ را سری گویند L مرکزی بالایی جبر لی L پوچ توان نامیده می‌شود اگر برای عدد صحیح و مثبتی مانند n ،

$$L^{n+1} = 0 \text{ یا } Z_n(L) = L$$

کوچکترین مقدار موجود برای n را رده پوچ توانی L گویند.

در اینجا با توجه به مطالب بیان شده تعریف زیر را یادآور می‌شویم.

تعریف ۱.۱: جبر لی L را موضعاً پوچ توان گویند هرگاه هر زیر جبر با تولید متناهی از L ، پوچ توان باشد.

ایجاب می‌کند. فرض کنیم $Z_r(L)$ اولین جمله از سری مرکزی بالایی L باشد به طوری که شامل I است. مشاهده می‌شود که $Z_{r-1}(L) \cap I \subset I$. حال با استفاده از نتیجه ۲.۲ داریم

$$[I, L] \subseteq [Z_r(L), L] \cap I \subseteq Z_{r-1}(L) \cap I \subset I$$

قضیه زیر در جبرهای لی شبیه به قضیه ۱۷.۲ از مرجع [۶] و کارهای انجام شده توسط مالسو [۸] و مک لین [۸] در نظریه گروه‌ها است.

قضیه ۴.۲: فرض کنیم I ایده‌آلی کمین از جبر لی

موضعیاً پوچ توان L باشد. در این صورت $[I, L] = 0$.

برهان: فرض کنیم $[I, L] \neq 0$. در این صورت

$a \in I$ و $x \in L$ موجود است به طوری که $b = [a, x] \neq 0$. چون $b \in I$ است، خاصیت کمین

بودن I ایجاب می‌کند $I = \langle b \rangle$. از این رو برای اعضای مناسب l_1, l_2, \dots, l_n متعلق به L داریم

$a \in \langle [b, l_1], \dots, [b, l_n] \rangle$. فرض کنیم H یک

زیر جبر موضعیاً پوچ توان تولید شده توسط مجموعه‌ی

$\{a, x, l_1, l_2, \dots, l_n\}$ باشد و نیز $A = \langle a \rangle$ ایده

آلی از L تولید شده توسط عضو a باشد. چون

$[a, x] \in [A, H]$ لذا $b \in [A, H]$. بنابراین

$A = [A, H]$. اگر $A \neq 0$ ، آنگاه با کمک گرفتن از

لم ۳.۲ می‌توان گفت $[A, H] \subset A$ ، که این در

تناقض با شرط $A = [A, H]$ است. لذا $A = 0$ و

این بدین معنی است که $b = [a, x] = 0$ بنابراین

$$[I, L] = 0$$

لم زیر نقش اساسی در نتایج بعدی دارد. این لم شبیه به

لم ۲۲.۲ از مرجع [۹] است.

لم ۵.۲: فرض کنیم I و J ایده‌آلهایی از جبر لی L

باشند به طوری که $L = J + [I, L]$. در این صورت

برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $L = J + [I, L^n]$.

ایده‌آل نابدیهی I از جبر لی L را ایده‌آل کمین گویند اگر به ازای هر ایده‌آل J از L که $J \subseteq I$ نتیجه شود $J = I$ یا $J = 0$.

در این مقاله ثابت خواهیم کرد اگر I یک ایده‌آل کمین

از جبر لی موضعیاً پوچ توان L باشد، آنگاه $[I, L] = 0$

این قضیه شبیه به کار انجام شده توسط مالسو [۶] و

مکلین [۷] است که نشان می‌دهند اگر M یک

زیرگروه کمین نرمال از گروه موضعیاً پوچ توان G باشد،

$$\langle M, G \rangle = 1.$$

۲- نتایج و بحث

در این قسمت درستی بعضی از نتایج صادق در جمله‌های

سری‌های مرکزی (پایینی و بالایی) و پوچ توانی در

گروه‌ها را روی جبرهای لی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با مشابه کاری از مطالب صادق در گروه‌ها از مرجع [۶]

می‌توان نتایج و لم‌های زیر را نتیجه گرفت.

لم ۱.۲: فرض کنیم I و J ایده‌آلهایی از جبر لی L

باشند به طوری که I مشمول در J است. در این

صورت $[I, L] \subseteq J$ اگر و تنها اگر $\frac{I}{J} \subseteq Z(\frac{L}{J})$.

برهان:

$$[I, L] \subseteq J \Leftrightarrow \frac{[I, L] + J}{J} = 0_{\frac{L}{J}}$$

$$\Leftrightarrow [\frac{I}{J}, \frac{L}{J}] = 0_{\frac{L}{J}} \Leftrightarrow \frac{I}{J} \subseteq Z(\frac{L}{J}).$$

نتیجه ۲.۲: فرض کنیم L یک جبر لی دلخواه و r

عددی صحیح و مثبت باشد. در این صورت

$$[Z_r(L), L] \text{ مشمول در } Z_{r-1}(L) \text{ است.}$$

لم ۳.۲: فرض کنیم L یک جبر لی پوچ توان و I

ایده‌آلی نابدیهی از L باشد. در این صورت

$$[I, L] \subset I$$

برهان: فرض پوچ توانی L وجود عددی صحیح و

مثبتی مانند n به طوری که $Z_n(L) = L$ را

برهان: جهت سهولت در روند اثبات، نمادهای $\bar{L} = \frac{L}{J}$ و $\bar{I} = \frac{I+J}{J}$ را معرفی می‌کنیم. با استناد به فرض لم، $\bar{L} = \frac{[I, J] + J}{J} = [\bar{I}, \bar{L}] \subseteq \bar{I}$ از این رو $\bar{I} = \bar{L}$ و $\bar{L} = [\bar{I}, \bar{L}]$ حال با روند استقرایی بر n می‌توان مشاهده کرد،

$$\bar{L} = \bar{L}^{n+1} = [\bar{L}, \bar{L}^n] = \frac{[I, L^n] + J}{J}.$$

$$\text{لذا } L = J + [I, L^n]$$

قضیه زیر شبیه به قضیه ۳.۲ از مرجع [۱۰] است.

قضیه ۶.۲: فرض کنیم I و J ایده‌آلی از جبر لی L باشد. در این صورت

(۱) اگر $L = J + L^2$ ، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n ، $L = J + L^n$

(۲) اگر $J \cap Z(L) = 0$ ، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n ، $J \cap Z_n(L) = 0$.

برهان: (۱) کافی است در لم ۶.۲ ایده‌آل I را برابر با L در نظر بگیریم.

(۲) با توجه به نتیجه ۲.۲ برای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$[J \cap Z_{n+1}(L), L] \subseteq [Z_{n+1}(L), L] \subseteq Z_n(L).$$

با توجه به این که $J \cap Z_{n+1}(L)$ ایده‌آلی از L است، داریم $[J \cap Z_{n+1}(L), L] \subseteq J \cap Z_n(L)$.

فرض کنیم $x \in J \cap Z_{n+1}(L)$. با توجه به رابطه فوق به ازای هر $l \in L$ ، $[x, l] \in J \cap Z_n(L)$. با روند استقرایی روی n می‌توان فرض کرد $J \cap Z_n(L) = 0$ یعنی $[x, l] = 0$ لذا $x \in Z(L)$ از این رو $x \in J \cap Z(L) = 0$ که این مطلب قسمت دوم قضیه را اثبات می‌کند.

قضیه ۷.۲: فرض کنیم I ایده‌آلی نابديهی از جبر لی پوچ توان L باشد. در این صورت $I \cap Z(L) \neq 0$.
برهان: چون L پوچ توان است، عدد صحیح و مثبتی مانند s موجود است به طوری که $L = Z_s(L)$. فرض کنیم $I \cap Z(L) = 0$ باشد. بنابر قسمت دوم قضیه ۷.۲ داریم $I \cap Z_s(L) = 0$ ، که این با رابطه $I \cap Z_s(L) = I$ در تناقض است.

نتیجه ۸.۲: هر ایده‌آل کمین از یک جبر لی پوچ توان مشمول در مرکز آن جبر لی است.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تعریف سری‌های مرکزی پایینی و بالایی و مفهوم پوچ توانی در جبر لی، نتیجه‌هایی مشابه در نظریه گروه‌ها به دست آوردیم. به خصوص ثابت کردیم اگر I ایده‌آل نابديهی از جبر لی پوچ توان L باشد، آنگاه اشتراک I با مرکز L غیر بدیهی است که این مشابه با نتیجه شناخته شده فیلیپ هال در نظریه گروه‌ها است. اثبات ارائه شده متفاوت و کوتاه‌تر از مورد مشابه است. هم چنین نشان دادیم اگر I ایده‌آل کمین از جبر لی موضعاً پوچ توان L باشد، آنگاه $[I, L]$ بدیهی است.

فهرست منابع

[10] N. S. Hekster, On the structure of n -isoclinism classes of groups, *J. Pure Appl. Algebra* 40 (1986) 63-85.

[11] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[12] M. R. Rismanchian, ν -nilpotent groups and 5-term exact sequence, *Comm. Algebra* 42 (2014) 1559-1564.

[1] M. Araskhan and M. R. Rismanchian, Dimension of the c -nilpotent multiplier of Lie algebras *Proc. Indian Acad. Sci.* 126(3) (2016) 353–357.

[2] P. Hardy, On characterizing nilpotent Lie algebras by their multipliers III, *Comm. Algebra* 33 (2005) 4205–4210.

[3] M. R. Rismanchian and M. Araskhan, Some inequalities for the dimension of the Schur multiplier of a pair of (nilpotent) Lie Algebras, *J. Algebra* 352 (2012) 173–179.

[4] M. R. Rismanchian, M. Molavi and M. Araskhan, On dimension and homological methods of the (higher) Schur multiplier of a pair of Lie algebras, *Comm. Algebra* 45(11) (2017) 4707-4716.

[5] W. A. de Graaf, *Lie algebras: Theory and algorithms*, Elsevier, Amsterdam, New York, 2000.

[6] A. I. Malcev, On a general method for obtaining local theorems in group theory, *Ivanov. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap.* 1 (1941) 3-9.

[7] D. H. Mclain, On locally nilpotent groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 52 (1956) 5-11

[8] J. A. Hulse and J. C. Lennox, Marginal series in groups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 76A (1976) 139-154.

[9] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Pt 1. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.

