دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک روش جهت حل معادله دیفرانسیل کسری-Z با اطمینان فازی

پریسا کشاورز[۱]، فرج اله محمدی یعقوبی[۱*]، علی برهمند[۱]

(۱) گروه ریاضی، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۸/۲۲   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۹/۱۵

چکیده

در این مقاله، در ابتدا Z-اعداد و برخی از مفاهیم اساسی مانند اعداد فازی و معادله دیفرانسیل کسری با ارزشگذاری- Z را معرفی می‌کنیم. سپس ما یک روش عددی جهت برآورد جواب معادله دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه مبتنی بر Z-اعداد با اطمینان فازی پیشنهاد می‌کنیم. مسئله شامل دو قسمت است؛ قسمت اول، محدودیت با ارزشگذاری فازی است و قسمت دوم اطمینان از قسمت اول (محدودیت) که با ارزشگذاری فازی است. روش پیشنهادی یک روش ترکیبی است که مبتنی بر روش اویلر کسری تصحیح یافته و تابع احتمال مبتنی بر تابع توزیع نمایی می‌باشد. ویژگی اصلی این رویکرد این است که تابع احتمال برای نشان دادن میزان اطمینان از بخش محدودیت مسئله بکار برده شده است. الگوریتم ارائه شده و همگرایی الگوریتم اثبات شده است. به عنوان کاربردهای نتایج اصلی، یک مثال عددی آورده شده است و بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند به طور دلخواه معادلات دیفرانسیل کسری با ارزش گذاری- Z را تقریب بزند.

واژه‌های کلیدی: Z-اعداد، معادلات دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه مبتنی بر Z-اعداد، تابع توزیع نمایی.

---

* عهده‌دار مکاتبات: Email:yaghoobi@iauh.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر شمار زیادی از مسائل علمی و مهندسی مستلزم محاسبات کسری فازی بوده‌اند. زیرا آن‌ها قادر به مدل‌سازی‌های دقیق‌تر از سیستم-های مدنظر هستند. کاربردها و محاسبات کسری فازی به وسیله نویسندگان بسیاری نشان داده شده است [۱-۴]. به عنوان مثال، محاسبات کسری فازی برای مدل‌سازی نوسانات غیرخطی در زمین لرزه‌ها، مکانیک جامدات، اقتصاد، پردازش سیگنال، تئوری کنترل و غیره به کار رفته است. فرمول‌های ریاضی بسیاری از پدیده‌های ذکر شده حاوی معادلات دیفرانسیل - انتگرال غیر خطی با درجه کسری و یا کسری فازی است. تئوری مجموعه‌های فازی روش قدرتمندی برای مدل کردن نامعینی‌ها و پردازش ابهام و اطلاعات وابسته به مدل‌های ریاضی است؛ اما برای اینکه این اطلاعات مفید باشند باید قابل اعتماد باشند. زاده موضوعی را به نام Z-عدد پیشنهاد کرد که قادر است این قابلیت اطمینان را فرمول‌بندی ریاضی کند [۵]. یک Z-عدد یا $Z = (A, \mathrm{B})$ دارای دو قسمت است. اولین قسمت، A، یک محدودیت برای مقادیری است که متغیر نامشخص X که دارای ارزش یا مقدار حقیقی است می‌تواند داشته باشد. دومین جزء یعنی B مقیاسی از قابلیت اطمینان مربوط به اولین جزء است. معمولا A و B با زبان طبیعی توصیف می‌شوند. در مورد Z-اعداد تحقیقات متعدی صورت گرفته است [۲-۱۷]. که به برخی از آنها اشاره می‌کنیم: پیرمحمدی و همکارانش در سال ۲۰۱۷ یک جواب تقریبی از معادلات دیفرانسیل مبتنی بر Z-اعداد بدست آوردند. قلعه‌ای و همکارانش در سال ۲۰۲۰ یک روش جهت حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه مبتنی بر Z-اعداد ارائه کردند [۱۸]. اما در خصوص برآورد جواب معادلات دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه مبتنی بر Z- اعداد تنها یک تحقیق صورت گرفته است [۱۹]. در این مقاله که توسط خود ما انجام شد یک روش جهت تقریب معادلات دیفرانسیل کسری مبتنی بر اعداد-Z ارائه گردید. در کار قبلی ما، در مقدار اولیه معادله دیفرانسیل کسری که مبتنی بر Z-اعداد بود، قسمت اطمینان حقیقی در نظر گرفته شده بود اما در دنیای واقعی ممکن است این قسمت هم به صورت فازی فرمول‌بندی شود که این خود چالش برانگیز است. لذا در این مقاله، سعی شد که فرمول محاسبه قسمت اطمینان طوری طراحی شود که این چالش را پوشش دهد. نتایج عددی به دست آمده حکایت از آن داشته که روش پیشنهادی برای حل این نوع از معادلات مؤثر است.

در ادامه در بخش دو، مفاهیم پایه‌ای و قضایای اساسی ارائه می‌شود. در بخش سوم، یک روش ترکیبی جهت تقریب معادلات دیفرانسیل کسری مبتنی بر Z-اعداد بیان می‌شود. در بخش چهارم نتایج عددی بیان می‌شود. در بخش پنجم نتیجه‌گیری گفته می‌شود و در نهایت مراجع علمی آورده می‌شود.

۲- مفاهیم پایه و اساسی

در این بخش تعاریف پایه و اساسی مورد نیاز در مقاله ارائه شده است.

تعریف ۲-۱: عدد فازی $A = (a, b, c, d; w)$ توصیفی از یک مجموعه فازی در R با تابع عضویت A است که به صورت زیر شرح داده شده است

(۱) A پیوسته از R به فاصله زمانی $[0, w]$ است؛

(۲) $A\,(x) = 0$، برای هر $x \not\in [a, b]$؛

(۳) A در $[a, b]$ اکیدا افزایشی است؛

(۴) برای هر $x \in [a, b]$، $A\,(x) = w$ که در آن w ثابت است؛

(۵) A در $[c, d]$ اکیدا کاهشی است؛

جاییکه a، b، c و d عدد واقعی با $a < b < c < d$ و $w \in (۰,۱)$ است. بنابراین تابع عضویت u می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$A(x) = \begin{cases} A_L(x), & a \le x \le b \\ w, & b \le x \le c \\ A_R(x), & c \le x \le d \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

جاییکه $A_L(x): [a,b] \to [0,w]$ پیوسته و اکیداً افزایشی و $A_R(x): [c,d] \to [0,w]$ پیوسته و اکیداً کاهشی است. مجموعه‌ای از اعداد فازی به صورت$F(R)$ مشخص می‌شود. برای راحتی، اعداد فازی درتعریف ۲-۱ را می‌توان با $A = (a,b,c,d;w)$ و قرینه آن را با $A = (\ d,\ \ c,\ \ b,\ \ a;w)$ نشان داد [۲۰].

تعریف ۲-۲: تعریف Z-اعداد

زاده ایده Z-اعداد همراه با یک متغیر نامعلوم X معرفی کرد. یک Z-عدد یک زوج از اعداد فازی (A,B) است [۵]. در اینجا A یک زیرمجموعه فازی از محدودیت‌هایی است که مقادیرx می‌تواند داشته باشد و B یک زیرمجموعه فازی از مقیاس اطمینان مولفه A است. زاده(x, A, B)را به عنوان یک ارزشگذاری-Z معرفی کرد و نشان داد این مقدار معادل با این است که x برابر است با (A,B). در اینجا Z اطلاعات راجع به مقدار متغیر x را فراهم می‌آورد. مثال‌هایی از این ارزشگذاری-Z به صورت زیر است [۱۷].

مثال: (حدود ۴۵ دقیقه، خیلی مطمئن است)، (حدود ۳۰ دقیقه، مطمئن است). این ارزشگذاری برای Z طبق پیشنهاد زاده به عنوان یک محدودیت در x مشاهده و به صورت زیر تفسیر گردید.

$$Prob\ (x\ is\ A)\ \ is\ B$$

در واقع بدان معنی است که

$$R(x):\ x\ \ is\ A \to\ Poss(x=u) = \mu_A(u)$$
$$P(x\ \ is\ \ A\ ) = \int_R \mu_A\,(u) P_x(u) du\ \ is\ \ \ B$$

که μ_A تابع عضویت مجموعه فازی A و u مقداری از x است. $P_x(u)$ تابع چگالی احتمال x و $P(x=u)$ تابع احتمال x است. درجایی که توزیع احتمال پایه را نمی‌دانیم از این اطلاعات واضح است که توزیع احتمال خود عدد فازی است.

۳- یک روش جهت تقریب جواب معادلات دیفرانسیل کسری- مبتنی بر Z-اعداد

مسئله مقدار اولیه Z- کسری زیر مفروض است [۱۹]:

$$\begin{cases} (D^{\alpha}[y]^z)(x) = f(x,[y]^z), \\ [y]^z(0) = (\tilde{y}(0), B_0) \in R_Z, \\ \alpha > 0\ ,\ \ x \in [0,T] \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن R_Z مجموعه Z-اعداد است و $B_0 = (b_1, b_2, b_3)$ مقدار اطمینان فازی است که برای راحتی کار یک عدد فازی مثلثاتی در نظر گرفته شده است.

با توجه به تعریف Z-اعداد رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(D^{\alpha}[y]^z)(x) = \left((D^{\alpha}y_{(A)})(x), B\right)$$

بطوریکه

$$p\left((D^{\alpha}y)(x)\ \ is\ \ \ (D^{\alpha}y_{(A)})(x)\right)\ is\ \ B$$

و یا

$$p\left((D^{\alpha}y)(x)\ \ is\ \ (D^{\alpha}y_{(A)})(x)\right) = \int_R \mu_{(D^{\alpha}y_{(A)})}\,(u) P_y(u)\,du\ \ is\ B \qquad (۲)$$

بطوریکه$(D^{\alpha}y)(x)$ یک معادله دیفرانسیل کسری فازی است که مقدار دقیقی ندارد و مقدار حدودی آن با معادله دیفرانسیل فازی$(D^{\alpha}y_{(A)})(x)$ مشخص شده است. همچنینB بیان کننده قسمت اطمینان از بخش محدودیت است و مقدار آن در اینجا با ارزشگذاری فازی است.

آنچه که مهم است این است که بتوان تابع توزیع احتمالی را در نظر گرفت که هم شرط اولیه در آن برقرار باشد و هم تقریب درستی از میزان اطمینان مقدار مسئله را مشخص کند.

بدین منظور تابع چگالی احتمال نمایی با $\lambda \in R$ به فرم زیر را در نظر می‌گیریم

$$P(y;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

از آنجایی که توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که خاصیت بی‌حافظگی دارد و از این رو بیشتر در حل مسائل احتمال و تئوری صف به کار گرفته می‌شود. هم‌چنین از این توزیع برای مدلسازی کردن و آسان ساختن شیوه حل مسائل واقعی استفاده می‌کنند. لذا برای پیدا کردن تابع توزیع متغیر تصادفی نمایی، کافی است که از تابع چگالی احتمال انتگرال بگیریم. این کار باعث محاسبه سطح زیر منحنی تابع چگالی می‌شود. از آنجایی که این تابع در نشان دادن مقیاس اطمینان کاربرد دارد، لذا می‌تواند گزینه مناسبی جهت محاسبه رابطه (۲) باشد بنابراین با توجه به این موضوع که هر چه به قله (قله بخش محدودیت) نزدیک می‌شویم میزان اطمینان ما بیشتر می‌شود و همچنین با در نظر گرفتن شرط اولیه مسئله، تابع اطمینان را با توجه به رابطه (۲) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&p\left(\left(D^{\alpha}y\right)(x)\ \ is\ \ \left(D^{\alpha}y_{(A)}\right)(x)\right)\\ &=:\mu_{y_A}.\left(1\quad\left(e^{-\lambda a}\quad e^{-\lambda b}\right)\right)is\ \ B\end{aligned}\qquad(۳)$$

که در این مقاله a و b به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases}a=D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)|_{\tau}\\ b=D^{\alpha}\overline{y}_A^r(x)|_{\tau}\end{cases}\qquad \tau\in X$$

که در آن τ یک نقطه دلخواه از بازه $[0,T]$ است.

همچنین $D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)$ و $D^{\alpha}\overline{y}_A^r(x)$ نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned}D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)&=\underline{f}(x,y_A^r)\\ &=F\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right)\\ D^{\alpha}\overline{y}_A^r(x)&=\overline{f}(x,y_A^r)\\ &=G\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right)\end{aligned}\qquad(۴)$$

که در آن $\underline{f}(x,y_A)$ تابعی است از راست پیوسته افزایشی و $\overline{f}(x,y_A)$ تابعی از چپ پیوسته کاهشی است و بعلاوه برای $u\in\left[\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right]$

$$\begin{cases}F\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right)=min\{f(x,u)\}\\ G\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right)=max\{f(x,u)\}\end{cases}\qquad(۵)$$

فرم پارامتری سیستم (۵) با فرض $\underline{y}_A^r(0)=\underline{y}_{A0}^r$ و $\overline{y}_A^r(0)=\overline{y}_{A0}^r$، توسط:

$$\begin{cases}D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)=F\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right),\\ D^{\alpha}\overline{y}_A^r(x)=G\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right),\end{cases}\qquad(۶)$$

بیان می‌شود.

بنابراین برای یک سیستم دلخواه $x\in[x_0,T]$، رابطه (۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases}D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)\quad F\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right)=0,\\ D^{\alpha}\overline{y}_A^r(x)\quad G\left(x,\underline{y}_A^r,\overline{y}_A^r\right)=0.\end{cases}\qquad(۷)$$

حال رابطه (۱) برای $\alpha>0$ و $x\in[0,b]$ به صورت زیر قابل باز نویسی است

$$\begin{cases}(D^{\alpha}[y]^z)(x)=(D^{\alpha}(y_A),B),\\ [y]^z(0)=[y_0]^Z,\end{cases}\qquad(۸)$$

با توجه به رابطه (۶) برای $\alpha>0$ و $x\in[0,b]$ داریم

$$\begin{cases}(D^{\alpha}[y]^z)(x)=(\mathrm{A}_0,\mathrm{B}_0)\\ [y]^z(0)=(y_{0A},B)=(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1)\end{cases}\qquad(۹)$$

که در آن A_1، B_1، A_0 و B_0 به صورت زیر می‌باشند:

$$A_0 = \left(D^{\alpha}\bar{y}_A^r(x), D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)\right),$$
$$B_0 = \mu_{y_A}.(1 \quad F(\lambda, x, y)),$$
$$A_1 = \left(\bar{y}_{A0}(x), \underline{y}_{A0}(x)\right),$$
$$B_1 = \mu_{y_A}.(1 \quad G(\lambda, x, y)),$$

که

$$F(\lambda, x, y) = e^{-\lambda D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)} \quad e^{-\lambda D^{\alpha}\bar{y}_A^r(x)},$$
$$G(\lambda, x, y) = e^{-\lambda \underline{y}_{A0}(x)} \quad e^{-\lambda \bar{y}_{A0}(x)}$$

با توجه به اینکه جواب تقریبی باید با بیشترین اطمینان حاصل شود لذا $\mu_{y_A} = 1$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شرط اولیه مسئله تابع توزیع احتمال رابطه (۹) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\left(1 \quad \left(e^{-\lambda D^{\alpha}\underline{y}_A^r(x)} \quad e^{-\lambda D^{\alpha}\bar{y}_A^r(x)}\right)\right) \qquad (۱۰)$$

بنابراین رابطه (۱) برای $x \in [0, b]$ به صورت زیر قابل بازنویسی است

$$D^{\alpha}(y) = {}^cD^{\alpha}(y_A) = \begin{cases} {}^cD^{\alpha}\bar{y}_A^r(x) \\ {}^cD^{\alpha}\underline{y}_A^r(x) \end{cases} \qquad (۱۱a)$$
$$\alpha > 0,\ r \in [0,1]$$
$$D^{\alpha}(y) = f(\lambda) = \left(1 \quad e^{-\lambda y}\right)\Bigg|_{F\left(x,\bar{y}_A^r,\underline{y}_A^r\right)}^{G\left(x,\bar{y}_A^r,\underline{y}_A^r\right)}, \qquad (۱۱b)$$
$$f(\lambda)\ is\ B \qquad and\ \ B \in F(R),$$

که در آن

$${}^cD^{\alpha}\bar{y}_A^r(x) = \left[\bar{f}(x, y_A)\right]$$
$$= G\left(x, \underline{y}_A^r, \bar{y}_A^r\right)\bar{y}^r(0) = \bar{y}_{0A}^r,$$
$${}^cD^{\alpha}\underline{y}_A^r(x) = \left[\underline{f}(x, y_A)\right]$$
$$= F\left(x, \underline{y}_A^r, \bar{y}_A^r\right)\underline{y}_A^r(0) = \underline{y}_{0A}^r.$$

فرض کنیم $g(x)$ یک تابع قطعه‌ای پیوسته باشد و α - مرتبه مشتق‌پذیر نسبت به متغیر مستقل x روی بازه مشتق‌پذیر $[0, b]$ باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم بازه $[0, b]$ به N زیر بازه $\left[x_j, x_{j+1}\right]$ با طول گام $= \frac{b}{N}$ و گره‌های $x_j = j \quad (j =$ $1, \dots, N)$، تقسیم شده است. از طرفی با استفاده از انتگرال کسری ریمن ـ لوویل و با بکار گیری قاعده ذوزنقه‌ای تصحیح یافته به صورت $I\ g\ (b) =$ $T(g, \quad, \alpha) \quad o(\ ^2)$ داریم

$$T(g, \quad, \alpha) =$$
$$[(N_1)^{\alpha+1} \quad (N_1 \quad \alpha)N^{\alpha}]\frac{h^{\alpha}g(o)}{\Gamma(\alpha+2)}$$
$$+\frac{h^{\alpha}g(b)}{\Gamma(\alpha+2)} + \sum_{j=1}^{N-1} K \times \frac{h^{\alpha}g(x_j)}{\Gamma(\alpha+2)} \qquad (۱۲)$$

که در آن $N_1 = N \quad 1$ و

$$K = [(n \quad j \quad 1)^{\alpha+1}$$
$$2(N \quad j)^{\alpha+1} + (N_1 \quad j)^{\alpha+1}].$$

حال مساله مقدار اولیه کسری (۱) برای $x \in [0, b]$ می‌تواند با معادلات انتگرال زیر معادل باشد:

$$[y]^z = \bar{y}_A^r(x) =$$
$$IG\left(x, \underline{y}_A^r, \bar{y}_A^r\right) + \ \bar{y}_A^r\ (0),$$
$$[y]^z = \underline{y}_A^r(x) = \qquad \left(۱۳a\right)$$
$$IF\left(x, \underline{y}_A^r, \bar{y}_A^r\right) + \ \underline{y}_A^r(0),$$
$$[y]^z = f(\lambda) =$$
$$1 \quad e^{-\lambda y}\left|\begin{matrix} G\left(x, \bar{y}_A^r, \underline{y}_A^r\right) \\ F\left(x, \bar{y}_A^r, \underline{y}_A^r\right) \end{matrix}\right., \qquad \left(۱۳b\right)$$
$$f(\lambda)\ is\ B.$$

با جانشین کردن $x_{1=}x$ در $(۱۱a)$ و تقریب $IG(\underline{y}_A^r, \bar{y}_A^r)$، $IF\left(x, \underline{y}_A^r, \bar{y}_A^r\right)$ بوسیله قاعده ذوزنقه‌ای تصحیح یافته با $x_0 \quad x_1 = \quad$ داریم:

$$[y_1]^z = \overline{y}^r_{1,A} = \frac{{}^{\alpha}G(x_0,\overline{y}^r_{0,A},\underline{y}^r_{0,A})}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{{}^{\alpha}G(x_1,\overline{y}^r_{1,A},y^r_{1,A})}{\Gamma(\alpha+2)} + \overline{y}^r_{0,A}$$
$$[y_1]^z = \underline{y}^r_{1,A} = \frac{{}^{\alpha}F(x_0,\overline{y}^r_{0,A},\underline{y}^r_{0,A})}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{{}^{\alpha}F(x_1,\overline{y}^r_{1,A},y^r_{1,A})}{\Gamma(\alpha+2)} + \underline{y}^r_{0A} \qquad (۱۴a)$$
$$[y_1]^z = f(\lambda) = 1 \quad e^{-\lambda y}\left|\begin{matrix} G\left(x,\overline{y}^r_A,\underline{y}^r_A\right) \\ F\left(x,\overline{y}^r_A,\underline{y}^r_A\right)\end{matrix}\right. \quad , \qquad (۱۴b)$$
$$f(\lambda)\ is\ B\ , x\in[0,b], \alpha>0$$

که در آن $y_A(x_i)$ به صورت y_{A_i} نشان داده می‌شود. حال می‌خواهیم $\underline{y}^r_A$ ، $\overline{y}^r_A$ را با استفاده از روش اویلر کسری تقریب بزنیم. مسئله مقدار اولیه (۱۱) را ملاحظه می‌کنیم و فرض می‌کنیم $(\tilde{y},D^{\alpha}y_A,D^{\alpha^2}y_A)\in E^F[0,b]$. از فرمول تیلور تعمیم یافته برای بسط $y_A(x)$ در نقطه $x_0=0$ استفاده می‌کنیم و از جمله مرتبه دوم (جمله ^{2}) چشم پوشی می‌کنیم. فرمول روش اویلر کسری به صورت زیر است.

$$\overline{y}^r_{j+1,A} = \overline{y}^r_{j,A} + \frac{{}^{\alpha}G\left(x_j,\overline{y}^r_{j,A},\underline{y}^r_{j,A}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$\underline{y}^r_{j+1,A} = \underline{y}^r_{j.A} + \frac{{}^{\alpha}F(xj,\overline{y}^r_{j,A},\underline{y}^r_{j,A})}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad ۱۵)$$

با تخمین زدن $\underline{y}^r_{1A},\overline{y}^r_{1A}$ با استفاده از رابطه(۱۲) و جاگذاری در $(۱۳a)$ و $(۱۳b)$ داریم

$$\overline{y}^r_{1A} = \overline{y}^r_{0A} + \frac{h^{\alpha}G(T)}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^{\alpha}G\left[x_{1A},\overline{y}^r_{0A}+\frac{hK(T)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]}{\Gamma(\alpha+2)}$$
$$\underline{y}^r_{1A} = \underline{y}^r_{0A} + \frac{h^{\alpha}F(T)}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^{\alpha}F\left[x_{1A},\overline{y}^r_{0A}+\frac{hG(T)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]}{\Gamma(\alpha+2)} \qquad (۱۶a)$$
$$f(\lambda) = 1 \quad e^{-\lambda y}\left|\begin{matrix}\overline{y}^r_{1,A}(x)\\ \underline{y}^r_{1,A}(x)\end{matrix}\right. \qquad (۱۶b)$$

که $K(T)=G(T)+F(T)$ و $T=\left(x_{0A},\underline{y}^r_{0A},\overline{y}^r_{0A}\right)$.
در نهایت روش اویلر کسری و تصحیح یافته برای $\{x_j = j\ :\ j =$ و $x_j\in[a,b]$ و $\alpha>0$ $0,\dots,N\ :\ \ =\frac{b}{N}\}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\overline{y}^r_{jA} = K^{\alpha}_j \times \frac{h^{\alpha}G(x_{0A},\underline{y}^r_{0A},\overline{y}^r_{0A})}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\times\sum_{j=1}^{j-1}L^{\alpha}_{j,i}\times G(T) + \frac{h^{\alpha}G[x_{jA},A_2,A_3]}{\Gamma(\alpha+2)} + \overline{y}^r_{0A},$$
$$\underline{y}^r_{jA} = K^{\alpha}_j \times \frac{h^{\alpha}F(x_{0A},\underline{y}^r_{0A},\overline{y}^r_{0A})}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\times\sum_{j=1}^{j-1}L^{\alpha}_{j,i}\times F(T) + \frac{h^{\alpha}F[x_{jA},A_4,A_5]}{\Gamma(\alpha+2)} + \underline{y}^r_{0A} \qquad (۱۷)$$
$$f(x,\lambda) = 1 \quad e^{-\lambda T y}\left|\begin{matrix}G\left(x,\overline{y}^r_A,\underline{y}^r_A\right)\\ F\left(x,\overline{y}^r_A,\underline{y}^r_A\right)\end{matrix}\right.$$

که در آن

$$K^{\alpha}_j = (j \quad 1)^{\alpha+1} \quad (j \quad \alpha \quad 1)j^{\alpha},$$
$$L^{\alpha}_{j,i} = (j_i+1)^{\alpha+1} \quad 2(j_i)^{\alpha+1} + (j_i \quad 1)^{\alpha+1},$$
$$T_i = \left(x_{iA},\underline{y}^r_{iA},\overline{y}^r_{iA}\right),$$
$$A_2 = \overline{y}^r_{j-1,A} + \frac{h^{\alpha}G\left(x_{j-1,A},\overline{y}^r_{j-1.A},\underline{y}^r_{j-1,A}\right)}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$A_3 = \underline{y}^r_{j-1,A} + \frac{h^{\alpha}F(x_{j-1,A},\overline{y}^r_{j-1.A},\underline{y}^r_{j-1,A})}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$A_4 = \overline{y}^r_{j-1,A} + \frac{h^{\alpha}G\left(x_{j-1,A},\overline{y}^r_{j-1.A},\underline{y}^r_{j-1,A}\right)}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$A_5 = \underline{y}^r_{j-1,A} + \frac{h^{\alpha}F\left(x_{j-1,A},\overline{y}^r_{j-1.A},\underline{y}^r_{j-1,A}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

ضمنا مقدار λ (پارامتر نرخ) باعث می‌شود که میزان اطمینان دلخواهی را داشته باشیم.

۴. نتایج عددی

در این بخش یک مثال عددی ارائه می‌شود.

مثال۴-۱. مسئله مقدار اولیه با ارزشگذاری-Z کسری مفروض است

$$\begin{cases} {}^{c}D^{1/2}[y]^Z(x) = \dfrac{9}{4}\sqrt{[y]^Z(x)}[y]^Z(x) \\ [y]^Z(x_0) = \left((0.5,1,1.5),(0.7,0.8,0.9)\right)\end{cases}$$

طبق $^{c}D_1[y]^Z(x)$ و با استفاده از روش اویلر تصحیح یافته و با توجه به تابع توزیع احتمال پیشنهادی، تقریب جواب مسئله با اطمینان (0.7,0.8,0.9) در جداول ۱ و ۲ و میزان اطمینان از جواب تقریبی مربوط به قسمت محدودیت در جدول ۳ قابل مشاهده است.

با توجه به اینکه در مقدار اولیه میزان اطمینان (0.7,0.8,0.9) می‌باشد، داریم

$$f(x_0,\lambda) = \begin{vmatrix}1 & e^{-\lambda y}\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\overline{y}^r_{1,A}(x) \\ \underline{y}^r_{1,A}(x)\end{vmatrix} \quad (۱۸)$$
$$= (0.7,0.8,0.9).$$

برای بدست آوردن λ_iهای مناسب با استفاده از رابطه (۱۸) و رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$f(x_0,\lambda) = \begin{cases} 1 & H(x,\lambda_1) = 0.7 \\ 1 & H(x,\lambda_2) = 0.8 \\ 1 & H(x,\lambda_3) = 0.9 \end{cases}$$

که $H(x,\lambda_i) = e^{-\lambda_i D^\alpha \underline{y}^r_A(x)} \quad e^{-\lambda_i D^\alpha \overline{y}^r_A(x)}$ و $\lambda_1 = 0.3$، $\lambda_2 = 0.2$ و $\lambda_3 = 0.1$. با بدست آمدن λ_iها میزان اطمینان از جواب تقریبی مسئله فوق در جدول شماره ۳ قابل مشاهده است.

جدول (۱). تقریب $\underline{y}^r_A$.

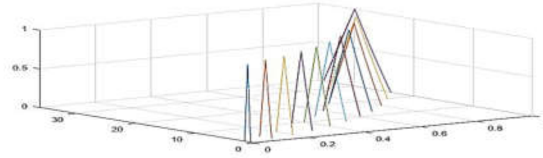
x	α					
	0	**0.2**	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**1**
0	0.5	0.6	0.75	0.85	0.95	1
0.2	3.142199	3.465749	3.929197	4.22704	4.517832	4.660941
0.4	7.685986	8.253773	9.059611	9.57343	10.07235	10.31697
0.6	14.258	15.11457	16.32581	17.09559	17.84128	18.20629
0.8	23.42855	24.6462	26.36426	27.45396	28.50803	29.02346
1	35.94701	37.62281	39.98363	41.47886	42.92371	43.6297

جدول (۲). تقریب $\overline{y}^r_A$.

x			α			
	0	**0.2**	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**1**
0	1.5	1.4	1.25	1.15	1.05	1
0.2	6.02996	5.76359	5.357768	5.08244	4.802682	4.660941
0.4	12.63113	12.18416	11.50031	11.03421	10.55869	10.31697
0.6	21.64172	20.98048	19.96676	19.27434	18.56659	18.20629
0.8	33.85905	32.93037	31.50482	30.52975	29.53191	29.02346
1	50.23774	48.9707	47.02392	45.69101	44.32581	43.6297

جدول (۳). محاسبه میزان اطمینان از جواب تقریبی $y^r_A = \left(\underline{y}^r_A, \overline{y}^r_{1,A}\right)$

x	α		
	0	**0.5**	**1**
0	(0.7,0.8,0.9)	(0.8,0.9,0.9)	(1,1,1)
0.2	(0.7,0.7,0.8)	(0.8,0.8,0.9)	(1,1,1)
0.4	(0.8,0.8.0.9)	(0.9,0.9,0.9)	(1,1,1)
0.6	(0.8,0.9.0.9)	(0.9,0.9,0.9)	(1,1,1)
0.8	(0.9,0.9,0.9)	(0.9,0.9,0.9)	(1,1,1)
1	(0.9,0.9,0.9)	(0.9,0.9,0.9)	(1,1,1)



شکل (۱). نمودار جواب تقریبی بخش محدودیت.

حال می‌توان تقریب جواب $[y]^Z$ را در جدول ۴ به ازای $\alpha = 0,0.5,1$ مشاهده کرد.

۵- نتیجه‌گیری

مدلسازی ریاضی بسیاری از پدیده‌های طبیعی فیزیکی و علوم مهندسی و علوم پایه منجر به معادلات دیفرانسیل کسری در محیطی مبهم و محاوره‌ای می‌شوند. لذا برای توصیف و شبیه سازی این پدیده‌ها نیاز به محاسبه جواب‌های این دسته از مسائل می‌باشد و از آنجا که محاسبه جواب دقیق برای اغلب مسائل از جمله مسائل با شرایط پیچیده امکان پذیر نیست، سعی شد با استفاده از روش ترکیبی مبتنی بر اویلر کسری تصحیح یافته و توزیع احتمال نمایی تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مقدار اولیه $Z-$ از مرتبه کسری تحت مشتق کاپوتو کسری فازی بدست آید. توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که خاصیت بی‌حافظگی دارد و از این رو بیشتر در حل مسائل احتمال به کار گرفته می‌شود. این توزیع برای مدلسازی کردن و آسان ساختن شیوه حل مسائل واقعی کاربرد دارد. روش پیشنهادی روشی مناسب جهت تقریب مسائل مبتی بر Z-اعداد با میزان اطمینان دلخواه می‌باشد.

جدول (۴). تقریب $[y]^Z$ به ازای $\alpha = 0, 0.5, 1$.

x 0	α		
	0	**0.5**	**1**
0	((0.5,1.5),(0.7,0.8,0.9))	((0.75,1.25),(0.8,0.9,0.9))	((1,1),(1,1,1,))
0.2	((3.142199,6.02996),(0.7,0.7,0.8))	((3.929197,5.357768),(0.8,0.8,0.9))	((4.660941,4.660941),(1,1,1))
0.4	((7.685986,12.63113),(0.8,0.8.0.9))	((9.059611,11.50031),(0.9,0.9,0.9))	((10.31697,10.31697),(1,1,1))
0.6	((14.258,21.64172),(0.8,0.9.0.9))	((16.32581,19.96676),(0.9,0.9,0.9))	((18.20629,18.20629),(1,1,1))
0.8	((23.42855,33.85905),(0.9,0.9,0.9))	((26.36426,31.50482),(0.9,0.9,0.9))	((29.02346,29.02346),(1,1,1))
1	((35.94701,50.23774),(0.9,0.9,0.9))	((39.98363,47.02392),(0.9,0.9,0.9))	((43.6297,43.6297),(1,1,1))

فهرست منابع

[1] A. Arara, M. Benchohra, N. Hamidi, J. J. Nieto, Fractional order differential equations on an unbounded domain, Nonlinear Anal, 72 (2010) 580-586.

[2] R. L. Bagley, On the fractional order initial value problem and its engineering applications, in: Fractional Calculus and Its Applications (Ed. K. Nishimoto), Tokyo, College of Engineering, Nihon University, (1990) 12-20.

[3] H. Beyer, S. Kempfle, Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives, ZAMM, 75(1995) 623-635.

[4] K. Diethelm, N. J. Ford, Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl, 265 (2002) 229-248.

[5] L. A. Zadeh, A Note on Z-numbers, Information Sciences 181 (2011) 2923–2932.

[6] R. A. Alive, A. V. Alizadeh, O. H. Huseynov, The arithmetic of discrete Z-numbers, Inform. Sciences., 290 (2015) 134-155.

[7] R. A. Alive, O. H. Huseynov, R. R. Alive, A. V. Alizadeh, The arithmetic of Z-numbers. Theory and Applications, World Scientific, Singapore, (2015).

[8] R. A. Alive, O. H. Huseynov, and R. Serdaroglu, Ranking of Z-numbers and its Application in Decision Making. Int. J.

[9] R. A. Alie, Oleg H. Huseynov, R. R Aliyev, A. A. Alizadeh, The Arithmetic of Z-numbers, (2015) by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd

[10] S. Ezadi, T. Allahviranloo, New multi-layer method for Z-number ranking using Hyperbolic Tangent function and convex combination, Intelligent Automation Soft Computing., (2017), 1-7.

[11] S. Ezadi, T. Allahviranloo., Two new methods for ranking of Z-numbers basedon sigmoid function and sign method, International Journal of Intelligent Systems., (2018), 1-12.

[12] S. Ezadi and T. Allahviranloo, Numerical solution of linear regression based on Z-numbers by improved neural network, IntellIgentAutomAtIonand Soft ComputIng, (2017) 1-11.

[13] B. Kang, D. WEI, Y. LI and Y. DENG, Decision Making Using Z-numbers under Uncertain Environment, Journal of Computational Information Systems, 7 (2012) 2807–2814.

[14] B. Kang, D. Wei, Y. Li, Y. Deng, A method of converting Z-number to classical fuzzy number, Journal of Information and Computational Scienc., 3 (2012), 703-709.

[15] D. Mohamad, S. A. Shaharani, and N. H. Kamis, A Z-number based decision making procedure with ranking fuzzy numbers method, AIP Conference Proceedings., 1635 (2014) 160–166.

[16] S. Pirmuhammadi, T. Allahviranloo, M. Keshavarz, The parametric form of Z-number and its application in Z-number initial value Problem, (2017).

[17] R. R. Yager, On Z-Valuations Using Zadeh's Z-Numbers, International journal of intelligent systems, 27 (2012) 259–278

[18] L. Qalehe, M. Afshar Kermani, T. Allahviranloo, Solving First-Order

Differential Equations of Z-numbers initial value using Radial Basic Function, International Journal of Differential Equations, (2020) 1-11.

[19] P. Keshavarz, T. Allahviranloo, F. M. Yaghoobi, A. Barahmand, New method for numerical solution of Z-fractional differential equations.

[20] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control 8 (1965) 338–353