

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره پنجاه و دوم، بهمن و اسفند ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

رتبه‌بندی شعب بانک سامان با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های فازی و پرومتی

الهه صرفی^{۱*}، عصمت نورزی^۲

^(۱) گروه ریاضی، واحد دامغان، دانشگاه آزاد اسلامی، دامغان، ایران

^(۲) گروه ریاضی، واحد تهران شرق، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵

چکیده

عدم قطعیت یکی از موضوعات غیر قابل اجتناب و جذاب در جهان واقعی می‌باشد. در سال‌های اخیر، داده‌های فازی وارد مسائل تحلیل پوششی داده‌ها شده‌اند و این موضوع زمینه تحقیق بسیاری از پژوهشگران را فراهم کرده است. علاوه بر این رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها، خود، موضوع چالش برانگیزی است. در مقاله حاضر روشی دو مرحله‌ای برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی ارائه شده است. در این روش، ابتدا کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی به دست می‌آید. اندازه‌های کارایی به دست آمده، خود، اعداد فازی هستند. پس از آن با به‌کارگیری پرومتی II، که یک روش تصمیم‌گیری چندمعیاره است و با استفاده از اندازه‌های کارایی فازی به دست آمده از مرحله اول، می‌توان واحدهای تصمیم‌گیرنده را رتبه‌بندی کرد. در اینجا واحدهای تصمیم‌گیرنده به عنوان گزینه‌ها و کران پایین، مقدار میانی و کران بالای کارایی به عنوان معیارهای پرومتی در نظر گرفته می‌شوند. پس از آن روش رتبه‌بندی ارائه شده برای یک مثال عددی و یک مثال کاربردی که داده‌های آن مربوط به ۶۰ شعبه از بانک سامان می‌باشد به کار رفته است. در پایان، نتایج حاصل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، اعداد فازی، پرومتی II، صفحه GAIA

۱- مقدمه

مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفت. تاکنون مطالعات زیادی در زمینه رتبه‌بندی واحدهای کارا انجام شده و روش‌های متعددی پیشنهاد شده است که هر یک دارای مزایا و نقص‌هایی نسبت به روش‌های دیگر است. برخی از مطالعات در مورد این موضوع توسط سکستون و همکاران ([۳۴])، اندرسون و همکاران ([۸])، الدر و همکاران ([۷])، چن ([۱۸])، جهانشاهلو و همکاران ([۲۴])، ([۲۵])، رضایی بalf و همکاران ([۳۶]) و ... انجام شده است. در این مقالات سعی شده است تا روشی برای رتبه‌بندی تمامی DMUهای کارا ارائه شود. در اکثر این روش‌ها، وزن‌ها را به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که درصد معینی از کارایی سایر DMUها حفظ شود. سپس DMUهای کارا، را بر اساس رتبه کارایی‌هایشان رتبه‌بندی می‌شوند. با توجه به اهمیت موضوع رتبه‌بندی واحدها، محققین بسیاری در طی سال‌های اخیر زمینه پژوهش خود را روی این زمینه معطوف نموده که از جمله می‌توان به مقالات [۱]، [۴] و [۳۵] اشاره کرد.

پیرامون زندگی انسان همواره مسائل مختلفی وجود دارد که باید برای حل آنها برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری کند. از آنجا که اصولاً عدم قطعیت در ذات و نهاد طبیعت جای دارد، لذا برای بررسی و حل مسائل تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی، داده‌های نادقیق نفوذ قابل توجهی دارند. داده‌های نادقیق عبارتند از داده‌های ترتیبی، داده‌های تصادفی یا احتمالی، داده‌های فازی، داده‌های بازه‌ای یا ترکیبی از انواع موارد نامبرده. در مدل‌های اولیه DEA فرض شده است که ورودی‌ها و خروجی‌ها مقادیر دقیق دارند، اما از آنجا که در بسیاری از مسائل جهان واقعی این فرض معتبر نمی‌باشد (یعنی برخی یا همه ورودی‌ها و خروجی‌ها ممکن است نادقیق باشند)، لذا موضوع عدم دقت در DEA معنی پیدا می‌کند و زمانی با آن روبرو می‌شویم که مفهوم عدم قطعیت در داده‌ها وجود داشته باشد. به خصوص زمانی که مجموعه‌ای

ارزیابی و مقایسه‌ی کارایی واحدهای مشابه بخش مهمی از مدیریت یک سازمان پیچیده است. تحلیل پوششی داده‌ها^۲ یکی از تکنیک‌های قدرتمند مدیریتی است که ابزاری در اختیار مدیران قرار می‌دهد تا بتوانند به وسیله آن کارایی شرکت خود را در قبال سایر رقبا محک زنند و براساس نتایج آن برای آینده‌ای بهتر تصمیم‌گیری کنند. تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتری است که کارایی نسبی واحدهایی که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های مشابه هستند، را اندازه‌گیری کرده و واحدهای تصمیم‌گیری (DMU)^۳ را به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم می‌کند. اندازه کارایی واحدهای کارا برابر با ۱ و برای واحدهای ناکارا کمتر از ۱ است. ایده اولیه تحلیل پوششی داده‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۷ توسط فارل ارائه شد ([۲۱]) را مشاهده کنید. پس از آن چارلز کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ مدل CCR را معرفی کردند ([۱۷]) را مشاهده کنید. تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها در سال ۱۹۸۴ توسط بنکر و همکاران توسعه یافت و مدل BCC معرفی گردید ([۱۳]). مدل‌های CCR و BCC به مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها معروف می‌باشند. سادگی فهم و اجرای روش تحلیل پوششی داده‌ها و در کنار آن دقت بالا و کاربرد وسیع آن در زمینه‌های مختلف باعث شده است پژوهشگران زیادی از این روش برای دست یافتن به اهداف خود استفاده کنند. اما در بسیاری از مسائل عددی و کاربردی واحدهای کارای متعددی وجود دارد و این سوال مطرح می‌شود: به راستی از بین این واحدهای کارا کدام یک بهتر از بقیه می‌باشد؟ بنابراین موضوع رتبه‌بندی واحدها (به ویژه رتبه‌بندی واحدهای کارا) در تحلیل پوششی داده‌ها مطرح گردید که

^۲ Data Envelopment Analysis^۳ Decision Making Unit

مقالات اخیر در زمینه فازی می‌توان به [۵]، [۶]، [۹]، [۲۲]، [۲۳]، [۳۰]، [۳۱] و [۴۱] اشاره کرد. موضوع چالش‌برانگیز دیگری که اغلب در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی استفاده می‌شود تصمیم‌گیری چندمعیاره است. مدیران زمانی با این نوع تصمیم‌گیری روبرو می‌شوند که از دو یا چند معیار برای تصمیم‌گیری استفاده کنند. امروزه کاربرد روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره به قدری فراگیر شده است که در بسیاری از مسائل زندگی روزمره مانند انتخاب خودرو از بین چندین خودرو و یا حتی انتخاب دانشگاه از چند دانشگاه برای ادامه تحصیل از آن استفاده می‌شود. از روش‌های مختلف موجود برای تصمیم‌گیری چندمعیاره، می‌توان به ^۴AHP، ^۵ANP، ^۶ELECTRE، ^۷TOPSIS، ^۸VIKOR و ^۹PROMETHEE اشاره کرد.

آخرین روش ذکر شده (PROMETHEE) که در این مقاله نیز مورد استفاده قرار گرفته است، اولین بار توسط برنس در سال ۱۹۸۲ معرفی شد [۱۴] را مشاهده کنید). پس از آن در سال ۱۹۸۵ توسط برنس و وینکی گسترش یافت [۱۵] را مشاهده کنید). در این روش با در نظر گرفتن چندین معیار که ممکن است بعضی از نوع ماکسیمم و بعضی از نوع مینیمم باشند، همچنین با تعریف وزن هر معیار، تابع ارجحیت، آستانه بی‌تفاوتی و آستانه ارجحیت، گزینه‌های متعددی را می‌توان مورد ارزیابی قرار داده و مقایسه کرد. به منظور بالا بردن کارایی در روش PROMETHEE از تکنیک

از DMU ها حاوی داده‌های ترتیبی، داده‌های بازه‌ای یا داده‌های فازی هستند. بنابراین، ارزیابی کارایی مجموعه‌ای از DMU ها در این شرایط ارزش بررسی دارد.

از مهم‌ترین داده‌های نادقیق، داده‌های فازی است، زیرا برای مواجهه با عدم قطعیت و ابهام موجود در جهان واقعی، منطق دو ارزشی به تدریج جای خود را به منطق فازی داده است. این دیدگاه جدید، عدم قطعیت ناشی از تردید را مدیریت می‌کند و در این نوع تصمیم‌گیری یکی از مسائل مهم جمع‌آوری اطلاعات فازی و انتخاب گزینه بهینه است.

برای اولین بار پروفیسور لطفی عسگرزاده نظریه مجموعه فازی را در سال ۱۹۵۶ ارائه کرد ([۴۰]).

داده‌های فازی در بسیاری از علوم کاربردی از جمله تحلیل پوششی داده‌ها استفاده می‌شود. این زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار همه یا برخی از ورودی‌ها و یا خروجی‌ها دقیقاً مشخص نشده باشد. در واقع، مقادیر ورودی یا خروجی ممکن است اعداد فازی باشند. با معرفی داده‌های فازی در تحلیل پوششی داده‌ها، مقالات زیادی در مورد چگونگی ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های فازی ارائه شد. وجود داده‌های فازی در تحلیل پوششی داده‌ها باعث ایجاد مسئله اجتناب‌ناپذیر دیگری شد: رتبه‌بندی واحدها با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی. جهان‌شاهلو و همکاران واحدهای تصمیم‌گیرنده را با داده‌های فازی با استفاده از نرم 1۱ رتبه‌بندی کردند ([۲۴]).

در سال ۲۰۰۹، ون و لی مدل دیگری را معرفی کردند که روش متفاوتی را برای رتبه‌بندی واحدها با داده‌های فازی پیشنهاد می‌کرد ([۳۷]). پیکانی و همکاران یک رویکرد جدید در DEA شبکه فازی را پیشنهاد کرده‌اند که برای رتبه‌بندی واحدها استفاده می‌شود و می‌توان گفت که یکی از جدیدترین مطالعات در زمینه رتبه‌بندی فازی در تحلیل پوششی داده‌ها به شمار می‌آید ([۲۸]). از

^۴ Analytical Hierarchy Process

^۵ Analytical Network Process

^۶ ELimination Et Choice in Translating to REality

^۷ Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution

^۸ Vise Kriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje

^۹ Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations

است ([۳۶] را مشاهده کنید). سپس در مرحله دوم، از کران پایین، مقدار میانی و کران بالای کارایی‌های به دست آمده به عنوان سه معیار برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده می‌شود.

ادامه مقاله به صورت زیر بخش‌بندی شده است. در بخش دوم پیش‌زمینه‌ای در مورد اعداد فازی، تحلیل پوششی داده‌های فازی و PROMETHEE ارائه می‌شود و در بخش سوم روش پیشنهادی دو مرحله‌ای برای رتبه‌بندی واحدها بیان می‌شود. برای ارزیابی روش رتبه‌بندی پیشنهادی، روش یاد شده برای یک مثال عددی و یک مثال کاربردی در بخش چهارم به کار برده می‌شود و در بخش پایانی نتایج اجرای روش، مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت

۲. پیشینه پژوهش

۱.۲. مفهوم فازی

تعریف مجموعه فازی: آتاناسو مجموعه فازی شهودی در مجموعه مرجع X را به این صورت زیر تعریف می‌کند ([۱۰] را مشاهده کنید).

$$\tilde{A}(X) = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}(X)}(x), v_{\tilde{A}(X)}(x)), \forall x \in X \right\}$$

به طوری که

$$\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1], v_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$$

با این شرط که

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + v_{\tilde{A}}(x) \leq 1, \forall x \in X$$

و اعداد $\mu_{\tilde{A}}(x), v_{\tilde{A}}(x)$ به ترتیب نشان دهنده درجه عضویت و درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ به مجموعه \tilde{A} می‌باشد. آتاناسو همچنین برای یک مجموعه فازی شهودی مقدار π_x که از رابطه زیر به دست می‌آید را به عنوان درجه تردید معرفی می‌کند:

$$\pi_x = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - v_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$$

GAIA^۱ استفاده می‌شود. GAIA تعیین می‌کند هر گزینه‌ها چقدر خوب و چقدر بد می‌باشد، یعنی گزینه‌ها یک بار بر اساس خوب بودن آنها و یک بار بر اساس بد بودنشان رتبه‌بندی می‌شوند. PROMETHEE یکی از پیچیده‌ترین روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره است که نتایج بسیار دقیقی دارد. تاکنون مطالعاتی زیادی بر روی ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌ها و تحلیل پرومته انجام شده است. باقری کهورین و دی اسمیت در سال ۲۰۱۶ یک مدل رتبه‌بندی بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها و پرومته II ارائه دادند ([۱۱]). مدل آنها به منظور افزایش قدرت تمایز مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها مورد استفاده قرار گرفت. این مدل منجر به نوعی کنترل وزن در مدل DEA شد که از انتخاب وزن‌های بدون محدودیت ممانعت می‌کرد.

در سال ۲۰۱۹ مقاله دیگری توسط باقری کهورین در این زمینه منتشر شد ([۱۲]). در این مقاله یک مدل دو مرحله‌ای برای رتبه‌بندی کامل واحدها ارائه گردید. در مقاله باقری کهورین ابتدا از مدل‌های DEA برای تولید ماتریس مقایسه زوجی استفاده شده و سپس PROMETHEE برای رتبه‌بندی تمامی واحدها به کار گرفته شده است. از دیگر مطالعات در این زمینه می‌توان به مقالات [۲]، [۱۶]، [۱۹]، [۲۹]، [۳۳]، [۳۸] و [۳۹] اشاره کرد.

آنچه در این مقاله به عنوان یک ایده جدید ارائه شده است، ترکیبی از DEA فازی و پرومته II می‌باشد. در این روش، با فرض این که ورودی‌ها و خروجی‌ها اعداد فازی مثلثی هستند، در دو مرحله به رتبه‌بندی واحدها می‌پردازیم. در مرحله اول، با استفاده از مدل وانگ و همکاران کارایی تمام واحدها به صورت اعداد فازی مثلثی به دست آمده

^۱ Geometric Analysis for mutual Assistance

در نمایش $\tilde{A} = (A^L, A^m, A^R)$ ، A^m مقدار متوسط $(\mu_{\tilde{A}}(A^m) = 1)$ ، A^L مقدار بدبینانه $(\mu_{\tilde{A}}(A^L) = 0)$ و A^R مقدار خوشبینانه $(\mu_{\tilde{A}}(A^R) = 0)$ می‌باشد.

اگر $\tilde{A} = (A^l, A^m, A^u)$ و $\tilde{B} = (B^l, B^m, B^u)$ دو عدد فازی مثلثی باشند آنگاه $\tilde{A} + \tilde{B}$ ، $\tilde{A} - \tilde{B}$ نیز اعداد فازی مثلثی هستند و به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (A^l + B^l, A^m + B^m, A^u + B^u)$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (A^l - B^u, A^m - B^m, A^u - B^l)$$

علاوه بر این اگر $A^l, B^l > 0$ آنگاه $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$

و \tilde{A} / \tilde{B} نیز اعداد فازی مثلثی می‌باشند و به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (A^l B^l, A^m B^m, A^u B^u)$$

$$\tilde{A} / \tilde{B} = (A^l / B^u, A^m / B^m, A^u / B^l)$$

۲.۲. تحلیل پوششی داده‌های فازی

اولین مدل تحلیل پوششی داده‌ها توسط چارلز و همکاران در سال ۱۹۷۸ تحت عنوان مدل CCR ارائه شد. در مدل آنها کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده به صورت نسبی از مجموع وزندار شده خروجی‌ها به مجموع وزندار شده ورودی‌ها به دست می‌آمد که وزن‌های اشاره شده از حل مدل، حاصل می‌شد. فرض کنید DMU_j برای $j = 1, \dots, n$ ، n واحد تصمیم‌گیرنده با m ورودی و s خروجی فازی باشند. $\tilde{x}_j = (\tilde{x}_{1j}, \dots, \tilde{x}_{mj})$ و $\tilde{y}_j = (\tilde{y}_{1j}, \dots, \tilde{y}_{sj})$ را به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌های DMU_j در نظر بگیرید. مدل (۱) همان مدل کسری CCR برای ورودی‌ها و خروجی‌های فازی می‌باشد.

تعریف عدد فازی: \tilde{A} را یک عدد فازی شهودی گویند هرگاه این سه شرط برقرار باشند ([۲۷] را مشاهده کنید):

$$(1) \quad \tilde{A} \text{ نرمال باشد، یعنی}$$

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \nu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

$$(2) \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ محدب باشد، یعنی}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \\ \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]$$

$$(3) \quad \nu_{\tilde{A}}(x) \text{ مقعر باشد، یعنی}$$

$$\nu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max(\nu_{\tilde{A}}(x_1), \nu_{\tilde{A}}(x_2)), \\ \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]$$

تعریف عدد فازی مثلثی: عدد فازی \tilde{A} یک عدد فازی مثلثی است هرگاه تابع عضویت آن به این شکل باشد ([۳] را مشاهده کنید).

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{x - (a - s_a^L)}{s_a^L} & a - s_a^L \leq x \leq a \\ \frac{(a + s_a^R) - x}{s_a^R} & a \leq x \leq a + s_a^R \\ \cdot & \text{otherwise} \end{cases}$$

در این صورت $\tilde{A} = (a, s_a^L, s_a^R)$ که در آن s_a^L و s_a^R به ترتیب پهنای چپ و راست نامیده می‌شوند. اگر $s_a^L = s_a^R$ عدد فازی را متقارن نامیده و آن را به صورت $\tilde{A} = (a, s_a)$ نمایش می‌دهیم. نمایش دیگری که از عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, s_a^L, s_a^R)$ وجود دارد به شکل $\tilde{A} = (A^L, A^m, A^R)$ می‌باشد که در آن $A^l = a - s_a^L$ ، $A^m = a$ ، $A^R = a + s_a^R$

در مدل (۲) مادامی که $\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1$ برقرار

باشد، $\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m} \leq 1$ و $\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1$ نیز

برقرار خواهند بود. بنابراین میتوان (۲) را به صورت خلاصه‌تر (مدل (۳)) نوشت.

$$\text{Max } \tilde{\theta}_o \approx (\theta_o^l, \theta_o^m, \theta_o^u) = \quad (3)$$

$$\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^l}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^m}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^m}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^u} \right)$$

$$\text{s. t. } \theta_j^l = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

وانگ و همکاران [۳۶] مدل (۳) را به سه مدل با تابع هدفهای متفاوت و ناحیه موجه یکسان تفکیک کردند. به این ترتیب برای هر واحد تصمیم-گیرنده سه اندازه کارایی مختلف تحت عنوان کران پایین، مقدار میانی و کران بالای کارایی به دست می‌آید. بنابراین مدل (۳) به مدل‌های (۴)، (۵) و (۶) تفکیک می‌شود.

$$\text{Max } \theta_o^l = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^l} \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

$$\text{Max } \theta_o^m = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^m}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^m} \quad (5)$$

$$\text{s. t. } \theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

$$\text{Max } \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}^m}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}^m} \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}^l} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

که در آن v_i (برای $i=1, \dots, m$) و u_r (برای $r=1, \dots, s$) به ترتیب وزن متناظر با ورودی i ام و خروجی r ام می‌باشند. فرض کنید تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها اعداد فازی مثلثی باشند. یعنی داشته باشیم $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u)$ و $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u)$ که در آن $x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u$ و $y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u$ به ترتیب کران پایین، مقدار میانی و کران بالای ورودی i ام DMU_j هستند. به همین ترتیب $y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u$ نیز به ترتیب کران پایین، مقدار میانی و کران بالای خروجی r ام DMU_j می‌باشند.

تاکنون روش‌های متعددی برای حل مدل (۱) ارایه شده است. در مقاله پیش رو از روش ارایه شده در [۳۶] برای حل این مدل استفاده شده است. با استفاده از منطق فازی مدل (۱) را می‌توان به این صورت نوشت.

$$\text{Max } \tilde{\theta}_o \approx (\theta_o^l, \theta_o^m, \theta_o^u) = \quad (2)$$

$$\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^l}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^m}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^m}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^u} \right)$$

$$\text{s. t. } \tilde{\theta}_j \approx (\theta_j^l, \theta_j^m, \theta_j^u) = \left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l}, \right.$$

$$\left. \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^m}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^m}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u} \right) \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

این فرمول انجام می‌شود: $a_i, a_j \in A$ و برای هر $k = 1, \dots, q$ توسط این

$$d_k(a_i, a_j) = g_k(a_i) - g_k(a_j)$$

در مرحله دوم، یک تابع ارجحیت غیر کاهششی، $d_k(a_i, a_j)$ را به عددی در بازه $[0, 1]$ تبدیل می‌کند. این تابع ارجحیت با $\pi_k(a_i, a_j)$ نشان داده می‌شود و دارای شش شکل اصلی می‌باشد که عبارتند از: تابع ارجحیت عادی، U شکل، V شکل، هم سطح، V شکل با ناحیه بی تفاوتی و تابع ارجحیت گوسی. درجه ارجحیت نسبی گزینه a_i نسبت به a_j در معیار k ام که با $\pi_k(a_i, a_j)$ نمایش داده می‌شود توسط فرمول ذیل محاسبه می‌گردد.

$$\pi_k(a_i, a_j) = p_k [d_k(a_i, a_j)]$$

درجه ارجحیت کلی گزینه a_i نسبت به a_j نیز به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\pi(a_i, a_j) = \sum_{k=1}^q (p_k(a_i, a_j) * w_k)$$

جریان‌های رتبه‌بندی مثبت و منفی مربوط به گزینه a_i که به ترتیب با $\Phi^+(a_i)$ و $\Phi^-(a_i)$ نمایش داده می‌شوند نیز به این صورت محاسبه می‌گردند.

$$\Phi^+(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \neq a_i} \pi(a_i, x)$$

$$\Phi^-(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \neq a_i} \pi(x, a_i)$$

در پرومیتی I ترکیبی از جریان‌های رتبه‌بندی مثبت و منفی منجر به رتبه‌بندی جزئی می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i P^1 a_j \text{ iff } \left\{ \begin{array}{l} \Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_j) \quad \Phi^-(a_i) \leq \Phi^-(a_j) \\ \Phi^+(a_i) = \Phi^+(a_j) \quad (\Phi^-) a_i (< \Phi^-) a_j \\ \Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_j) \quad (\Phi^-) a_i (= \Phi^-) a_j \end{array} \right. \\ a_i I^1 a_j \text{ iff } \left\{ \begin{array}{l} \Phi^+(a_i) = \Phi^+(a_j) \quad (\Phi^-) a_i (= \Phi^-) a_j \\ \Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_j) \quad \Phi^-(a_i) \leq \Phi^-(a_j) \\ \Phi^+(a_i) < \Phi^+(a_j) \quad (\Phi^-) a_i (< \Phi^-) a_j \end{array} \right. \\ a_i R^1 a_j \text{ iff } \left\{ \begin{array}{l} \Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_j) \quad \Phi^-(a_i) \leq \Phi^-(a_j) \\ \Phi^+(a_i) < \Phi^+(a_j) \quad (\Phi^-) a_i (< \Phi^-) a_j \end{array} \right. \end{array} \right.$$

که در آن $a_i P^1 a_j$ نماد ارجحیت داشتن a_i نسبت به a_j ، $a_i I^1 a_j$ نماد عدم وجود تفاوت بین

$$Max \quad \theta_o^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^l} \quad (6)$$

$$s. t. \quad \theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

با حل مدل‌های (۴)، (۵) و (۶) یک اندازه کارایی فازی مثلی متناظر با هر واحد تصمیم‌گیرنده وجود خواهد داشت $\tilde{\theta}_o \approx (\theta_o^l, \theta_o^m, \theta_o^u)$ برای $(o = 1, \dots, n)$.

۳.۲. پرومیتی II

روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره متفاوتی از جمله TOPSIS, ELECTRE, ANP, AHP, PROMETHEE و VIKORE تاکنون ارائه و مورد مطالعه قرار گرفته است. پرومیتی برای اولین بار توسط برنس در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. [۱۴] را مشاهده کنید) و سپس در سال ۱۹۸۵ توسط برنس و وینکی گسترش یافت [۱۵] را مشاهده کنید). پرومیتی مجموعه‌ای از گزینه‌ها را بر اساس مجموعه‌ای از معیارها رتبه‌بندی می‌کند. در فرآیند اجرای پرومیتی باید نوع معیارها (ماکسیمم یا مینیمم)، وزن معیارها، تابع ارجحیت، آستانه بی تفاوتی و آستانه ارجحیت تعریف شود. در مقاله حاضر از بین انواع پرومیتی، پرومیتی II برای رتبه‌بندی مورد استفاده قرار گرفته است. فرض کنید A مجموعه گزینه‌ها و C مجموعه معیارها باشند.

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$C = \{g_1(\cdot), \dots, g_q(\cdot)\}$$

علاوه بر این w_k برای $k = 1, \dots, q$ را به عنوان وزن معیار k ام $(g_k(\cdot))$ در نظر بگیرید. گام اول در پرومیتی، مقایسه زوجی گزینه‌هاست. البته این مقایسه باید به گونه‌ای انجام شود که همه معیارها در نظر گرفته شوند. مقایسه زوجی گزینه‌ها برای هر

در پرومته II در نظر می‌گیریم. با توضیحات فوق اکنون با یک مساله تصمیم‌گیری چندمعیاره شامل n گزینه و ۳ معیار روبرو هستیم.

n واحد تصمیم‌گیرنده با m ورودی و s خروجی را

در نظر بگیرید. فرض کنید $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u)$

برای $i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, n$ $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u)$ برای

$r = 1, \dots, s$ به ترتیب i امین ورودی و s امین

خروجی DMU_j $j = 1, \dots, n$ باشند. اولین مرحله

در این روش، حل مدل (۳) می‌باشد. همان طور که

در بخش دوم توضیح داده شد مدل (۳) به مدل‌های

(۴)، (۵) و (۶) تفکیک می‌شود. با حل مدل‌های

(۴)، (۵) و (۶) می‌توان $\tilde{\theta}_o^l, \tilde{\theta}_o^m, \tilde{\theta}_o^u$ را برای

$o = 1, \dots, n$ به دست آورد [۳۶] را مشاهده کنید)

مدل‌های کسری (۴)، (۵) و (۶) را با استفاده از

تبدیل چارنر کوپر می‌توان به ترتیب به مدل‌های

خطی (۷)، (۸) و (۹) تبدیل کرد. بنابراین با حل

مدل‌های برنامه‌ریزی خطی (۷)، (۸) و (۹) کران

پایین کارایی (θ_o^l) ، مقدار میانی کارایی (θ_o^m) و

کران بالای کارایی (θ_o^u) به عنوان معیارهای

پرومته II قابل محاسبه می‌باشد. بنابراین همانطور

که قبلاً اشاره شد با در نظر گرفتن هر واحد

تصمیم‌گیرنده به عنوان یک گزینه و

به عنوان $(\tilde{\theta}_o = (\theta_o^l, \theta_o^m, \theta_o^u))$ $j=1, \dots, n$

معیارهای تصمیم‌گیری، می‌توان پرومته II را برای

رتبه‌بندی واحدها به کار گرفت.

$$\text{Max } \theta_o^l = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^u} \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

a_i و a_j و $a_i R^l a_j$ نیز نشان‌دهنده قابل مقایسه

نبودن a_j و a_i می‌باشد.

اما پرومته II بر اساس جریان خالص رتبه‌بندی

امکان رتبه‌بندی کامل گزینه‌ها را فراهم می‌کند. در

این روش جریان خالص رتبه‌بندی a_i از فرمول ذیل

محاسبه می‌گردد:

$$\Phi(a_i) = \Phi^+(a_i) - \Phi^-(a_i)$$

هر چه جریان خالص رتبه‌بندی مربوط به یک گزینه

بیشتر باشد، آن گزینه رتبه بهتری خواهد داشت.

روش دیگری که در این مقاله مورد استفاده قرار

گرفته است پرومته GAIA می‌باشد. این روش،

ابزاری قدرتمند جهت تجسم هندسی عالی از مساله

تصمیم‌گیری چند معیاره است.

۳. روش رتبه‌بندی پیشنهادی بر اساس تحلیل

پوششی داده‌ها و پرومته II

روش رتبه‌بندی ارایه شده در این مقاله ترکیبی از

تحلیل پوششی داده‌های فازی و پرومته II می‌باشد.

در این روش هر واحد تصمیم‌گیرنده به عنوان یک

گزینه در نظر گرفته می‌شود. با فرض آن که

ورودی‌ها و خروجی‌ها اعداد فازی مثلثی باشند،

مدل (۳) برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده حل

می‌شود. همان طور که در بخش ۲ اشاره شد مدل

(۳) به سه مدل تفکیک می‌شود (مدلهای (۴)، (۵) و

(۶)). از حل این سه مدل بردار سه بعدی

کارایی متناظر با هر واحد تصمیم‌گیرنده به دست

می‌آید. در این جا ارتباط بین تحلیل پوششی داده-

های فازی و تصمیم‌گیری چند معیاره برقرار می-

شود. هر مولفه از بردار سه بعدی کارایی

$(\tilde{\theta}_j) \approx (\theta_j^l, \theta_j^m, \theta_j^u)$ $j=1, \dots, n$ به عنوان یک

معیار در نظر گرفته می‌شود. واضح است در این

شرایط هر سه معیار باید از نوع ماکسیمم‌سازی

باشند. به عبارت دیگر کران پایین، مقدار میانی و

کران بالای کارایی را به عنوان معیارهای رتبه‌بندی

با در نظر گرفتن مجموعه A به عنوان گزینه‌ها و مجموعه C به عنوان معیارها می‌توان با به کار گرفتن پرومیتی II، واحدهای تصمیم‌گیرنده را رتبه‌بندی کرد. علاوه بر این می‌توان با به کارگیری پرومیتی GAIA به تعبیر هندسی از موقعیت واحدهای تصمیم‌گیرنده نسبت به یکدیگر پرداخت. به این ترتیب می‌توان به آسانی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در هر معیار با هم مقایسه کرد. در شکل ۱ فرآیند رتبه‌بندی مقاله حاضر مرحله به مرحله توضیح داده شده است.

۴. مثال‌ها

در این بخش، روش رتبه‌بندی ارائه شده در این مقاله برای یک مثال عددی و یک مثال کاربردی مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین برای هر یک از مثال‌ها، رتبه‌بندی به دست آمده با روش حاضر با نتایج رتبه‌بندی حاصل از مقالات دیگر مقایسه انجام شده است.

۴.۱. مثال عددی

مثال عددی ارائه شده در این بخش مربوط به ۵ واحد تصمیم‌گیرنده با یک ورودی و یک خروجی می‌باشد که در جدول ۱ مشاهده می‌کنید. مقادیر ورودی و خروجی اعداد فازی مثلثی هستند. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها در جدول ۱ برگرفته از مقاله جهانشاهلو و همکاران [۲۶] می‌باشد. اکنون کران پایین کارایی، مقدار میانی کارایی و کران بالای کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده محاسبه شده و به صورت اعداد فازی مثلثی در جدول ۲ آمده است. اعداد موجود در این جدول از حل مدل‌های (۷)، (۸) (۹) به دست آمده‌اند. حل این مدل‌ها توسط نرم‌افزار GAMS انجام شده است.

$$\text{Max } \theta_o^m = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^m}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^m} \quad (5)$$

$$\text{s. t. } \theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

$$\text{Max } \theta_o^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^l} \quad (6)$$

$$\text{s. t. } \theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

$$\text{Max } \theta_o^l = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^l \quad (7)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^u = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l \leq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

$$\text{Max } \theta_o^m = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^m \quad (8)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^m = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l \leq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

$$\text{Max } \theta_o^u = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^u \quad (9)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^l = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l \leq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad i=1, \dots, m; \quad r=1, \dots, s$$

اکنون مجموعه‌های A و C را در نظر بگیرید.

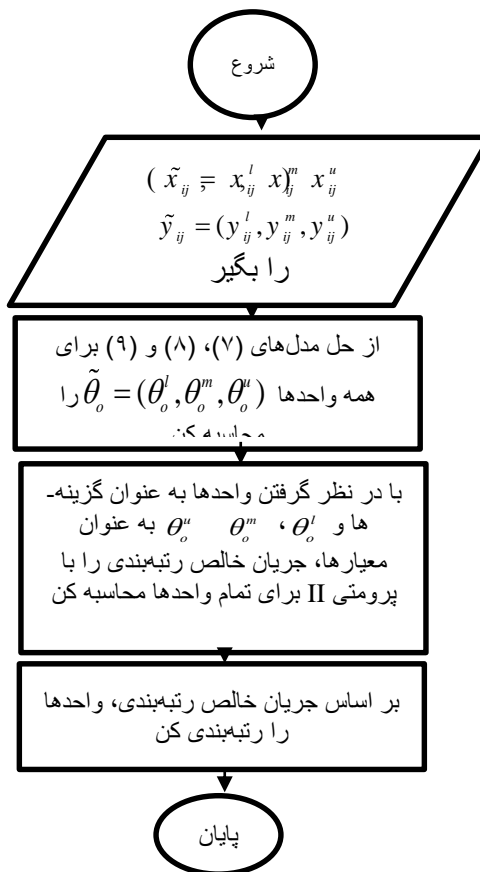
$$A = \{DMU_1, DMU_2, \dots, DMU_n\}$$

$$C = \{\theta^l, \theta^m, \theta^u\}$$

اکنون با به کار گرفتن روش پرومتی II و در نظر گرفتن هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده به عنوان یک گزینه و کران‌های پایین کارایی، اندازه میانی کارایی و کران بالای کارایی به عنوان معیارهای تصمیم‌گیری می‌توان واحدها را رتبه‌بندی کرد. نرم-افزار مورد استفاده برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده VISUAL PROMETHEE می‌باشد. علاوه بر این هر سه معیار (کران پایین کارایی، مقدار میانی کارایی و کران بالای کارایی) از نوع حداکثرسازی در نظر گرفته شده‌اند. همچنین وزن کران پایین و کران بالای کارایی ۱ و وزن مقدار میانی ۴ می‌باشد. تابع ارجحیت نیز از نوع V شکل با آستانه ارجحیت ۰/۲ و فاقد آستانه بی تفاوتی انتخاب شده است. اعداد در شکل ۲ نمایش‌دهنده جریان خالص رتبه‌بندی هستند. این شاخص برای واحدهای تصمیم‌گیرنده B و D مثبت و برای واحدهای C، A و E منفی می‌باشد. بنابراین با استفاده از پرومتی II، واحدهای تصمیم‌گیرنده به ترتیب B، C، D، A و E رتبه‌بندی می‌شوند. در نتیجه واحد B بهترین عملکرد و واحد E بدترین عملکرد را دارند.

اکنون با استفاده از صفحه GAIA به نمایش دو بعدی مساله تصمیم‌گیری چندمعیاره می‌پردازیم. در صفحه GAIA که در شکل ۳ نمایش داده شده است، هر گزینه (هر واحد تصمیم‌گیرنده) با یک نقطه و هر معیار (کران پایین، مقدار میانی و کران بالای کارایی) با یک محور نمایش داده شده است. در شکل ۳ تمام اطلاعات مربوط به این مثال قابل مشاهده می‌باشد.

در جدول ۳ علاوه بر رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با روش مقاله حاضر، از دو روش رتبه‌بندی دیگر که در مقالات پیشین ارائه گردیده، استفاده شده است. همان طور که مشاهده می‌کنید نتایج رتبه‌بندی با روش مقاله حاضر با دو روش دیگر کاملاً مطابقت دارد.



شکل ۱. فلوچارت روش رتبه‌بندی پیشنهادی

جدول ۱- داده‌های مربوط به مثال عددی

DMU	ورودی	خروجی
A	(۱, ۵, ۲, ۲, ۵)	(۰, ۷, ۱, ۱, ۳)
B	(۲, ۵, ۳, ۳, ۵)	(۲, ۳, ۳, ۳, ۷)
C	(۲, ۴, ۳, ۳, ۶)	(۱, ۶, ۲, ۲, ۴)
D	(۴, ۵, ۶)	(۳, ۴, ۵)
E	(۴, ۵, ۵, ۵, ۵)	(۱, ۸, ۲, ۲, ۲)

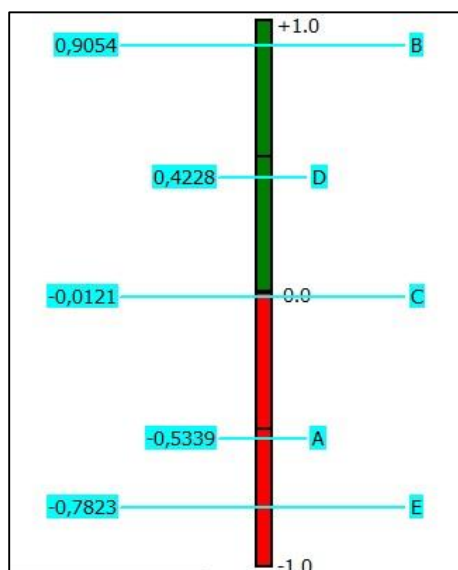
جدول ۲- کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال عددی

DMU	($\theta^l, \theta^m, \theta^u$)
A	(۰, ۱۸۹۲, ۰, ۳۳۷۸, ۰, ۵۸۵۶)
B	(۰, ۴۴۴۰, ۰, ۶۷۵۷, ۱)
C	(۰, ۳۰۰۳, ۰, ۴۵۰۵, ۰, ۶۷۵۷)
D	(۰, ۳۳۷۸, ۰, ۵۴۰۵, ۰, ۸۴۴۶)
E	(۰, ۲۲۱۱, ۰, ۲۷۰۳, ۰, ۳۳۰۳)

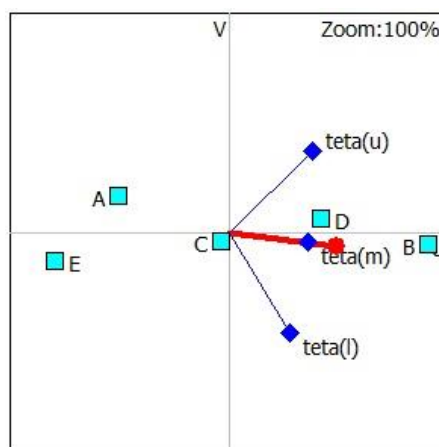
۲.۴. مثال کاربردی

مثال کاربردی ارائه شده در این بخش برگرفته از مقاله ابراهیمی و همکاران [۲۰] می‌باشد. داده‌های این مثال مربوط به ۶۰ شعبه از شعبه‌های بانک سامان با ۳ ورودی (تعداد کارمندان، نسبت کل وام-ها به کل سپرده‌ها، کل هزینه‌های جاری) و ۲ خروجی (سپرده‌های موثر، مطالبات معوق به کل وام‌ها) است. مقادیر تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها همانند مثال قبل اعداد فازی مثلثی هستند. کران پایین، مقدار میانی و کران بالای کارایی از حل مدل‌های (۷)، (۸) و (۹) محاسبه می‌شود. حل مدل‌ها توسط نرم افزار GAMS انجام می‌شود. اندازه کارایی ۶۰ شعبه بانک به صورت اعداد فازی مثلثی در جدول ۴ قابل مشاهده است.

اکنون با استفاده از روش پرومیتی II و با در نظر گرفتن اندازه‌های کارایی به دست آمده در جدول ۴ به عنوان معیارهای تصمیم‌گیری، به رتبه‌بندی شعبات بانک می‌پردازیم. همانند مثال اول وزن کران‌های پایین و بالای کارایی را ۱ و وزن اندازه میانی کارایی را ۴ در نظر می‌گیریم. تابع ارجحیت نیز از نوع V شکل با آستانه ارجحیت ۰/۲ و فاقد آستانه بی تفاوتی انتخاب شده است. در جدول ۵ جریان رتبه‌بندی خالص واحدها که مبنای رتبه‌بندی آنها در مقاله حاضر می‌باشد ارائه شده است. در جدول ۶ نیز علاوه بر رتبه‌بندی شعبات با روش ارائه شده در این مقاله، از دو روش رتبه‌بندی دیگر نیز استفاده شده است که مبنای مقایسه نتایج به دست آمده را فراهم می‌سازد. همان طور که در جدول ۶ مشاهده می‌کنید، رتبه‌بندی شعبه‌های ۴۴، ۴۵، ۵۶، ۵۸ و ۶۰ در هر سه روش یکسان است. علاوه بر این نتایج رتبه‌بندی روش ارائه شده در این مقاله با نتایج رتبه‌بندی با معیار $r = \frac{\theta^l + 4\theta^m + \theta^u}{6}$ برای ۴۲ شعبه کاملاً با یکدیگر مطابقت دارد. برای سایر شعبات نیز این دو روش نتایج بسیار نزدیکی به یکدیگر دارند. در مقایسه



شکل ۲. جریان خالص رتبه‌بندی واحدها در مثال عددی



شکل ۳. صفحه GAIA مثال عددی

جدول ۳- رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال عددی

DMU	رتبه بندی روش مقاله حاضر	رتبه بندی روش ارائه شده در [۲۶]	رتبه بندی بر اساس
			$r = \frac{\theta^l + 4\theta^m + \theta^u}{6}$
A	۴	۴	۴
B	۱	۱	۱
C	۳	۳	۳
D	۲	۲	۲
E	۵	۵	۵

دارد در حالی که در مقایسه با روش رتبه‌بندی در [۲۰] تفاوت‌های بیشتری به چشم می‌خورد. البته وجود تفاوت در نتایج رتبه‌بندی، دلیلی بر وجود نقص در هیچ یک از روش‌های رتبه‌بندی نمی‌باشد، همانطور که در بسیاری از مقالاتی که تاکنون در زمینه رتبه‌بندی ارائه شده، این موضوع مورد تاکید قرار گرفته است.

نتایج مقاله پیش رو و [۲۰] علی‌رغم تفاوت زیاد در رتبه‌بندی شعبه‌هایی همچون شعبه ۱، ۵، ۱۵، ۱۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۴۱، ۴۷، شعبه‌های ۲۲، ۲۴، ۲۸، ۳۲، ۳۳، ۳۷، ۴۰، ۴۳، ۴۶، ۴۸، ۴۹ و ۵۰ و ... نتایج رتبه‌بندی بسیار نزدیکی دارند. در هر حال آنچه که واضح می‌باشد آن است که روش رتبه‌بندی ارائه شده در این مقاله در تمامی شعبه‌ها نتایج نزدیکی به نتایج رتبه‌بندی با معیار

$$r = \frac{\theta^l + 4\theta^m + \theta^u}{6}$$

جدول ۴- کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال کاربردی

DMU	θ^l	θ^m	θ^u
۱	۰,۶۶۱۲	۰,۸۷۸۱	۱,۰۰۰۰
۲	۰,۱۹۹۴	۰,۲۳۹۳	۰,۳۸۰۷
۳	۰,۲۳۵۴	۰,۶۰۰۴	۰,۷۰۸۲
۴	۰,۱۴۵۰	۰,۱۸۵۱	۰,۳۰۰۴
۵	۰,۳۱۱۱	۰,۳۵۱۶	۰,۵۷۲۵
۶	۰,۲۳۹۳	۰,۳۶۷۸	۰,۴۹۰۲
۷	۰,۱۷۲۵	۰,۲۰۲۵	۰,۲۹۰۰
۸	۰,۱۴۳۳	۰,۲۱۹۳	۰,۲۸۸۷
۹	۰,۲۶۶۴	۰,۳۸۹۳	۰,۵۳۸۳
۱۰	۰,۱۵۷۶	۰,۲۶۲۷	۰,۳۵۶۹
۱۱	۰,۱۸۰۶	۰,۲۰۲۰	۰,۲۹۲۹
۱۲	۰,۱۲۶۱	۰,۲۲۲۷	۰,۳۲۴۹
۱۳	۰,۱۸۷۸	۰,۳۳۷۲	۰,۵۱۹۶
۱۴	۰,۱۸۷۴	۰,۳۵۰۸	۰,۵۳۵۷
۱۵	۰,۲۷۴۷	۰,۵۱۵۵	۰,۶۶۱۹
۱۶	۰,۱۷۶۵	۰,۲۸۵۲	۰,۳۳۰۸
۱۷	۰,۱۸۰۱	۰,۲۵۷۴	۰,۳۳۷۴
۱۸	۰,۲۶۹۷	۰,۳۶۶۸	۰,۵۰۶۳
۱۹	۰,۴۵۷۳	۰,۶۷۲۴	۰,۸۷۲۵
۲۰	۰,۳۰۹۱	۰,۳۸۵۳	۰,۴۸۶۹
۲۱	۰,۳۴۹۱	۰,۴۱۷۵	۰,۵۸۸۲
۲۲	۰,۵۵۲۱	۰,۹۳۱۷	۱,۰۰۰۰

DMU	θ^l	θ^m	θ^u
۳۱	۰,۲۹۴۱	۰,۵۲۱۸	۰,۶۱۱۹
۳۲	۰,۱۶۴۲	۰,۳۰۴۵	۰,۴۶۵۴
۳۳	۰,۳۳۹۱	۰,۴۶۸۵	۰,۶۹۰۳
۳۴	۰,۲۲۵۰	۰,۳۹۰۵	۰,۵۷۹۳
۳۵	۰,۲۱۶۸	۰,۲۵۹۵	۰,۳۹۱۵
۳۶	۰,۱۴۲۲	۰,۲۹۵۰	۰,۴۸۵۷
۳۷	۰,۴۶۱۲	۰,۶۴۹۱	۰,۷۹۹۵
۳۸	۰,۱۸۳۷	۰,۲۴۱۹	۰,۳۱۱۸
۳۹	۰,۳۶۷۷	۰,۴۶۷۴	۰,۶۴۳۸
۴۰	۰,۱۱۸۵	۰,۱۷۱۷	۰,۲۴۴۶
۴۱	۰,۲۹۲۴	۰,۴۱۵۹	۰,۵۳۴۹
۴۲	۰,۲۲۹۸	۰,۳۹۷۱	۰,۵۲۱۲
۴۳	۰,۴۲۱۰	۰,۸۵۹۳	۱,۰۰۰۰
۴۴	۰,۲۴۲۸	۰,۴۰۵۵	۰,۶۰۱۵
۴۵	۰,۰۹۳۶	۰,۱۶۶۴	۰,۲۵۰۲
۴۶	۰,۴۲۴۳	۰,۶۶۴۴	۱,۰۰۰۰
۴۷	۰,۱۶۱۵	۰,۳۸۶۱	۰,۶۶۶۱
۴۸	۰,۱۸۱۵	۰,۴۰۳۱	۰,۶۰۴۴
۴۹	۰,۳۶۷۷	۰,۸۱۰۷	۱,۰۰۰۰
۵۰	۰,۱۲۲۳	۰,۲۰۷۸	۰,۳۰۱۸
۵۱	۰,۱۳۸۷	۰,۲۶۸۴	۰,۴۱۱۲
۵۲	۰,۱۳۱۴	۰,۲۷۲۷	۰,۴۲۴۲

۲۳	۰,۲۶۳۳	۰,۴۸۹۲	۱,۰۰۰۰	۵۳	۰,۲۷۷۹	۰,۵۱۵۶	۰,۷۱۰۴
۲۴	۰,۳۳۳۶	۰,۷۸۰۵	۱,۰۰۰۰	۵۴	۰,۲۹۴۱	۰,۴۸۱۰	۰,۶۳۰۸
۲۵	۰,۴۰۹۰	۰,۵۶۸۹	۰,۶۵۵۷	۵۵	۰,۱۹۸۴	۰,۲۲۹۵	۰,۳۰۶۱
۲۶	۰,۱۹۷۳	۰,۳۳۷۱	۰,۴۶۳۶	۵۶	۰,۲۲۵۵	۰,۴۸۱۵	۰,۶۱۰۳
۲۷	۰,۲۰۷۵	۰,۳۴۸۷	۰,۵۲۳۱	۵۷	۰,۳۳۵۳	۰,۵۷۷۴	۰,۸۰۲۲
۲۸	۰,۳۲۸۹	۰,۵۷۴۲	۰,۸۲۷۹	۵۸	۰,۰۵۸۸	۰,۱۴۱۹	۰,۲۹۹۴
۲۹	۰,۲۴۴۶	۰,۴۵۲۰	۰,۶۸۰۳	۵۹	۰,۲۰۱۷	۰,۳۵۷۰	۰,۵۷۹۵
۳۰	۰,۳۵۶۷	۰,۵۱۵۹	۰,۷۴۸۵	۶۰	۰,۰۵۸۰	۰,۱۰۲۱	۰,۱۸۱۱

جدول ۵- جریان خالص و رتبه‌بندی شعبات در مثال کاربردی

DMU	ϕ	rank	DMU	ϕ	Rank	DMU	ϕ	rank
۱	۰/۹۴۲۵	۲	۲۱	۰/۱۷۹۱	۲۳	۴۱	۰/۱۰۷۱	۲۴
۲	-۰/۴۸۶۳	۴۸	۲۲	۰/۹۴۸۲	۱	۴۲	۰/۰۰۳۰	۳۰
۳	۰/۴۹۶۰	۱۲	۲۳	۰/۳۹۸۸	۱۴	۴۳	۰/۸۹۰۱	۳
۴	-۰/۶۶۸۳	۵۶	۲۴	۰/۸۰۳۰	۵	۴۴	۰/۰۷۳۷	۲۵
۵	-۰/۰۲۶۲	۳۲	۲۵	۰/۵۵۱۰	۱۱	۴۵	-۰/۷۴۶۶	۵۸
۶	-۰/۰۸۲۶	۳۴	۲۶	-۰/۲۱۰۴	۳۹	۴۶	۰/۷۶۶۸	۶
۷	-۰/۶۱۹۹	۵۴	۲۷	-۰/۱۳۹۲	۳۶	۴۷	-۰/۰۰۸۲	۳۱
۸	-۰/۶۰۷۰	۵۲	۲۸	۰/۵۷۰۴	۱۰	۴۸	۰/۰۲۲۰	۲۶
۹	۰/۰۲۰۲	۲۷	۲۹	۰/۲۲۱۴	۲۲	۴۹	۰/۸۴۰۸	۴
۱۰	-۰/۴۷۷۰	۴۶	۳۰	۰/۴۶۴۲	۱۳	۵۰	-۰/۶۴۰۱	۵۵
۱۱	-۰/۶۱۳۸	۵۳	۳۱	۰/۳۷۲۰	۱۶	۵۱	-۰/۴۵۲۲	۴۵
۱۲	-۰/۵۹۸۵	۵۱	۳۲	-۰/۳۱۷۷	۴۰	۵۲	-۰/۴۴۰۲	۴۴
۱۳	-۰/۱۸۵۹	۳۸	۳۳	۰/۳۳۵۱	۱۸	۵۳	۰/۳۹۱۳	۱۵
۱۴	-۰/۱۴۲۴	۳۷	۳۴	۰/۰۱۰۴	۲۹	۵۴	۰/۳۰۰۰	۲۰

۱۵	۰/۳۶۷۸	۱۷	۳۵	-۰/۴۲۴۲	۴۳	۵۵	-۰/۵۳۸۹	۵۰
۱۶	-۰/۴۲۲۳	۴۲	۳۶	-۰/۳۴۴۹	۴۱	۵۶	۰/۲۳۷۳	۲۱
۱۷	-۰/۴۸۰۶	۴۷	۳۷	۰/۷۲۱۵	۸	۵۷	۰/۵۷۱۸	۹
۱۸	-۰/۰۵۲۲	۳۳	۳۸	-۰/۵۲۱۳	۴۹	۵۸	-۰/۷۸۵۹	۵۹
۱۹	۰/۷۶۴۹	۷	۳۹	۰/۳۳۰۸	۱۹	۵۹	-۰/۰۹۴۴	۳۵
۲۰	۰/۰۱۶۲	۲۸	۴۰	-۰/۷۲۴۲	۵۷	۶۰	-۰/۸۶۶۰	۶۰

جدول ۶- مقایسه رتبه‌بندی شعبات در مثال کاربردی

DMU	رتبه بندی مقاله حاضر	رتبه بندی روش ارزیابی شده در [۲۰]	رتبه بندی بر اساس $r = \frac{\theta^i + 4\theta^m + \theta^n}{6}$	DMU	رتبه بندی مقاله حاضر	رتبه بندی روش ارزیابی شده در [۲۰]	رتبه بندی بر اساس $r = \frac{\theta^i + 4\theta^m + \theta^n}{6}$
۱	۲	۱۴	۲	۳۱	۱۶	۱۹	۱۷
۲	۴۸	۴۱	۴۸	۳۲	۴۰	۴۲	۴۰
۳	۱۲	۱۵	۱۱	۳۳	۱۸	۲۰	۱۸
۴	۵۶	۵۲	۵۶	۳۴	۲۹	۲۲	۲۸
۵	۳۲	۱۶	۳۲	۳۵	۴۳	۳۸	۴۴
۶	۳۴	۴۷	۳۵	۳۶	۴۱	۳۵	۴۱
۷	۵۴	۴۶	۵۴	۳۷	۸	۱۰	۸
۸	۵۲	۵۷	۵۲	۳۸	۴۹	۴۳	۴۹
۹	۲۷	۱۳	۲۹	۳۹	۱۹	۵	۱۹
۱۰	۴۶	۴۹	۴۶	۴۰	۵۷	۵۵	۵۷
۱۱	۵۳	۴۵	۵۳	۴۱	۲۴	۸	۲۴
۱۲	۵۱	۴۸	۵۱	۴۲	۳۰	۲۷	۳۰
۱۳	۳۸	۳۳	۳۸	۴۳	۳	۱	۳
۱۴	۳۷	۳۰	۳۶	۴۴	۲۵	۲۵	۲۵
۱۵	۱۷	۴۰	۱۶	۴۵	۵۸	۵۸	۵۸
۱۶	۴۲	۵۶	۴۲	۴۶	۶	۴	۶
۱۷	۴۷	۴۴	۴۷	۴۷	۳۱	۱۷	۲۷
۱۸	۳۳	۲۸	۳۳	۴۸	۲۶	۲۴	۲۶
۱۹	۷	۳۱	۷	۴۹	۴	۶	۴

۲۰	۲۸	۳۴	۳۱	۵۰	۵۵	۵۴	۵۵
۲۱	۲۳	۳۹	۲۳	۵۱	۴۵	۳۶	۴۵
۲۲	۱	۲	۱	۵۲	۴۴	۵۱	۴۳
۲۳	۱۴	۲۹	۱۳	۵۳	۱۵	۱۱	۱۵
۲۴	۵	۷	۵	۵۴	۲۰	۹	۲۰
۲۵	۱۱	۲۶	۱۲	۵۵	۵۰	۵۳	۵۰
۲۶	۳۹	۳۲	۳۹	۵۶	۲۱	۲۱	۲۱
۲۷	۳۶	۵۰	۳۷	۵۷	۹	۳	۱۰
۲۸	۱۰	۱۲	۹	۵۸	۵۹	۵۹	۵۹
۲۹	۲۲	۱۸	۲۲	۵۹	۳۵	۲۳	۳۴
۳۰	۱۳	۳۷	۱۴	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰

می‌باشد. نتایج رتبه‌بندی مقاله ایشان و مقاله حاضر کاملاً با یکدیگر مطابقت دارند. داده‌های مثال کاربردی نیز مستخرج از مقاله ابراهیمی و همکاران [۲۰] مربوط به ۶۰ شعبه از شعبه‌های بانک سامان می‌باشد. نتایج رتبه‌بندی مقاله ایشان با مقاله حاضر در بعضی از واحدها نتایج نزدیک و در بعضی از واحدها نتایج متفاوت دارد. البته تفاوت در نتایج روش‌های رتبه‌بندی نقصی در هیچ یک از روش‌ها برشمرده نمی‌شود. تعمیم روش ارائه شده برای ورودی‌ها و خروجی‌های بازه‌ای، استفاده از انواع دیگر پرومته به جای پرومته II و یا استفاده از سایر روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره به جای پرومته می‌تواند پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی در این زمینه باشد.

۵. نتیجه‌گیری

این مقاله به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی می‌پردازد. روش ارائه شده بر اساس ترکیبی از تحلیل پوششی داده‌های فازی و روش تصمیم‌گیری چندمعیاره پرومته II می‌باشد. این روش به این صورت عمل می‌کند که در مرحله اول با استفاده از مدل ارائه شده توسط وانگ و همکاران [۳۶] یک اندازه کارایی فازی مثلثی (شامل کران پایین کارایی، اندازه میانی کارایی و کران بالای کارایی) به دست می‌آید. در مرحله بعدی با در نظر گرفتن کارایی‌های به دست آمده به عنوان معیارها و در نظر گرفتن واحدهای تصمیم‌گیرنده به عنوان گزینه‌ها، با به کار گرفتن پرومته II می‌توان واحدها را رتبه‌بندی کرد. مزیت روش رتبه‌بندی مقاله حاضر این است که علاوه بر استفاده هم‌زمان از تحلیل پوششی داده‌ها و پرومته II، برای واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی به کار برده می‌شود. با توجه به این که امروزه در مسایل جهان واقعی، استفاده از داده‌های نادقیق امری اجتناب‌ناپذیر است، این مزیت کمی نیست. همچنین روش ارائه شده برای دو مثال به کار برده شده است. داده‌های مثال عددی برگرفته از مقاله جهان‌شاهلو و همکاران [۲۶]

context, *European Journal of Operational Research* ۱۴۰, (۲۰۰۲), ۲۴۹-۲۶۵.

[۸] Andersen P and Petersen N C. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science* ۳۹, (۱۹۹۳), ۱۲۶۱-۱۲۶۴.

[۹] Arana-Jiménez, M.; Sánchez-Gil, M.C.; Lozano, S., "Efficiency Assessment and Target Setting Using a Fully Fuzzy DEA Approach". *Int. J. Fuzzy Syst.* ۲۲۴, (۲۰۲۰), ۱۰۵۶-۱۰۷۲.

[۱۰] Atanassov, K. T., "Intuitionistic fuzzy sets, fuzzy sets and systems", ۲۰ (۱), (۱۹۸۶), ۸۷-۹۶.

[۱۱] Bagherikahvarin, M., & De Smet, Y. A ranking method based on DEA and PROMETHEE II (a rank based on DEA & PR. II). *Measurement*, ۸۹, (۲۰۱۶), ۳۳۳-۳۴۲.

[۱۲] Bagherikahvarin, M., "A DEA-PROMETHEE approach for complete ranking of units", *Int. J. Operational Research*, Vol. ۳۵ No. ۲, (۲۰۱۹), pp ۲۲۴ - ۲۴۴.

[۱۳] Banker RD, Charnes A and Cooper W W. Some model for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, *Manage. Sci.* ۳۰, (۱۹۸۴), ۱۰۷۸-۱۰۹۲.

[۱۴] Brans, J.P. L'ingénierie de la décision;

Elaboration d'instruments d'aide à la décision.

La méthode PROMETHEE, In Nadeau R. and

Landry M. (Eds.), *Presses del'Université Laval, Québec, Canada*, (۱۹۸۲) pp. ۱۸۳-۲۱۴.

[۱۵] Brans, J. P., and Vincke, Ph., "A preference ranking organization method (PROMETHEE method for

فهرست منابع

[۱] اسلامی نسب زینب ، حمزه ای علی. " یک مدل رتبه بندی جدید برای مسائل تصمیم گیری گروهی چند شاخصه با داده های فازی شهودی"، پژوهش های نوین در ریاضی ، (۱۴۰۰) ، سال ۷، شماره ۳۱ ، ص ۱۴۹-۱۳۳.

[۲] امینی امیر، علی نژاد علیرضا.. "ارایه یک مدل ترکیبی از DEA دومرحله ای و PROMETHEE در محیط خاکستری جهت ارزیابی عملکرد"، پژوهش های نوین در ریاضی ، (۱۳۹۹)، سال ششم، شماره ۲۸، ص ۸۳.

[۳] ایزدی سمیه ، الهویرنلو توفیق. " یک روش ماتریسی جهت برآورد ضرایب رگرسیون خطی مبتنی بر اعداد-زاده "، پژوهش های نوین در ریاضی ، (۱۳۹۷). سال ۴، شماره ۱۶، ص ۱۶-۵.

[۴] ایزدی خواه محمد، شمسی محدثه. " رتبه بندی اعتباری مشتریان حقوقی بانک با استفاده از مدل راسل اصلاح شده بهبود یافته (مطالعه موردی: مشتریان حقوقی بانک ملی شهر اراک)", پژوهش های نوین در ریاضی ، (۱۳۹۸). سال ۵، شماره ۲۲ ، ص ۱۱۱-۱۲۵.

[۵] جواهریان نفیسه ، حمزه ای علی، صیادی توارنلو حسین، سلیمانی دامنه رضا . " ارزیابی کارایی مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله ای مبتنی بر اعداد فازی شهودی مثلثی و متغیرهای کمکی "، پژوهش های نوین در ریاضی، (۱۴۰۰)، سال ۷، شماره ۳۴، ص ۳۳.

[۶] Akram, M, Shah, S.M.U, Shamiri, M.M.A. Al ,and Edalatpanah, S.A, "Extended DEA method for solving multi- objective transportation problem with Fermatean fuzzy sets", *AIMS Mathematics*, (۲۰۲۳), ۸(۱), ۹۲۴-۹۶۱.

[۷] Alder N, Fridman L and Sinuany-Stern Z , "Review of ranking methods in the data envelopment analysis

- [۲۴] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Shoja, N., Tohidi, G. and Razavyan, S., Ranking using 1-norm in Data Envelopment Analysis, *Applied Mathematics and Computation*, ۱۵۳, (۲۰۰۴), ۲۱۵-۲۲۶.
- [۲۵] Jahanshahloo G R, Hosseinzadeh Lotfi F, Zhiani Rezai H and Rezai Balf F. ,Using Monte Carlo Method for ranking efficient DMUs, *Applied Mathematics and Computation* ۱۶۲, (۲۰۰۵), ۳۷۱-۳۷۹.
- [۲۶] Jahanshahloo, G. R., Soleimani-damaneh, M. and Nasrabadi, E., Measure of efficiency in DEA with fuzzy input output levels: A methodology for assessing, ranking and imposing of weights restrictions, *Applied Mathematics and Computation*, ۱۵۶ (۲۰۰۴), ۱۷۵-۱۸۷.
- [۲۷] Mahapatra. G., Roy. T., Reliability evaluation using triangular intuitionistic fuzzy numbers arithmetic operations, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, ۵۰ (۲۰۰۹), ۵۷۴-۵۸۱.
- [۲۸] Peykani, P., Mohammadi, E. and Emrouznejad, A., An adjustable fuzzy chance-constrained network DEA approach with application to ranking investment firms, *Expert Systems with Applications*, Vol. ۱۶۶, (۲۰۲۱), ۱۱۳۹۳۸.
- [۲۹] Polat, G., Damci, A., Gurgun, A. P., & Demirli, I., Urban Renewal Project Selection Using the Integration of AHP and PROMETHEE Approaches. *Procedia Engineering*, ۱۶۴, (۲۰۱۶), ۳۳۹-۳۴۶.
- [۳۰] Rahmani, A, Rostamy-Malkhalifeh, M, Hosseinzadeh Lotfi, F, Allahviranloo, T. Interval model for calculating prospect cross efficiency MCDM), *Manag. Sci.*, Vol. ۳۱ (۱۹۸۵), pp. ۶۴۷-۶۵۶.
- [۱۶] Brans, J. P., & De Smet, Y. PROMETHEE methods. In *Multiple criteria decision analysis*. (۲۰۱۶), (pp. ۱۸۷-۲۱۹). Springer, New York, NY.
- [۱۷] Charnes .A., Cooper .W. W., Rhodes. E , Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, ۲ (۶), (۱۹۷۸), ۴۲۹-۴۴۴.
- [۱۸] Chen Y. Ranking efficient units in DEA, *Omega*. ۳۲, (۲۰۰۴), ۲۱۳-۲۱۹.
- [۱۹] Chen, T. Y., A novel PROMETHEE-based outranking approach for multiple criteria decision analysis with Pythagorean fuzzy information. *Ieee Access*, ۶, (۲۰۱۸), ۵۴۴۹۵-۵۴۵۰۶.
- [۲۰] Ebrahimia. M.R., Garamib. J., Mozafari. M.R. Ranking and evaluating bank branches using fuzzy data envelopment analysis (case study: Samanbank branches). *Scientifi Journal of Review* ,۳(۱۰), (۲۰۱۴), ۹۴۹-۹۶۴.
- [۲۱] Farrell MJ The measurement of productive efficiency.. *J R Stat Soc Ser A-G* ۱۲۰(III): (۱۹۵۷). ۲۵۳-۲۸۱.
- [۲۲] Heidary Dahooie, J.; Estiri, M; Zavadskas, E; Xu,Z. “A Novel Hybrid Fuzzy DEA-Fuzzy ARAS Method for Prioritizing High-Performance Innovation-Oriented Human Resource Practices in High Tech SME’s”. *Int. J. Fuzzy Syst.* ۲۴, (۲۰۲۲), pages ۸۸۳-۹۰۸.
- [۲۳] Izadikhah, M., R. Roostae and A. Emrouznejad .Fuzzy Data Envelopment Analysis with Ordinal and Interval Data, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, ۲۹ (۳): (۲۰۲۱), ۳۸۵-۴۰۹.

- of manufacturing enterprises. *Expert Systems with Applications* ۳۶, (۲۰۰۹), pp. ۵۲۰۵-۵۲۱۱.
- [۳۷] Wen, M. and Li, H., (۱۹۶۵), Fuzzy data envelopment analysis (DEA): Model and ranking method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. ۲۲۳(۲) (۲۰۰۹), pp. ۸۷۲-۸۷۸.
- [۳۸] Wu, Y., Zhang, B., Wu, C., Zhang, T., & Liu, F, Optimal site selection for parabolic trough concentrating solar power plant using extended PROMETHEE method: A case in China *Renewable Energy*, ۱۴۳, (۲۰۱۹), ۱۹۱۰-۱۹۲۷.
- [۳۹] Wu, Y., Zhang, T., & Yi, L. An Internal Type-۲ Trapezoidal Fuzzy Sets-PROMETHEE-II based Investment Decision Framework of Compressed Air Energy Storage Project in China under the Perspective of Different Investors. *Journal of Energy Storage* ۳۰(January), (۲۰۲۰), ۱۰۱۵-۱۵۴۸.
- [۴۰] Zadeh, L. A., "Fuzzy Sets," *Information and Control*, Vol. ۸, (۱۹۵۶) pp. ۳۳۸-۳۵۳.
- of data envelopment analysis and providing a solution for its expansion in fuzzy model. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, (۲۰۲۱), Volume ۱۲, Special Issue, ۲۴۷۵-۲۴۹۱.
- [۳۱] Rahmani, A., Rostamy-malkhalifeh, M. and Hosseinzadeh Lotfi, F, Evaluating performance of Two-Step Networks Using Fuzzy Data Envelopment Analysis, *Revista Gestão & Tecnologia*, Pedro Leopoldo, v. ۲۰, ed. especial, (۲۰۲۰), p. ۹۶-۱۰۵.
- [۳۲] Rezai Balf F, Zhiani Rezai H, Jahanshahloo G R and Hosseinzadeh Lotfi F., Ranking efficient DMUs using the Tchebycheff norm. *Applied Mathematical Modelling* ۲۶: (۲۰۱۲), ۴۶-۵۶.
- [۳۳] Sanches, A. M., Loures, de F. R. E., & de Lima, E. P., Use of PROMETHEE method for decision making in bus fleet maintenance proposal of framework. *Procedia Manufacturing*, ۳۹, (۲۰۱۹), ۱۹۱۳-۱۹۲۰.
- [۳۴] Sexton, T.R., Silkman, R.H. and Hogan, A.J., *Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions*, Volume ۱۹۸۶, Issue ۳۲. In: Silkman, R.H., Ed., *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*, Jossey-Bass, San Francisco, CA, (۱۹۸۶), ۷۳-۱۰۵.
- [۳۵] Soleimani-Chamkhorami, Kh., Hosseinzadeh Lotfi F., Jahanshahloo G R., Rostamy Malkhalifeh, M., A ranking system based on inverse data envelopment analysis *IMA Journal of Management Mathematics*, ۰۰, (۲۰۱۹), ۱-۱۹.
- [۳۶] Wang Y. -M., Luo Y. and Liang L., Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment