دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: 588X-۲۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

عملگرهای مشتق-ترکیبی وزن‌دار نرمال

محبوبه مرادی[۱]، مهسا فاتحی[۲]*

[۱و۲] گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۰۷

چکیده

در این مقاله، ابتدا به بررسی عملگرهای مشتق-ترکیبی وزن‌دار نرمال روی فضای H^2 پرداخته و در حالتی که $\varphi(0) = 0$ باشد، عملگرهای مشتق-ترکیبی وزن‌دار نرمال $D_{\psi,\varphi,n}$ را بطور کامل مشخص می‌کنیم. در ادامه در حالتی که $\varphi(0) \neq 0$ باشد، دسته‌ای از عملگرهای مشتق-ترکیبی وزن‌دار نرمال را می‌یابیم.

واژه‌های کلیدی: عملگر ترکیبی، عملگر مشتق-ترکیبی وزن‌دار، نرمال.

*عهده‌دار مکاتبات
Email: fatehimahsa@yahoo.com

۱- مقدمه و پیشینه تحقیق

فرض کنید $\mathbb{D}$ قرص یکه باز در صفحه اعداد مختلط باشد. فضای هاردی H^2، فضایی هیلبرت شامل تمام توابع تحلیلی $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ روی $\mathbb{D}$ می‌باشد به قسمی که

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2} < \infty .$$

برای هر دو عضو $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ متعلق به H^2، ضرب داخلی آنها بصورت

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

تعریف میشود. به ازای هر w متعلق به $\mathbb{D}$ و هر عدد طبیعی n، تابع مولد هسته مرتبه nام بصورت

$$K_w^{(n)}(z) = \frac{n! z^n}{(1-\overline{w}z)^{n+1}}$$

می باشد که به ازای هر $f \epsilon H^2$،

$$\left\langle f,\ K_w^{(n)}\right\rangle = f^{(n)}(w).$$

توجه داشته باشید که به ازای هر w متعلق به $\mathbb{D}$ و هر عدد صحیح نامنفی n، نرم $K_w^{(n)}$ بصورت زیر می‌باشد

$$\left\|K_w^{(n)}\right\|^2 = \sum_{j=n}^{\infty}|w|^{2j-2n}\left(\frac{j!}{(j-n)!}\right)^2 .$$

در حالت $n = 0$، تابع مولد هسته را به فرم K_w نشان می‌دهند.

فضای H^∞ را فضای همه توابع تحلیلی کراندار روی $\mathbb{D}$ تعریف می‌کنیم به طوری که نرم آن بصورت

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(z)|: z \in D\}$$

تعریف می‌شود. برای یافتن اطلاعات بیشتر در این زمینه می توان به مرجع [1] رجوع کرد.

برای هر نگاشت تحلیلی φ از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$، عملگر ترکیبی C_φ، به ازای هر $f \epsilon H^2$ به فرم $C_\varphi(f) = f_\circ\varphi$ تعریف می‌شود. عملگرهای ترکیبی روی H^2 کراندار هستند [1].

اگر چه به سادگی دیده می‌شود که عملگر مشتق $D(f) = f'$ روی H^2 کراندار نیست، عملگرهایی به فرم DC_φ یا $C_\varphi D$ وجود دارند که این عملگرها کراندارند. ما عملگرهای کراندار $C_\varphi D$ را با D_φ نمایش می‌دهیم. به وضوح این عملگر روی H^2 بصورت $D_\varphi(f) = f'{}_\circ\varphi$ تعریف می‌شود.

برای هر تابع تحلیلی φ از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ و هر تابع تحلیلی ψ روی $\mathbb{D}$ (ضرورتی ندارد که تابع ψ متعلق به H^∞ باشد)، عملگر مشتق-ترکیبی وزن‌دار $D_{\psi,\varphi}$ روی فضای H^2 بصورت $D_{\psi,\varphi}(f) = \psi.(f'{}_\circ\varphi)$ تعریف می‌شود. در حالتی که $\psi \epsilon H^\infty$ و $\|\varphi\|_\infty < 1$، عملگر $D_{\psi,\varphi}$ روی H^2 کراندار است (قضیه 1.3 از مرجع [4]).

برای هر تابع تحلیلی φ از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$، هر تابع تحلیلی ψ روی $\mathbb{D}$ و هر عدد طبیعی n، عملگر مشتق-ترکیبی وزن‌دار مرتبه nام روی فضای H^2 بصورت

$$D_{\psi,\varphi,n}(f) = \psi.(f^{(n)}{}_\circ\varphi)$$

تعریف می‌شود [4, 5].

عملگر کراندار T را خوالحاق می‌گوییم اگر T=T^*. همچنین عملگر کراندار T را نرمال گوییم هرگاه $TT^* = T^*T$.

در سال ۲۰۰۶ اهنو [4] به بررسی کرانداری و فشردگی عملگر D_φ روی فضای هاردی پرداخت. درسال 2009 استویک نیز کرانداری و فشردگی عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ را روی فضای برگمن وزن‌دار، در حالتی که $\psi \equiv 1$ بررسی کرد [5]. در [2] فاتحی و هامند به محاسبه نرم D_φ و در [3] به بررسی برخی از ویژگی‌های عملگر $D_{\psi,\varphi}$ از جمله نرمال و خودالحاق بودن، روی فضای هاردی H^2 پرداختند. در این مقاله به بررسی عملگرهای نرمال $D_{\psi,\varphi,n}$

می‌پردازیم. برخی ایده‌های بکار گرفته شده در این تحقیق برگرفته از مرجع [3] می‌باشد. در این مقاله برای جلوگیری از به وجود آمدن حالت‌های بدیهی، فرض می‌کنیم که ψ تابع صفر و φ تابع ثابت نباشند. در گزاره ۳,۲ و قضیه 4.2 خواهیم دید که اگر چه عملگر D_φ نرمال نیست، اما عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ می‌تواند نرمال باشد.

2-عملگرهای نرمال

در این بخش در ابتدا به بیان لم زیر پرداخته و پس از آن با کمک این لم به بررسی عملگرهای نرمال $D_{\psi,\varphi,n}$ خواهیم پرداخت.

لم 1.2: فرض کنید $D_{\psi,\varphi,n}$ روی فضای H^2 کراندار باشد. در این صورت داریم

$$D^*_{\psi,\varphi,n}(K_w) = \overline{\psi(w)}K^{(n)}_{\varphi(w)}.$$

اثبات: فرض کنید f عضو دلخواهی از H^2 باشد. برای هر عضو w متعلق به $\mathbb{D}$، داریم

$$\langle f, D^*_{\psi,\varphi,n}K_w\rangle = \langle D_{\psi,\varphi,n}f, K_w\rangle = \psi(w)f^{(n)}(\varphi(w)) = \left\langle f, \overline{\psi(w)}K^{(n)}_{\varphi(w)}\right\rangle.$$

بنابراین نتیجه حاصل می‌شود. □

در گزاره 2.2 به بررسی خواصی از عملگرهای نرمال $D_{\psi,\varphi,n}$ می‌پردازیم. سپس با استفاده از نتایج بدست آمده از گزاره 2.2، مطالب بعد را ثابت می‌کنیم.

گزاره 2.2: فرض کنید عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ روی فضای H^2 نرمال باشد. در این صورت خواص زیر برقرار است

۱) برای هر $0 \le m < n$، $\psi^{(m)}(0) = 0$.

۲) $\psi^{(n)}(0) \neq 0$.

3) برای هر w متعلق به $\mathbb{D}\backslash\{0\}$، $\psi(w) \neq 0$.

علاوه بر این نگاشت φ یک به یک است.

اثبات: فرض کنید عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ روی فضای H^2 نرمال باشد. با یک محاسبه ساده برای هر عضو w متعلق به $\mathbb{D}$ داریم

$$D_{\psi,\varphi,n}(K_w) = \frac{n!\,\overline{w^n}\psi}{(1-\overline{w}\varphi)^{n+1}}. \tag{1.2}$$

از طرف دیگر با توجه به لم 1.2 داریم

$$D^*_{\psi,\varphi,n}(K_w) = \overline{\psi(w)}K^{(n)}_{\varphi(w)}. \tag{۲.2}$$

از آنجا که $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است، برای هر عضو w متعلق به $\mathbb{D}$، عبارت‌های **(1.2)** و **(2.2)** دارای نرم‌های یکسان هستند. در رابطه‌های **(1.2)** و **(2.2)**، w را مساوی صفر قرار می‌دهیم. می‌بینیم که رابطه **(1.2)** صفر می‌شود.

در نتیجه $\overline{\psi(0)}K^{(n)}_{\varphi(0)} \equiv 0$. بنابراین $\psi(0)=0$. فرض کنید برای هر عدد طبیعی m که $m<n-1$، $\psi^{(m)}(0)=0$. واضح است که

$$D_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(m+1)}\right)(z) = D_{\psi,\varphi,n}\left((m+1)!\, z^{m+1}\right) = 0.$$

(3.2)

از طرف دیگر، داریم

$$\begin{aligned}\left\langle f,\ D^*_{\psi,\varphi,n}\, K_0^{(m+1)}\right\rangle &= \left\langle D_{\psi,\varphi,n} f,\ \ K_0^{(m+1)}\right\rangle \\ &= \left(\psi.\left(f^{(n)}{}_{\circ}\varphi\right)\right)^{(m+1)}(0) \\ &= \sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}\psi^{(m+1-i)}(0)\left(f^{(n)}{}_{\circ}\varphi\right)^{(i)}(0) \\ &= \psi^{(m+1)}(0) f^{(n)}\left(\varphi(0)\right) + \sum_{i=1}^{m+1}\binom{m+1}{i}\psi^{(m+1-i)}(0)\left(f^{(n)}{}_{\circ}\varphi\right)^{(i)}(0) \\ &= \psi^{(m+1)}(0) f^{(n)}\left(\varphi(0)\right) \\ &= \left\langle f,\ \overline{\psi^{(m+1)}(0)}K^{(n)}_{\varphi(0)}\right\rangle.\end{aligned}$$

(4.2)

بنابراین

$$D^*_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(m+1)}\right) = \overline{\psi^{(m+1)}(0)}K^{(n)}_{\varphi(0)}.$$

(5.2)

با توجه به رابطه‌های **(3.2)** و **(5.2)**، $\psi^{(m+1)}(0)=0$. با استفاده از اثبات مشابهی که در بدست آوردن رابطه **(4.2)** به کار رفت و با توجه به اینکه به ازای هر $m<n$، $\psi^{(m)}(0)=0$، داریم

$$D^*_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(n)}\right) = \overline{\psi^{(n)}(0)}K^{(n)}_{\varphi(0)}.$$

(6.2)

از طرفی از آنجا که

$$D_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(n)}\right) = D_{\psi,\varphi,n}(n!\, z^n) = (n!)^2\psi$$

(7.2)

و ψ مخالف صفراست، بوسیله رابطه‌های **(6.2)** و **(7.2)** می‌بینیم که $\psi^{(n)}(0) \neq 0$. حال فرض کنید $w \epsilon \mathbb{D}$ یافت می‌شود به طوریکه $\psi(w)=0$. لم 1.2 نشان می‌دهد که

$$D^*_{\psi,\varphi,n}(K_w) = 0.$$

(8.2)

با استفاده از روابط **(1.2)**، **(8.2)** و باتوجه به اینکه ψ تابع صفر نیست و $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است، نتیجه می‌گیریم که $w=0$. حال فرض کنید نقاط مجزا و غیر صفر w_1 و w_2 در $\mathbb{D}$ وجود دارند، بطوری که $\varphi(w_1)=\varphi(w_2)$. به سادگی مشخص است که هسته $D_{\psi,\varphi,n}$ مجموعه‌ای از همه چند جمله‌ای‌های با درجه‌ی کمتر از n

است و بنابراین با توجه به اینکه $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است، این خاصیت برای هسته $D^*_{\psi,\varphi,n}$ نیز برقرار است. حال با توجه به لم 1.2 داریم

$$D^*_{\psi,\varphi,n}\left(\overline{\psi(w_2)}K_{w_1}-\overline{\psi(w_1)}K_{w_2}\right)=\overline{\psi(w_1)\psi(w_2)}K^{(n)}_{\varphi(w_1)}-\overline{\psi(w_2)\psi(w_1)}K^{(n)}_{\varphi(w_2)}=0.$$

بنابراین $\overline{\psi(w_2)}K_{w_1}-\overline{\psi(w_1)}K_{w_2}$ یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از n می‌باشد. همچنین

$$\overline{\psi(w_2)}K_{w_1}-\overline{\psi(w_1)}K_{w_2}=\overline{\psi(w_2)}\sum_{j=0}^{\infty}\overline{w_1}z^j-\overline{\psi(w_1)}\sum_{j=0}^{\infty}\overline{w_2}z^j.$$

لذا

$$\overline{\psi(w_2)}\sum_{j=n}^{\infty}\overline{w_1}z^j-\overline{\psi(w_1)}\sum_{j=n}^{\infty}\overline{w_2}z^j=\cdot.$$

بنابراین به ازای هر $m\geq n$ داریم

$$\overline{\psi(w_2)}\overline{w}_1^m=\overline{\psi(w_1)}\overline{w}_2^m.$$

لذا

$$\overline{\psi(w_1)}\overline{w}_2^{n+1}=\overline{\psi(w_2)}\overline{w}_1^{n+1}=\overline{\psi(w_2)}\overline{w}_1^n\overline{w}_1=\overline{\psi(w_1)}\overline{w}_2^n\overline{w}_1.$$

پس $w_1=w_2$. به وضوح اگر w_1 یا w_2 صفر باشند، با استفاده از قضیه نگاشت باز، نقاط مجزا و ناصفر w_3 و w_4 وجود دارند که $\varphi(w_3)=\varphi(w_4)$. بنابراین φ یک به یک است. □

در گزاره زیر، در حالتی که $\varphi(0)=0$ است، عملگرهای نرمال $D_{\psi,\varphi,n}$ را به طور کامل مشخص می کنیم.

گزاره 3.2: فرض کنید عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ روی فضای H^2 کراندار و $\varphi(0)=0$ باشد. در این صورت $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است اگر و فقط اگر $\varphi(z)=bz$ و $\psi(z)=az^n$ جایی که a به $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ و b به $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ تعلق دارند.

اثبات: فرض کنید $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال باشد. در این صورت داریم

$$\left\|D_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(n)}\right)\right\|^2=\|(n!)^2\psi\|^2=(n!)^4\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\left|\psi^{(j)}(0)\right|}{j!}\right)^2.$$

(9.2)

از طرف دیگر با استفاده از رابطه **(4.2)** و گزاره 2.2 مشاهده می‌کنیم که

$$\left\|D^*_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(n)}\right)\right\|^2=\left\|\overline{\psi^{(n)}(0)}K^{(n)}_{\varphi(0)}\right\|^2=\left|\psi^{(n)}(0)\right|^2(n!)^2.$$

(10.2)

از آنجا که $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است، با تساوی روابط **(9.2)**، **(10.2)** و گزاره 2.2 داریم

$$(n!)^4\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{\left|\psi^{(j)}(0)\right|}{j!}\right)^2=\left|\psi^{(n)}(0)\right|^2(n!)^2.$$

(11.2)

با توجه به گزاره 2.2 می‌دانیم که $\psi^{(n)}(0) \neq 0$. بنابراین با استفاده از رابطه **(11.2)** نتیجه می‌گیریم که برای هر $j > n$، $\psi^{(j)}(0) = 0$. همچنین گزاره قبل نشان می‌دهد که برای هر $j < n$،

$\psi^{(j)}(0) = 0.$

لذا عدد مختلط غیرصفر a وجود دارد به طوریکه نگاشت ψ به فرم $\psi(z) = az^n$ باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} D_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(n+1)}\right)(z) &= D_{\psi,\varphi,n}\left((n+1)!\, z^{n+1}\right) \\ &= ((n+1)!)^2\psi(z)\varphi(z) = ((n+1)!)^2 az^n\varphi(z). \end{aligned}$$

(12.2)

از طرف دیگر با استفاده از روندی مشابه اثبات رابطه **(4.2)** و با توجه به اینکه برای هر $m \neq n$، $\psi^{(m)}(0) = 0$، داریم

$$\begin{aligned} D^*_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(n+1)}\right)(z) &= (n+1)\overline{\psi^{(n)}(0)\varphi'(0)}K_0^{(n+1)}(z) \\ &= \overline{a\varphi'(0)}(n+1)!\, K_0^{(n+1)}(z). \end{aligned}$$

بنابراین $K_0^{(n+1)}$ یک بردار ویژه برای $D^*_{\psi,\varphi,n}$ با مقدار ویژه متناظر $\overline{a\varphi'(0)}(n+1)!$ است. از آنجا که $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است، می‌بینیم که

$$D_{\psi,\varphi,n}\left(K_0^{(n+1)}\right)(z) = a\varphi'(0)(n+1)!\, K_0^{(n+1)}(z).$$

(13.۲)

از روابط **(12.2)** و **(13.2)** نتیجه می‌گیریم

$$((n+1)!)^2 az^n\varphi(z) = a\varphi'(0)(n+1)!\, K_0^{(n+1)}(z).$$

بنابراین $\varphi(z) = \varphi'(0)z$. از آنجا که φ تابع ثابت نیست، پس

$\varphi(z) = bz$

جایی که b متعلق به $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ می‌باشد.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $\varphi(z) = bz$ و $\psi(z) = az^n$. دقت کنید که برای هر $w \epsilon\, \mathbb{D}$، با توجه به لم 1.3 داریم

$$D^*_{az^n,bz,n}K_w(z) = \bar{a}\bar{w}^n K^{(n)}_{\varphi(w)}(z) = \frac{\bar{a}\bar{w}^n n!\, z^n}{\left(1-\overline{bw}z\right)^{n+1}}.$$

(14.2)

همچنین

$$D_{\bar{a}z^n,\bar{b}z,n}K_w(z)=\frac{\bar{a}\bar{w}^n n!\,z^n}{\left(1-\overline{bw}z\right)^{n+1}}.$$

(15.2)

از آنجا که زیر فضای تولید شده توسط K_w ها در H^2 چگال است، لذا با توجه به روابط **(14.2)** و **(15.2)** داریم

$$D^*_{az^n,bz,n}=D_{\bar{a}z^n,\bar{b}z,n}.$$

از طرفی برای هر $f\epsilon H^2$، با انجام محاسبات زیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned}D_{az^n,bz,n}D^*_{az^n,bz,n}(f)(z)&=D_{az^n,bz,n}D_{\bar{a}z^n,\bar{b}z,n}(f)(z)\\&=D_{az^n,bz,n}\left(\bar{a}z^n f^{(n)}(\bar{b}z)\right)\\&=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{z^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{i!}|\boldsymbol{b}|^{2\boldsymbol{i}}z^i f^{(n+i)}\,(|\boldsymbol{b}|^2z).\end{aligned}$$

(16.2)

بطور مشابه داریم

$$D^*_{az^n,bz,n}D_{az^n,bz,n}(f)(z)=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{z^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{i!}|\boldsymbol{b}|^{2\boldsymbol{i}}z^i f^{(n+i)}\,(|\boldsymbol{b}|^2z).$$

(17.2)

بنابراین با توجه به روابط **(16.2)** و **(17.2)**، $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است. □

در قضیه زیر در حالتی که ψ مضربی از تابع مولد هسته مرتبه‌nام و φ به فرم $\varphi(z)=c+\frac{bz}{1-\bar{c}z}$ باشد، عملگرهای نرمال $D_{\psi,\varphi,n}$ را بطور کامل مشخص می‌کنیم.

قضیه 4.2: فرض کنید $\varphi(z)=c+\frac{bz}{1-\bar{c}z}$ و $\psi(z)=\frac{az^n}{n!(1-\bar{c}z)^{n+1}}$ جایی که $a=\psi^{(n)}(0)$ و $b=\varphi'(0)$ عناصر غیر صفر مختلط هستند و $c=\varphi(0)$ عضوی از $\mathbb{D}$ می‌باشد. همچنین فرض کنید عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ روی فضای H^2 کراندار باشد. در این صورت عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است اگر و فقط اگر b عضوی از $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ یا $c=0$ باشد.

اثبات: فرض کنید $b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ یا $c=0$. اگر $c=0$ باشد با توجه به گزاره 3.2، عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ روی فضای H^2، نرمال است. اکنون فرض کنید $b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. قرار دهید $\widetilde{\psi}(z)=\frac{z^n}{n!(1-\bar{c}z)^{n+1}}$. با استفاده از لم 1.2 و محاسباتی ساده، برای هر $w\epsilon\,\mathbb{D}$ داریم

$$\begin{aligned}D^*_{\widetilde{\psi},\varphi,n}(K_w)&=\overline{\widetilde{\psi}(w)}K^{(n)}_{\varphi(w)}\\&=\frac{\overline{w^n}}{n!\,(1-c\bar{w})^{n+1}}\frac{n!\,z^n}{\left(1-\overline{\varphi(w)}z\right)^{n+1}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\overline{w^n} z^n}{\left(1 - c\overline{w} + (-\bar{c} + \overline{w}|c|^2 - \overline{wb})z\right)^{n+1}}.$$

(18.2)

از طرف دیگر

$$D_{\widetilde{\psi},\varphi,n}(K_w) = \frac{n!\,\overline{w^n}\widetilde{\psi}}{(1 - \overline{w}\varphi(z))^{n+1}} = \frac{\overline{w^n} z^n}{(1 - c\overline{w} + (-\bar{c} + \overline{w}|c|^2 - \overline{w}b)z)^{n+1}}.$$

(19.2)

با توجه به اینکه b عددی حقیقی است، با کمک روابط **(18.2)** و **(19.2)**، برای هر $w\epsilon\ \mathbb{D}$ داریم

$$D^*_{\widetilde{\psi},\varphi,n}(K_w) = D_{\widetilde{\psi},\varphi,n}(K_w).$$

از طرفی از آنجا که زیرفضای تولید شده توسط K_w ها در فضای H^2 چگال هستند، نتیجه می‌گیریم که $D_{\widetilde{\psi},\varphi,n}$ یک عملگر خودالحاق می باشد. بنابراین واضح است که عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید که $D_{\psi,\varphi,n}$ عملگری نرمال و b و c عضوی از $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ باشند.

با محاسباتی ساده داریم

$$D_{\psi,\varphi,n}\left(K_{\frac{1}{2}}\right)(z) = \frac{\psi(z)n!}{2^n\left(1 - \frac{1}{2}\varphi(z)\right)^{n+1}} = \frac{a}{2^n n!\,(1 - c/2)^{n+1}} K^{(n)}_{P_1}(z),$$

جایی که

$$P_1 = c + \frac{\bar{b}/2}{1 - \bar{c}/2}.$$

از طرف دیگر با کمک لم 1.2 داریم

$$\begin{aligned} D^*_{\psi,\varphi,n}\left(K_{\frac{1}{2}}\right)(z) &= \overline{\psi\left(\frac{1}{2}\right)} K^{(n)}_{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}(z) \\ &= \overline{\psi\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{n!\,z^n}{\left(1 - \overline{\varphi(\frac{1}{2})}z\right)^{n+1}} \\ &= \frac{\bar{a}}{2^n n!\,(1 - c/2)^{n+1}} K^{(n)}_{P_2}(z), \end{aligned}$$

جایی که

$$P_2 = c + \frac{b/2}{1-\bar{c}/2}.$$

بنابراین

$$\left\|D_{\psi,\varphi,n}\left(K_{\frac{1}{2}}\right)\right\|^2 = \left|\frac{a}{2^n n!\,(1-c/2)^{n+1}}\right|^2 \left\|K_{P_1}^{(n)}\right\|^2$$

$$= \left|\frac{a}{2^n n!\,(1-c/2)^{n+1}}\right|^2 \sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{j!\,|P_1|^{j-n}}{(j-n)!}\right)^2$$

(20.2)

و

$$\left\|D_{\psi,\varphi,n}^{*}\left(K_{\frac{1}{2}}\right)\right\|^2 = \left|\frac{\bar{a}}{2^n n!\left(1-\frac{c}{2}\right)^{n+1}}\right|^2 \left\|K_{P_2}^{(n)}\right\|^2$$

$$= \left|\frac{\bar{a}}{2^n n!\,(1-c/2)^{n+1}}\right|^2 \sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{j!\,|P_2|^{j-n}}{(j-n)!}\right)^2.$$

(21.2)

از آنجا که عملگر $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال است، با توجه به روابط **(20.2)** و **(21.2)**، $|P_1|^2 = |P_2|^2$ و به راحتی می‌توان بررسی کرد که در این صورت $\bar{c} = c$ و این تناقض است. حال فرض کنید $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. مشابه اثبات فوق می‌توان نتیجه گرفت که

$$\left\|D_{\psi,\varphi,n}\left(K_{\frac{i}{2}}\right)\right\| \neq \left\|D_{\psi,\varphi,n}^{*}\left(K_{\frac{i}{2}}\right)\right\|.$$

بنابراین $D_{\psi,\varphi,n}$ نرمال نیست و این تناقض است. □

فهرست منابع

[1] C. C. Cowen and B. D. MacCluer. Composition operators on spaces of analytic functions. CRC Press, Boca Raton. 1995.

[2] M. Fatehi and C. N. B. Hammond. Composition-differentiation operators on the Hardy space. Proc. Amer. Math. Soc. 148:2893-2900(2020).

[3] M. Fatehi and C. N. B. Hammond.
Normality and self-adjointness of weighted composition-differentiation operators. Complex Anal. Oper. Theory 15:1-13(2021).

[4] S. Ohno. Products of composition and differentiation between Hardy spaces. Bull. Aust. Math. Soc. 73:235-243(2006).

[5] S. Stević. Products of composition and differentiation operators on the weighted Bergman space. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 16:623-635 (2009).