

روشی جدید مبتنی بر الگوریتم‌های تکاملی و عددی برای حل معادلات لین-امدن

سیدرضا میرشفائی^۱، هاشم صابری نجفی^۱، اسماعیل خالقی^{۲*}، امیرحسین رفاهی شیخانی^۱

(^۱) گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران.

(^۲) گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۲۳

چکیده

با پیشرفت کامپیوترها و توسعه صنعت تولید پردازنده‌ها، امروزه از الگوریتم‌های تکاملی نظیر شبکه‌های عصبی، الگوریتم ژنتیک و برنامه‌سازی ژنتیکی در حوزه‌های مختلف مهندسی استفاده می‌گردد. اما در حوزه ریاضیات کمتر از چنین روش‌هایی برای حل مسایل خاصی نظیر معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. ایده موجود در این مطالعه ارائه روشی جدید و نوآورانه در حوزه ریاضیات کاربردی و اخترفیزیک است که مطابق با آن، بتوان روش‌های ریاضی را با روش‌های ابتکاری که پیش‌تر اکثراً در مسایل کاربردی و مهندسی از آن بهره گرفته می‌شد، تلفیق نموده و از آن برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی لین-امدن که برآمده از فیزیک اجرام آسمانی و توصیف‌کننده ساختار ستاره‌ای و تئوری کره‌های گازی پلی‌تروپیک است، استفاده نمود. در این راستا یک روش ترکیبی جدید (GPNLE) مبتنی بر برنامه‌سازی ژنتیکی و روش عددی رونگه-کوتا برای تولید مدل‌های ریاضی با دقتی مطلوب از جواب معادلات لین-امدن معرفی شده است. صحت کارایی و انعطاف‌پذیری این روش ترکیبی بر اساس آزمایش‌های عددی انجام‌شده روی دسته‌هایی خاص و پرکاربرد از این نوع معادلات مورد بررسی و قیاس با یک روش قدرتمند بر پایه چندجمله‌ای‌های چبیشف، قرار گرفته و نتایج مطلوبی برای نشان دادن اهداف مقاله حاصل شده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌سازی ژنتیکی، روش‌های عددی، معادلات دیفرانسیل، ساختار ستاره‌ای.

۱- مقدمه

نخستین تلاش برای گردآوری یک نظریه منسجم درباره ساختار ستاره‌ای، تئوری کره‌های گازی پلی‌تروپیک بود که در سال ۱۸۶۹ توسط جانانان هومر لین معرفی و سپس توسط دانشمندانی نظیر آگوست ریتز، رابرت امدن و هنری نوریس راسل توسعه یافت. یک سال بعد، لین شکل بی‌بعد معادله پواسون که توزیع چگالی تعادلی را در کره گازی هم‌دمای پلی‌تروپیک خود-گرانشی توصیف می‌کند، مطرح نمود و امدن آن را برای تعریف پلی‌تروپها در تعادل هیدرواستاتیکی بهبود بخشید [۱]. هدف از مطالعه ساختار ستارگان، تعیین تغییرات درونی خواص فیزیکی اصلی آنها، مانند فشار، چگالی و دما به عنوان تابعی از چند پارامتر ورودی مانند جرم کل و ترکیب شیمیایی است. برای دستیابی به این هدف، لازم است فرآیندهای فیزیکی اصلی رخ داده در ستارگان را که بر خواص فیزیکی آنها تأثیر می‌گذارند بشناسیم، معادلات دقیقی که این فرآیندها را توصیف می‌کنند، به دست آوریم و در نهایت این معادلات را حل کنیم تا تغییرات مورد نظر در ویژگی‌های فیزیکی آنها تعیین شود. این فرآیند دارای پیچیدگی‌های مختلفی است [۲]. با این حال مدل‌های ساده‌تری وجود دارند که تحلیل ساختار ستاره‌ای و حل معادلات ناشی از آنها را با استفاده از روش‌های تحلیلی، تقریبی و عددی امکان پذیر می‌کنند. یک دسته خاص از این مدل‌ها مدل ستاره‌های پلی‌تروپیک یا کره‌های گازی خود-گرانشی‌اند که توسط معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم لین-امدن با شاخص‌های مختلف پلی‌تروپیک بیان می‌شوند [۳]. این معادلات در حالت کلی به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود که در آن اختیار حالت‌های خاصی از $g(x), \alpha, f(x, y)$ انواع مختلفی از این معادلات را نتیجه می‌دهد. به عنوان مثال با اختیار $g(x)=0, \alpha=2, f(x, y)=y^m$ و اعمال شرایط اولیه $y(0)=1, y'(0)=1$ ، حالت استاندارد معادله لین-امدن پدید می‌آید که به ازای $m=0, 1, 5$ دارای جواب تحلیلی و دقیق است. این معادله پدیده‌های مختلفی را در شاخه‌هایی از فیزیک، شیمی و حتی بیولوژی مدل‌بندی می‌کند [۴-۶].

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{\alpha}{x} y'(x) + f(x, y) = g(x) \\ a_1 y(0) + a_2 y'(0) = a, \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = b \quad (1) \\ \alpha, a_1, a_2, a, b_1, b_2, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

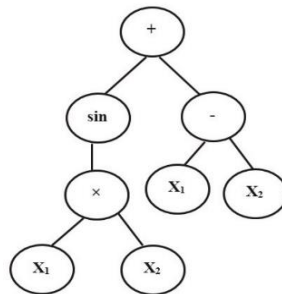
روش‌های تقریبی نیمه‌تحلیلی فراوانی نظیر روش گسترش سری و روش‌های مبتنی بر سری‌های توانی [۷، ۸]، روش‌های بر پایه آشفنگی [۹] و آنالیز هموتوبی [۱۰-۱۲]، روش تکرار تغییراتی [۶، ۱۳] و روش‌های مبتنی بر تجزیه آدومیان [۱۴] برای حل معادله (۱) به کار می‌روند که در این میان روش‌های مبتنی بر آنالیز هموتوبی از لحاظ دقت و کارایی جایگاه ویژه‌ای دارند [۱۵، ۱۶]. همچنین پژوهش‌گران حوزه عددی نیز علاوه بر روش‌های کلاسیک مرسوم حل عددی معادلات دیفرانسیل نظیر رونگه-کوتای مرتبه ۴ (RK4) که جفت داده‌های ورودی-خروجی (x_i, y_i) از جواب معادله تولید می‌کنند، روش‌های متنوع دیگری همانند روش‌های مبتنی بر هم‌مکانی [۱۷، ۱۸]، روش‌های اسپلاین محور [۱۹]، روش‌های بر پایه ماتریس عملیاتی [۲۰]، روش‌های بر پایه موجک‌ها [۲۱، ۲۲] و یکی از قدرتمندترین روش‌های ارائه شده تا کنون، روشی مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف [۱۵] را معرفی و توسعه داده‌اند. از سوی دیگر، در دهه اخیر با پیشرفت و گسترش رایانه‌ها به عنوان ابزارهای قدرتمند محاسباتی و توسعه هوش مصنوعی به‌ویژه الگوریتم‌های تکاملی، سعی شده است از این پتانسیل برای حل مسایل در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی استفاده شود. فرآیند مدل‌سازی ریاضی با الگوریتم‌های تکاملی شامل تولید مدل، تفسیر نتایج عددی و توسعه و کنترل خودکار الگوریتم‌ها توسط رایانه‌ها است [۲۳]. برنامه‌سازی ژنتیکی

یکی از کارآمدترین ابزارهای هوش مصنوعی از الگوریتم‌های تکاملی است که روشی سیستماتیک برای حل خودکار مسایل است به عبارت دیگر در حل یک مسئله، هدف مورد انتظار دارای اهمیت است، نه اینکه چه کاری توسط رایانه به صورت متوالی و تکراری انجام شود. برنامه‌سازی ژنتیکی حالت توسعه‌یافته از الگوریتم ژنتیک است که تفاوت اصلی بین آنها در نحوه پردازش و نمایش خروجی‌ها است. برنامه‌سازی ژنتیکی، قطعه برنامه‌های رایانه‌ای ایجاد می‌کند، درحالی که الگوریتم ژنتیک یک رشته از اعداد را به عنوان جواب نمایش می‌دهد. این شیوه به وسیله هالند مطرح شد و سرانجام کوزا آن را عملیاتی کرد [۲۴]. در برنامه‌سازی ژنتیکی یک جمعیت اولیه از برنامه‌های رایانه‌ای و یا مجموعه‌ای تصادفی از راه‌حل‌های مسئله ایجاد می‌شود، در ادامه جمعیت جدید طی نسل‌های مختلف، به طور تصادفی و با امید به بهتر شدن تطابق هر نسل با خصوصیات مسئله ایجاد می‌گردد، همچنین می‌توان اذعان نمود که برنامه‌سازی ژنتیکی در به دست آوردن راه‌حل‌های نو و غیرمنتظره برای مسایل بسیار موفق است [۲۳]. در مطالعات تجربی اخیر از برنامه‌سازی ژنتیکی به صورت مجزا و ترکیب آن با روش‌هایی مانند تفاضلات اتوماتیک و همچنین از الگوریتم ژنتیک برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده شده است [۲۵-۲۷]. با این حال ترکیب برنامه‌سازی ژنتیکی با یک روش عددی که از پایه و پیشینه ریاضی قوی‌ای پشتیبانی می‌شود، گزارش نشده است. برنامه‌سازی ژنتیکی دارای مشخصه‌هایی مانند آموزش پذیری، قدرت پردازش و استقلال نسبی از کاربر است که خاصیت آموزش پذیری آن به دلیل پیروی از اصول مبتنی بر نظریه تکامل داروین کمتر مورد توجه قرار گرفته است. طبق این اصول، در ایجاد جمعیت آغازین ارجحیت با پیروی از احتمالات و تصادفات است لذا نظم اولیه اولویت چندانی ندارد. اما خاصیت آموزش پذیری نقش مهمی در نظم بخشیدن به فضای جستجوی اولیه دارد. بنابراین هدف اساسی این مقاله معرفی یک روش ترکیبی جدید (GPNLE) و پیاده‌سازی آن در محیط برنامه‌نویسی متلب، جهت تعیین پتانسیل الگوریتم تکاملی ساخته شده به وسیله ترکیب برنامه‌سازی ژنتیکی و یک روش عددی آموزش دهنده (RK4) برای به دست آوردن یک مدل ریاضی با تقریب قابل قبول از راه‌حل‌های تحلیلی معادلات لین-امدن است. برخلاف جواب‌های صرفاً عددی که به صورت رشته‌ای از اعداد حاصل می‌شوند، این مدل ریاضی تولید شده از جواب، اهمیت بسزایی در پیش‌بینی و توصیف جوانب مختلف پدیده مدل‌سازی شده توسط آن معادله دیفرانسیل را دارد. در بخش‌های بعدی به ترتیب، ساختار روش، معیارهای سنجش کارایی روش و برآورد خطا، آزمایش‌های عددی و نتیجه‌گیری بیان خواهد شد.

۲- ساختار روش GPNLE

ساختار کلی روش GPNLE برای حل معادلات لین-امدن بدین صورت است که ابتدا مجموعه‌ای از روابط ریاضی متشکل از ترکیب تصادفی عملگرهای محاسباتی، توابع ریاضی، پایانه‌ها (شامل اعداد تصادفی و متغیرهای طراحی) به عنوان جمعیت اولیه تولید و به وسیله داده‌های ورودی-خروجی به دست آمده از یک روش عددی کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل (RK4) تحت آموزش قرار می‌گیرند. هر عضو در جامعه با استفاده از یک معیار تناسب که بر اساس نوع مسئله تعیین شده است، ارزیابی می‌شود و بسته به میزان تناسب آن با هدف یا اهداف مورد نظر، شاخص تناسب به آن نسبت داده شده سپس جمعیت جدیدی از مدل‌ها با استفاده از عملگرهای ژنتیکی پیوند، جهش و بازتولید ایجاد می‌شود. مدل‌های بهتر برای تشکیل نسل بعد انتخاب شده و سرانجام تولید نسل‌ها تا رسیدن به تعدادی مشخص و یا برآورده شدن هدف ادامه می‌یابد. این روش دو الگوریتم موازی را دنبال می‌کند: الگوریتم اول مسئول اجرای روش عددی RK4 و تولید جفت داده‌های سازگار با جواب تقریبی معادله در نقاط گسسته شده برای آموزش عناصر موجود در جمعیت اولیه است و دومی مسئولیت اجرای برنامه‌سازی ژنتیکی را

برعهده دارد. روش عددی $RK4$ یک شیوه متداول، انعطاف پذیر و قابل اطمینان است و در عمده کاربردهای مهندسی جهت تقریب جواب معادلات مختلف دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۸]. مطالعات اخیر نشان داده که جفت داده‌های تولید شده توسط آن دارای دقت بالا برای انواع پیچیده از معادلات دیفرانسیل نظیر معادلات با منشاء آشوبی، معادلات تأخیری، معادلات از مرتبه کسری، معادلات تصادفی و علی‌الخصوص معادلات غیرخطی است [۲۹، ۳۰]. بنابراین می‌تواند جفت داده‌های ورودی-خروجی قابل اعتمادی از جواب معادله لین-امدن را نیز تولید کند. از طرف دیگر، برنامه‌سازی ژنتیکی با ساختار درختی شناخته می‌شود، جایی که هر درخت ترکیبی از ریشه‌ها، گره‌ها و شاخ و برگ‌ها است. این گره‌ها، ریشه‌ها و برگ‌های درخت از ترکیب عملگرهای محاسباتی به‌علاوه اعضای مجموعه توابع اصلی ریاضی F و پایانه‌های T تشکیل می‌شوند. به‌عنوان مثال اگر مجموعه پایانه‌ها $T = \{x_1, x_2, 1\}$ و توابع $F = \{+, -, \times, \div, \sin\}$ فرض شود، آنگاه یک رابطه ریاضی مستخرج یا یک کروموزوم از ترکیب این دو مجموعه به‌صورت شکل ۱ است. در حالت کلی، اگر قرار باشد مدل‌های (کروموزوم‌های) تصادفی برای جواب یک معادله دیفرانسیل تولید شود، مجموعه ترمینال‌ها و توابع را می‌توان با مطالعه ساختار مدل‌سازی ریاضی اولیه یا همان منشاء پیدایش یک معادله دیفرانسیل حدس زد. به‌علاوه، بررسی رفتار یا تحلیل نمودار جفت داده‌های تولید شده توسط روش $RK4$ تصویر تقریبی تابع جواب را از منظر خطی بودن، مثلثاتی بودن، نمایی بودن و موارد مشابه، ارائه می‌دهد. این دو استراتژی کمک فراوانی در انتخاب هوشمندانه اعضای دو مجموعه F, T برای تولید اعضای جمعیت اولیه و حفظ تنوع در آن می‌کند.



شکل ۱، نمایش درختی $\sin(x_1 \times x_2) + (x_1 - x_2)$

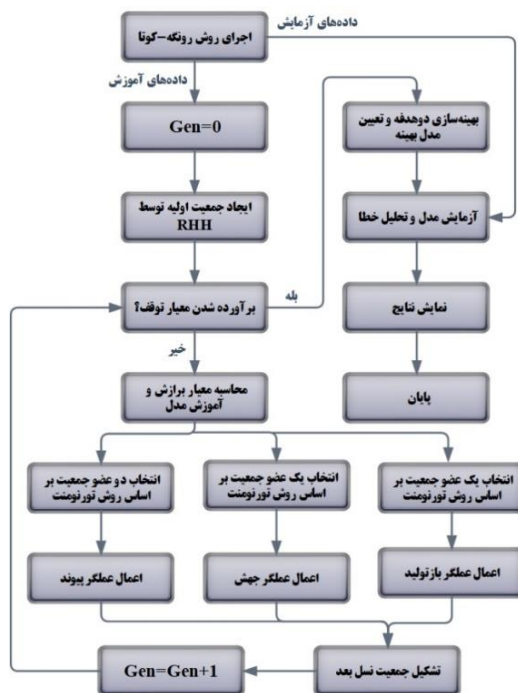
این رویه با انتخاب یک پایه اولیه شروع می‌شود و اضافه کردن یا تغییر عناصر پایه تکرار شده و تا رسیدن به نتیجه مطلوب ادامه می‌یابد. پس از تعیین مجموعه پایه، ایجاد جمعیت اولیه در دستور کار قرار می‌گیرد که برای ایجاد آن از ترکیبی از روش‌های رشد و کامل به‌نام روش RHH استفاده می‌شود. این کار با تعیین محدودیت‌هایی موجب می‌شود تا این اطمینان حاصل گردد که درختان ایجاد شده اندازه (عمق) و شکل‌های متفاوتی داشته باشند یا به-عبارت دیگر تنوع ساختاری جمعیت حفظ شود [۳۱]. بنا به نظر کوزا، به‌عنوان یک اصل کلی، اندازه جمعیت را باید تا حد امکان بزرگ گرفت تا جایی که سیستم کامپیوتری بتواند به‌خوبی و در مدت‌زمان معقول از عهده اجرای آن برآید که این تعداد می‌تواند از حداقل ۵۰۰ به بالا با گام ۵۰۰، متغیر باشد [۲۴، ۳۲، ۳۳]. عمق درختان در نسل آغازین نیز بین ۲ الی ۶ پیشنهاد شده است [۳۳، ۳۴]. اکنون نوبت داده‌های ورودی-خروجی $RK4$ است که

به ایفای نقش خود در آموزش دادن جمعیت اولیه بپردازد و ساختار جمعیتی در نسل‌های آتی را به سمت سازگاری با خود میل دهد. برای این امر ابتدا معادله (۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y, y'), \quad x \in [a, b] \\ y(p) &= p_0, y'(p) = p_1 \end{aligned} \quad (2)$$

نخست با در نظر گرفتن عدد صحیح و مثبت N مقدار طول گام گسسته‌سازی توسط رابطه $h = \frac{b-a}{N}$ تعیین شده و خروجی $RK4$ به صورت یک آرایه $(x_i, y_i), i=1, \dots, N$ ذخیره می‌گردد. N از جفت داده ایجاد شده، تعداد M جفت داده با شرط $M < N$ ، به طور تصادفی انتخاب شده و برای آموزش مدل‌ها در برنامه‌سازی ژنتیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین تعداد $R = N - M$ داده نیز برای آزمایش مدل نهایی مستخرج از $GPNLE$ ذخیره شده تا میزان تطابق این مدل با داده‌هایی از $RK4$ که در فرآیند آموزش جمعیت در طول نسل‌های متوالی شرکت نداشته‌اند، مشخص شود. روابط ریاضی ایجاد شده در جمعیت اولیه که با M جفت داده‌های مشخص شده سازگاری بیشتری دارند، به وسیله تابع برازش که میانگین مربعات خطا را به ازای هر عضو جمعیت می‌سنجد، تناسب سنجی و کدگذاری شده که این کار موجب ایجاد نظم نسبی در جمعیت اولیه می‌شود. جمعیت کدگذاری شده به وسیله یک روش مرسوم انتخاب به نام تورنومنت، به طور تصادفی انتخاب می‌گردند تا فرآیندهای تکاملی و ژنتیکی نظیر پیوند، جهش و بازتولید روی آنها صورت پذیرد. تورنومنت تعیین می‌کند که کدام واحد جمعیتی بر دیگری برتری دارد بدون اینکه مشخص کند چه مقدار [۳۵, ۳۶]. از این رو، شانس انتخاب شدن برای کل جمعیت به طور خودکار و مؤثر ثابت می‌ماند. یکی از مزایای قابل توجه تورنومنت این است که واحدهای دارای رفتار نامناسب در نسل‌های اولیه، بلافاصله حذف نمی‌شوند زیرا ممکن است ویژگی‌های مناسبی را در نسل‌های آتی از خود نشان دهند که این الگو از طبیعت مشتق شده است [۳۶, ۳۷]. در گام بعدی عملگرهای پیوند، جهش و بازتولید بر جمعیت منتخب اعمال می‌شوند. پرکاربردترین شکل پیوند، پیوند زیردرختی است [۳۳, ۳۴]. با فرض دو والد، عملگر پیوند زیردرختی به طور تصادفی غیریکنواخت و به گونه‌ای مستقل، یک نقطه پیوند (گره) را در هر یک از والدین انتخاب می‌کند. سپس با جایگزین کردن یک کپی از زیردرختی که از نقطه پیوند درخت اول حاصل شده با کپی زیر درخت دیگری که از نقطه پیوند درخت دوم به وجود آمده، درخت فرزند متولد می‌شود. کپی‌ها برای حفظ درختان اصلی و حفظ تنوع در نسل‌های بعدی به کار می‌روند. چنانچه این عمل چندین بار انجام شود، می‌تواند منجر به ایجاد چندین فرزند گردد. کوزا با رویکرد انتخاب غیریکنواخت روشی را معرفی کرد که با احتمال ۹۰ درصد گره‌های حاوی تابع و در ۱۰ درصد باقیمانده گره‌های حاوی پایانه‌ها یا همان برگ‌ها را به عنوان نقطه پیوند انتخاب می‌کند که موجب می‌شود سهم توابع در روابط ریاضی تولید شده افزایش یابد. متداول‌ترین نوع جهش که در برنامه‌ریزی ژنتیکی به کار گرفته می‌شود، جهش زیردرختی است. در این روش یک گره در درخت موردنظر به عنوان نقطه جهش انتخاب می‌شود و زیر درخت حاصل شده با یک زیر درخت که به طور تصادفی از مجموعه جمعیت انتخاب شده جایگزین می‌گردد. این عملیات توسط پارامتری کنترل می‌شود که حداکثر اندازه درخت فرعی تازه متولد شده را تعیین می‌کند. عملگر بازتولید نیز یک کپی از واحدهایی در جمعیت که برازش بهتری نسبت به بقیه اعضا دارند را وارد نسل بعد می‌کند. این عمل موجب می‌شود تا نخبگان جمعیت در طول نسل‌ها حفظ شوند. سهم هر یک از این عملگرها به ترتیب ۸۵ درصد برای پیوند، ۱۰ درصد برای جهش و ۵ درصد برای بازتولید پیشنهاد شده است [۳۲, ۳۸]. موارد مذکور تا هنگامی که شرایط خاتمه (رسیدن به تعداد

مشخصی از نسل‌ها) برقرار شود و یا اهداف محقق گردد، ادامه می‌یابد [۲۴، ۲۶، ۲۷، ۳۲-۳۵]. پس از اتمام عملیات ژنتیکی و تکرار این روند در نسل‌های متوالی، در نسل آخر مجموعه‌ای تکامل یافته از اعضا (مدل‌های ریاضی) از جواب معادله دیفرانسیل در دسترس قرار دارد. در این مرحله چون هدف یافتن تنها یک جواب از بین کل جمعیت نسل آخر برای معادله دیفرانسیل است، از ساختار داخلی یک روش بهینه‌سازی براساس الگوریتم ژنتیک، با نام الگوریتم ژنتیک چند هدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) [۳۹] استفاده شده است. برای این الگوریتم دو تابع هدف یکی کمینه تعداد کل گره‌های (نودهای) مدل‌های ریاضی موجود در نسل آخر و دیگری میزان کمینه برآزش آنها نسبت به داده‌های آموزش در نظر گرفته شده است. مدلی که نسبت به این دو تابع هدف بهینه باشد به‌عنوان جواب معادله دیفرانسیل تحت عنوان $y = y_{GPNLE}$ وارد مرحله تحلیل خطا می‌شود. الگوریتم روش پیشنهادی در شکل ۲ آمده است.



شکل ۲، الگوریتم GPNLE

۳- معیارهای خطا

در این بخش سه معیار T_{error} , ϕ , ξ جهت تحلیل خطا در نظر گرفته شده است. تابع خطای $\lambda(t)$ با جایگذاری y_{GPNLE} و مشتقاتش در معادله (۲) به دست می‌آید. در نتیجه خطای کلی مدل طبق رابطه (۳) خواهد بود:

$$\xi = \int_a^b |\lambda(x)| dx \quad (3)$$

معیار ϕ بیانگر میزان دقت مدل مستخرج در ارضای شرایط اولیه معادله (۲) است که توسط رابطه (۴) محاسبه می‌شود.

$$\phi = \sum_{k=0}^1 |y^{(k)}_{GPNLE}(p) - p_k| \quad (4)$$

همچنین تعداد $R = N - M$ جفت داده ورودی-خروجی تولید شده توسط $RK4$ که برای آزمایش مدل ذخیره شده بود، در رابطه (۵) قرار می‌گیرد تا میزان سازگاری مدل مستخرج با این داده‌ها تعیین شود.

$$T_{error} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (5)$$

که در آن y_i, \hat{y}_i به ترتیب خروجی مدل مستخرج و روش رونگه-کوتا به ازای داده x_i است. واضح است که هرگاه سه معیار T_{error}, ϕ, ξ به اندازه کافی کوچک باشند، آنگاه $y = y_{GPNLE}$ یک تقریب مناسب برای جواب معادله دیفرانسیل (۲) خواهد بود.

۴- آزمایش‌های عددی

در این بخش روش $GPNLE$ برای انواع معادلات لین-امدن به کار می‌رود. برخی از آنها دارای جواب تحلیلی (دقیق) و برخی نیز تا کنون توسط روش‌های نیمه‌تحلیلی و تقریبی مختلفی حل شده‌اند. برای هر معادله که دارای جوابی غیردقیق است، از یک روش نیمه‌تحلیلی موجود و معتبر به نام $CFDM$ [۱۵] جهت مقایسه با مدل‌های تولیدشده از جواب معادله توسط روش $GPNLE$ استفاده شده است. همچنین نمودارهای مربوط به تابع جواب، تابع خطا، و نمودار تعداد گره بهینه توام با کمترین مقدار تناسب ارایه می‌شود. تنظیمات اولیه برای هر آزمایش در جدول ۱ ارائه شده است این تنظیمات شامل مواردی چون تعداد اعضای جمعیت اولیه (برای تمامی آزمایش‌ها ۱۵۰۰ در نظر گرفته شده است)، الگوی ساخت جمعیت اولیه (مطابق بخش ۲، روش RHH است)، حداکثر تعداد نسل‌ها (۵۰ نسل برای تمامی آزمایش‌ها در نظر گرفته شده است)، تعداد داده‌های رونگه-کوتا (حسب طول گام گسسته‌سازی و حوزه تعریف هر مسئله، تعداد آن متغیر است)، معیار تناسب (میانگین مربعات خطا برای تمامی آزمایش‌ها در نظر گرفته شده است)، حداکثر عمق درختان (۴ در نظر گرفته شده است)، پایه اولیه یا مجموعه توابع و همچنین محدوده پایانه‌ها (برای تمامی آزمایش‌ها فاصله $[-1, 1]$ در نظر گرفته شده است) هستند. در انتهای جدول ۱ نیز مقادیر معیارهای خطا برای هر آزمایش و میزان خطای کلی روش حاضر و روش مقایسه‌گر درج شده است.

۴-۱- آزمایش اول: معادلات استاندارد سه گانه لین-امدن

این معادله به ازای سه مقدار مختلف m به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + y^m = 0, & x \geq 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

جواب دقیق معادله (۶) برای مقادیر مشخصی از m به صورت زیر است:

$$y = 1 - \frac{1}{6}x^2, (m = 0)$$

$$y = \frac{\sin x}{x}, (m = 1)$$

$$y = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1}, (m = 5) \quad (7)$$

این معادله تغییرات دمایی یک ابر گازی کروی را تحت جاذبه متقابل مولکول‌های آن، طبق قوانین ترمودینامیک توصیف می‌کند [۳]. روش *GPNLE* برای هر سه مقدار مشخص از m ، به جواب دقیق همگرا شده است. در هر یک از شکل‌های ۳، ۴ و ۵ به ترتیب میزان تطابق مدل مستخرج از روش *GPNLE* با جواب دقیق و داده‌های *RK4*، نمودار تابع خطا و همینطور خروجی بهینه‌سازی دو هدفه برای استخراج مدل بهینه در حالت‌های مختلفی از m نشان داده شده است. همانطور که در رابطه (۷) مشهود است، در حالت $m = 5$ ، مجموعه توابع پایه جواب دقیق، متشکل از مجموعه اعداد ثابت، توابع رادیکالی، چندجمله‌ای‌های درجه دوم و همچنین تعدادی عملگر محاسباتی است. برای محک مجدد، این مجموعه در بخش تنظیمات روش *GPNLE* به صورت $F_1 = \{AO, \sin, \cos\}$ محدود شده است تا مدلی جدید بر اساس مجموعه محدود شده F_1 برای جواب معادله (۶) در حالت $m = 5$ تولید کند. که در آن *AO* چهار عمل اصلی $\{+, -, \times, \div\}$ است. مدل مستخرج از روش *GPNLE* و جواب تقریبی حاصل از روش *CFDM* به ترتیب در روابط (۸) و (۹) نشان داده شده است:

$$y_{GPNLE} = 0.000351 \cos(2x \sin(x)) + 0.01174 \cos^2(x) - 0.06714 \sin(\sin(x)) \cdot \sin(x) - 0.02926x \cdot (2x + \sin(x)) + 0.9879 \quad (8)$$

$$y_{CFDM} = 0.99999 - 1.36002 \times 10^{-14} x - 0.16666x^2 - 4.70661 \times 10^{-9} x^3 + 0.04166x^4 - 8.80698 \times 10^{-7} x^5 - 1.15677 \times 10^{-2} x^6 - 3.17828 \times 10^{-5} x^7 + 3.49178 \times 10^{-3} x^8 - 3.11723 \times 10^{-4} x^9 - 3.92795 \times 10^{-4} x^{10} - 9.06971 \times 10^{-4} x^{11} + 1.26308 \times 10^{-3} x^{12} - 6.80095 \times 10^{-4} x^{13} + 1.83709 \times 10^{-4} x^{14} - 2.14651 \times 10^{-5} x^{15} + 2.23517 \times 10^{-7} x^{16} \quad (9)$$

۴-۲- آزمایش دوم: معادله کره‌های گازی هم‌دما

معادله (۱۰) ابتدا برای مطالعه توزیع دما در یک کره گازی هم‌دما و تحت انبساط در کیهان مورد استفاده قرار گرفت. بعدها کاربردهای دیگری از این معادله نظیر نظریه احتراق حرارتی، مدل‌سازی فرآیندهای واکنش گرمایی، انتقال حرارت رادیواکتیویته، نانو تکنولوژی، نظریه واکنش‌های شیمیایی، مدل‌سازی مواد غیر قابل تغییر شکل با چگالی ثابت در طول دوره اشتعال برای ساخت الیاف نانو، الکترواستاتیک و فیزیک پلاسما نیز در مطالعات مختلف ذکر شده است [۴۰].

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + e^{y(x)} = 0, & x \geq 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

روش‌های گوناگونی برای حل این معادله به‌ویژه تعیین یک سری توانی از جواب معادله با دقتی مناسب ارائه شده است [۸، ۱۴] اما روش *CFDM* در مقایسه با آنها عملکرد بهتری داشته است. جواب تقریبی حاصل از روش‌های *CFDM* و *GPNLE* به ترتیب در روابط (۱۱) و (۱۲) آمده است. نمودارهای مربوط به این معادله در شکل ۶ نشان داده شده است.

$$y_{GPNLE} = 0.0005186 \cos(x^2) + 0.001556 \cos^2(x) - 0.005686x^4 + 0.3302 \cos(x) - 0.3323 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y_{CFDM} = & -8.48765 \times 10^{-14} + 7.21644 \times 10^{-16}x - \\ & 0.16666x^2 - 2.86052 \times 10^{-10}x^3 + 8.33333 \\ & \times 10^{-3}x^4 - 4.10034 \times 10^{-8}x^5 - 5.28850 \times \\ & 10^{-4}x^6 - 1.06511 \times 10^{-6}x^7 + 4.06174 \times \\ & 10^{-5}x^8 - 7.32644 \times 10^{-6}x^9 + 9.36335 \times \\ & 10^{-6}x^{10} - 1.49035 \times 10^{-5}x^{11} + 1.35162 \times \\ & 10^{-3}x^{12} - 8.39866 \times 10^{-6}x^{13} + 3.53810 \times \\ & 10^{-6}x^{14} - 9.03819 \times 10^{-7}x^{15} + 1.05239 \times \\ & 10^{-7}x^{16} \end{aligned} \quad (12)$$

۴-۳- آزمایش سوم: معادله کوتوله‌های سفید:

این معادله جهت توصیف پتانسیل گرانشی ستارگان کوتوله سفید در حال مرگ، طبق رابطه (۱۳) معرفی می‌شود. دو ستاره کوتوله سفید که قدیمی‌ترین و نزدیک‌ترین ستاره شناخته شده به انسان به حساب می‌آیند، ۱۱ تا ۱۲ میلیارد سال عمر دارند و تنها ۱۰۰ سال نوری از زمین فاصله دارند. کوتوله سفید می‌تواند به اجاق گازی داغ تشبیه شود که پس از خاموش شدن، این اجاق گاز به مرور زمان به آرامی خنک می‌شود. با اندازه‌گیری میزان خنک بودن اجاق گاز، می‌توان پیش‌بینی کرد که چه مدت خاموش بوده است [۳، ۴۱].

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + (y^2 - C)^{\frac{3}{2}} = 0, & x \geq 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

برای این معادله جواب ارائه شده توسط روش‌های *CFDM* و *GPNLE* و نمودارهای مربوطه به ترتیب در روابط (۱۴) و (۱۵) و شکل ۷ نشان داده شده است.

$$y_{GPNLE} = 0.02147 \cos(\sin(x)) - 0.02138(2x)^2 - 0.02302x^2 \cos(x) + \frac{3.434 \times 10^{-5} x^2}{\cos(x)} + 0.9785 \quad (14)$$

$$y_{CFDM} = 0.9999 + 5.17641 \times 10^{-15} x - 0.11925x^2 + 4.0879 \times 10^{-9} x^3 + 0.01599x^4 + 5.57837 \times 10^{-7} x^5 - 2.04771 \times 10^{-3} x^6 + 1.36345 \times 10^{-5} x^7 + 2.18882 \times 10^{-4} x^8 - 7.74248 \times 10^{-5} x^9 + 1.72684 \times 10^{-5} x^{10} + 1.64927 \times 10^{-4} x^{11} - 1.37552 \times 10^{-4} x^{12} - 8.6358 \times 10^{-5} x^{13} - 3.59714 \times 10^{-5} x^{14} + 8.86246 \times 10^{-6} x^{15} - 9.8347 \times 10^{-7} x^{16} \quad (15)$$

۴-۴- آزمایش چهارم: معادله سینوسی لین-امدن

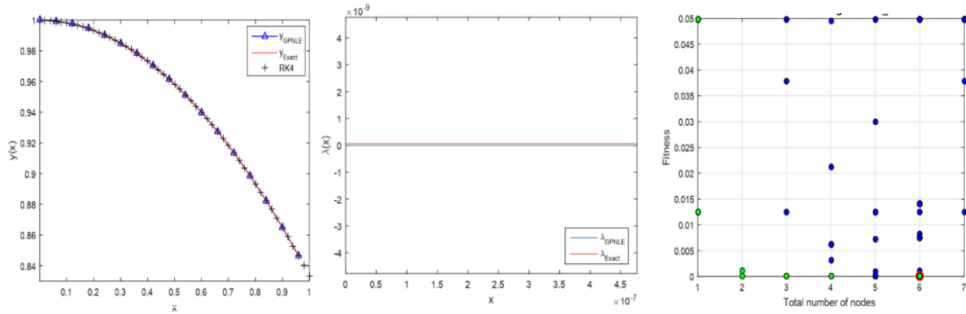
این معادله توسط رابطه (۱۶) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + \sin(y(x)) = 0, & x \geq 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

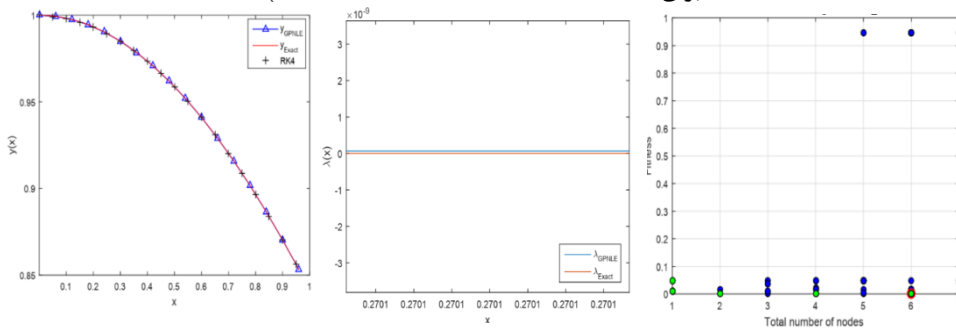
برای این معادله جواب ارایه شده توسط روش‌های $GPNLE$ و $CFDM$ و نمودارهای مربوطه به ترتیب در روابط (۱۷) و (۱۸) و شکل ۸ نشان داده شده است.

$$y_{GPNLE} = 0.03097 \cos(x) + 0.019x^2 \cos(x) - 0.072x \sin(x) - 0.07176x^2 + 0.969 \quad (17)$$

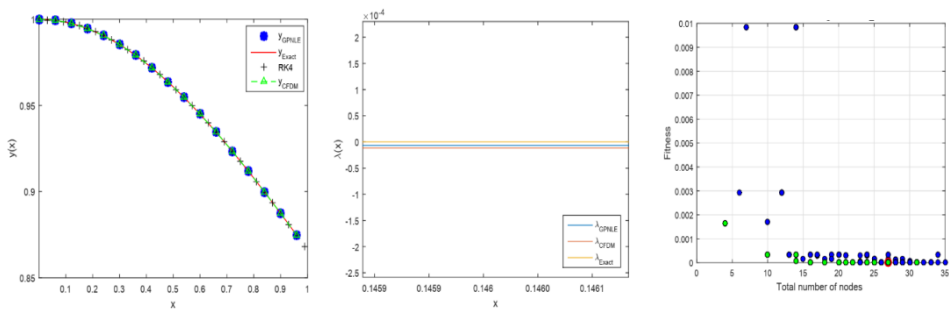
$$y_{CFDM} = 0.9999 + 1.8846 \times 10^{-14} x - 1.14024x^2 + 4.06945 \times 10^{-11} x^3 + 3.78873 \times 10^{-3} x^4 + 7.48608 \times 10^{-9} x^5 + 1.48242 \times 10^{-4} x^6 + 2.18372 \times 10^{-7} x^7 - 1.14586 \times 10^{-5} x^8 + 1.55365 \times 10^{-16} x^9 - 2.5541 \times 10^{-6} x^{10} + 3.07351 \times 10^{-6} x^{11} - 2.62114 \times 10^{-6} x^{12} + 1.5858 \times 10^{-6} x^{13} - 6.2678 \times 10^{-7} x^{14} + 1.45286 \times 10^{-7} x^{15} - 1.4901 \times 10^{-8} x^{16} \quad (18)$$



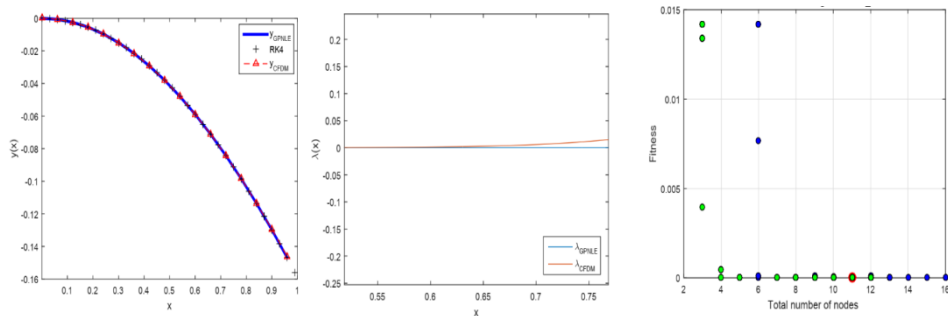
شکل ۳، از چپ به راست: نمودارهای مقایسه جواب‌ها (a)، توابع خطا (b) و خروجی بهینه‌سازی دهدفه برای استخراج مدل بهینه (c) در حالت $(m = 0)$



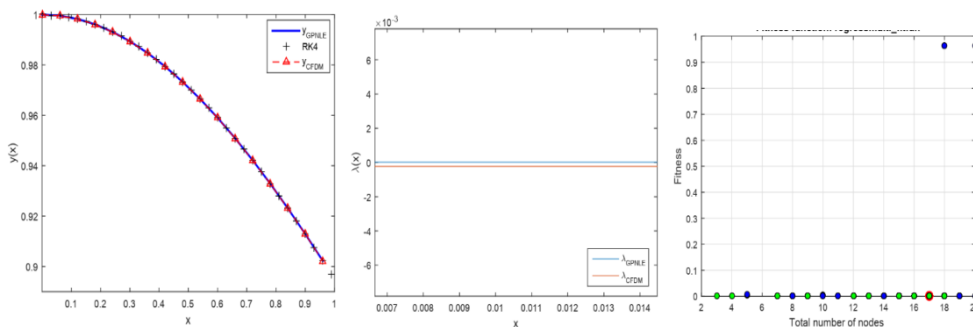
شکل ۴، از چپ به راست: نمودارهای مقایسه جواب‌ها (a)، توابع خطا (b) و خروجی بهینه‌سازی دهدفه برای استخراج مدل بهینه (c) در حالت $(m = 1)$



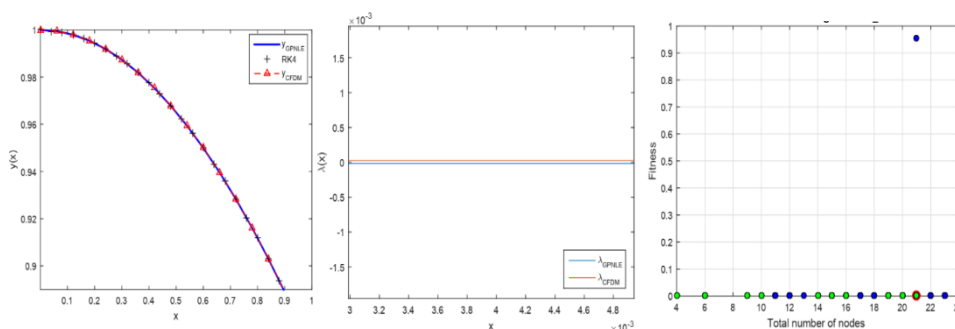
شکل ۵، از چپ به راست: نمودارهای مقایسه جواب‌ها (a)، توابع خطا (b) و خروجی بهینه‌سازی دهدفه برای استخراج مدل بهینه (c) در حالت $(m = 5)$



شکل ۶، از چپ به راست: نمودارهای مقایسه جواب‌ها (a)، توابع خطا (b) و خروجی بهینه‌سازی دهدفه برای استخراج مدل بهینه (c) در کره‌های گازی هم‌دما



شکل ۷، از چپ به راست: نمودارهای مقایسه جواب‌ها (a)، توابع خطا (b) و خروجی بهینه‌سازی دودفده برای استخراج مدل بهینه (c) در کوتوله‌های سفید



شکل ۸، از چپ به راست: نمودارهای مقایسه جواب‌ها (a)، توابع خطا (b) و خروجی بهینه‌سازی دودفده برای استخراج مدل بهینه (c) در فرم سینوسی معادله لین-امدن

جدول ۱: تنظیمات روش *GPNLE*، نتایج و معیارهای خطا برای آزمایش‌های عددی

| نوع معادله | استاندارد ($M=0$) | استاندارد ($M=1$) | استاندارد ($M=5$) | کره گازی هم‌دما | کوتوله سفید | فرم سینوسی |
|---------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| تعداد جمعیت اولیه | 1500 | 1500 | 1500 | 1500 | 1500 | 1500 |
| الگوی ساخت جمعیت اولیه | RHH | RHH | RHH | RHH | RHH | RHH |
| حداکثر تعداد نسل‌ها | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| تعداد داده‌های رونگه-کوتا | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 2500 | 2500 |
| الگوی انتخاب | تورنومنت | تورنومنت | تورنومنت | تورنومنت | تورنومنت | تورنومنت |
| معیار تناسب | میانگین مربعات خطا | میانگین مربعات خطا | میانگین مربعات خطا | میانگین مربعات خطا | میانگین مربعات خطا | میانگین مربعات خطا |
| حداکثر عمق درختان | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 |

| پایه اولیه (توابع) | $F = \{AO, \sqrt{t}, \sin, \cos\}$ | $F = \{AO, \sqrt{t}, \sin, \cos\}$ | $F = \{AO, \sqrt{t}, \sin, \cos\}$ | $F = \{AO, \sqrt{t}, \sin, \cos\}$ | $F = \{AO, \sqrt{t}, \sin, \cos\}$ | $F = \{AO, \sqrt{t}, \sin, \cos\}$ |
|--|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| محدوده ترمینال‌ها | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ |
| معیار توقف | حداکثر تعداد نسل‌ها | حداکثر تعداد نسل‌ها | حداکثر تعداد نسل‌ها | حداکثر تعداد نسل‌ها | حداکثر تعداد نسل‌ها | حداکثر تعداد نسل‌ها |
| تعداد گره در حالت بهینه | 21 | 17 | 11 | 27 | 6 | 6 |
| میانگین زمان اجرا (ثانیه) | 148 | 127 | 135 | 171 | 162 | 112 |
| معیار ϕ | 3×10^{-5} | 3×10^{-5} | 2.54×10^{-5} | 9×10^{-6} | 0 | 0 |
| معیار T_{error} برای ۱۰ درصد داده‌های آزمایشی | 8.76×10^{-10} | 6.44×10^{-10} | 4.97×10^{-10} | 5.4×10^{-11} | 6.82×10^{-21} | 7.49×10^{-10} |
| معیار ξ_{GPNLE} | 9.18×10^{-6} | 1.99×10^{-5} | 3.4×10^{-5} | 4.78×10^{-6} | 0 | 0 |
| معیار ξ_{CFDM} | 4.05×10^{-5} | 3×10^{-3} | 0.019 | 5.25×10^{-5} | 8.2×10^{-5} | 4×10^{-5} |

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه برای تبیین پتانسیل موجود در الگوریتم‌های تکاملی جهت حل معادلات دیفرانسیل پر کاربرد لین-امدن، از برنامه‌سازی ژنتیکی و ترکیب آن با روش عددی $RK4$ ، در قالب یک روش جدید به نام $GPNLE$ استفاده شده است. برای ارزیابی عملکرد روش حاضر در برآورده‌سازی دقت مطلوب برای هر یک از آزمایش‌های عددی، یک روش جدید و قدرتمند بر پایه چند جمله‌ای‌های چیبیشف ($CFDM$) جهت مقایسه به کارگیری شده است و نتایج به دست آمده با پارامترهای انتخابی جدول ۱ و شکل‌های ۳ الی ۸ صحت عملکرد بهتر روش $GPNLE$ را نسبت به روش موجود، تأیید می‌کند که در ادامه تشریح خواهد شد. بررسی‌های انجام شده در این مطالعه نشان داده‌اند که استفاده از داده‌های $RK4$ یک ایده مؤثر بوده است. زیرا نقش مهمی را در آموزش جمعیت اولیه (جهت صرفه جویی زمانی و محاسباتی در کاوش فضای جستجو و جهت‌گیری آن به سمت تولید مدل‌های سازگار با معادله) و حدس اولیه در خصوص تعیین عناصر مجموعه توابع، عملگرها و ترمینال‌ها دارند. این امر باعث شده با توجه به اینکه $GPNLE$ برآمده از برنامه‌سازی ژنتیکی بوده و یک روش مبتنی بر احتمالات است، اما در تعداد محدودی از اجراها (حداکثر ۱۱ مرتبه) به نتایج مورد نظر دست یابد. نظر به آزمایش‌های عددی صورت گرفته در بخش ۴، به کارگیری $GPNLE$ منجر به تولید مدل‌های ریاضی با دقت بالا از جواب انواع گوناگونی از معادلات لین-امدن شده است. این موضوع در شکل‌های ۳ (a) الی ۸ (a) کاملاً مشهود است. در این اشکال، میزان تطابق مؤثر مدل به دست آمده از روش $GPNLE$ با داده‌های $RK4$ و جواب حاصل از روش $CFDM$ نشان شده است. همچنین شکل‌های ۳ (b) الی ۸ (b) نیز بر این موضوع دلالت دارد که وقتی مدل‌های تولید شده توسط روش $GPNLE$ و مشتقاتش در معادلات دیفرانسیل نظیر با هر آزمایش عددی قرار می‌گیرد، خطای کمتری نسبت به جواب‌های نظیر به دست آمده توسط $CFDM$ برمی‌گرداند. میزان انحراف تابع $\lambda(t)$ مربوط به روش‌های $GPNLE$ و $CFDM$ از تابع صفر، این ادعا را اثبات می‌کند که مقادیر عددی این انحرافات در هر آزمایش توسط شاخص‌های

ξ_{CFDM} و ξ_{GPNLE} در جدول ۱ مقایسه شده‌اند. به‌علاوه در شکل‌های ۳ (C) الی ۸ (C)، نقاط سبز رنگ، متناظر با اعضای از جمعیت نسل آخر هستند که در جبهه پارتو قرار دارند. این اعضا نسبت به دو هدف کمینه تعداد گره‌های تشکیل دهنده مدل متناظر (پیچیدگی ساختاری) و کمینه مقدار برازش مدل نسبت به داده‌های آموزش بهینه‌اند که از بین اعضای جبهه پارتو عضوی که کمترین مقدار برازش را به‌خود اختصاص می‌دهد (نقطه با حاشیه قرمز) به‌عنوان مدل مستخرج انتخاب شده است. لذا نظر به رفتار تابع $\lambda(t)$ و نیز مقادیر ξ_{CFDM} و ξ_{GPNLE} مندرج در جدول ۱، استراتژی استفاده از بهینه‌سازی دوهدفه نیز ثمربخش بوده است. $GPNLE$ حتی نسبت به تغییر مجموعه پایه جواب انعطاف پذیر است (حالت $m=5$ در آزمایش عددی اول را ببینید). محدودیت اساسی حاکم بر $GPNLE$ این است که برای حصول نتایج دقیق‌تر و افزایش تنوع ساختاری در جمعیت اولیه با ازدیاد تعداد اعضای جمعیت و تعداد نسل‌ها که دو پارامتر اساسی برنامه‌سازی ژنتیکی هستند، هزینه محاسباتی به شدت افزایش می‌یابد که این امر می‌تواند با استفاده از سیستم پردازش موازی متلب و به‌کارگیری سخت افزار مورد نیاز آن مرتفع شود. $GPNLE$ همچنین قابلیت توسعه برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه کسری، معادلات تصادفی و معادلات جزئی را دارد.

۱. Powell, C.S., *J. Homer Lane and the internal structure of the Sun*. Journal for the History of Astronomy, ۱۹۸۸. ۱۹(۳): p. ۱۸۳-۱۹۹.
۲. Maciel, W.J., *Introduction to stellar structure*. ۲۰۱۵: Springer.
۳. Chandrasekhar, S. and S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*. Vol. ۲. ۱۹۵۷: Courier Corporation.
۴. Duggan, R. and A. Goodman, *Pointwise bounds for a nonlinear heat conduction model of the human head*. Bulletin of mathematical biology, ۱۹۸۶. ۴۸(۲): p. ۲۲۹-۲۳۶.
۵. Reger, K. and R. Van Gorder, *Lane-Emden equations of second kind modelling thermal explosion in infinite cylinder and sphere*. Applied Mathematics and Mechanics, ۲۰۱۳. ۳۴(۱۲): p. ۱۴۳۹-۱۴۵۲.
۶. Wazwaz, A.-M., *Solving the non-isothermal reaction-diffusion model equations in a spherical catalyst by the variational iteration method*. Chemical Physics Letters, ۲۰۱۷. ۶۷۹: p. ۱۳۲-۱۳۶.
۷. Horedt, G., *Exact solutions of the Lane-Emden equation in N-dimensional space*. Astronomy and Astrophysics, ۱۹۸۶. ۱۶۰: p. ۱۴۸-۱۵۶.
۸. Ramos, J., *Series approach to the Lane-Emden equation and comparison with the homotopy perturbation method*. Chaos, Solitons & Fractals, ۲۰۰۸. ۳۸(۲): p. ۴۰۰-۴۰۸.
۹. Bender, C.M., et al., *A new perturbative approach to nonlinear problems*. Journal of mathematical Physics, ۱۹۸۹. ۳۰(۷): p. ۱۴۴۷-۱۴۵۵.
۱۰. He, J.-H., *Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique*. Applied Mathematics and computation, ۲۰۰۳. ۱۳۵(۱): p. ۷۳-۷۹.
۱۱. Singh, M. and A.K. Verma, *An effective computational technique for a class of Lane-Emden equations*. Journal of Mathematical Chemistry, ۲۰۱۶. ۵۴(۱): p. ۲۳۱-۲۵۱.
۱۲. Van Gorder, R.A. and K. Vajravelu, *Analytic and numerical solutions to the Lane-Emden equation*. Physics Letters A, ۲۰۰۸. ۳۷۲(۳۹): p. ۶۰۶۰-۶۰۶۵.

۱۳. He, J.-H., *Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples*. International journal of non-linear mechanics, ۱۹۹۹. ۳۴(۴): p. ۶۹۹-۷۰۸.
۱۴. Wazwaz, A.-M., *A new algorithm for solving differential equations of Lane–Emden type*. Applied mathematics and computation, ۲۰۰۱. ۱۱۸(۲-۳): p. ۲۸۷-۳۱۰.
۱۵. Aydinlik, S. and A. Kiris, *A high-order numerical method for solving nonlinear Lane–Emden type equations arising in astrophysics*. Astrophysics and Space Science, ۲۰۱۸. ۳۶۳(۱۲): p. ۱-۱۲.
۱۶. Bildik, N. and S. Deniz, *Comparative study between optimal homotopy asymptotic method and perturbation-iteration technique for different types of nonlinear equations*. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, ۲۰۱۸. ۴۲(۲): p. ۶۴۷-۶۵۴.
۱۷. Bhrawy, A.H. and A.S. Alofi, *A Jacobi–Gauss collocation method for solving nonlinear Lane–Emden type equations*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, ۲۰۱۲. ۱۷(۱): p. ۶۲-۷۰.
۱۸. Yang, C. and J. Hou, *A numerical method for Lane–Emden equations using hybrid functions and the collocation method*. Journal of Applied Mathematics, ۲۰۱۲. ۲۰۱۲.
۱۹. Aminikhah, H. and S. Kazemi, *On the numerical solution of singular Lane–Emden type equations using cubic B-spline approximation*. International Journal of Applied and Computational Mathematics, ۲۰۱۷. ۳(۲): p. ۷۰۳-۷۱۲.
۲۰. Pandey, R.K. and N. Kumar, *Solution of Lane–Emden type equations using Bernstein operational matrix of differentiation*. New Astronomy, ۲۰۱۲. ۱۷(۳): p. ۳۰۳-۳۰۸.
۲۱. Balaji, S., *A new Bernoulli wavelet operational matrix of derivative method for the solution of nonlinear singular Lane–Emden type equations arising in astrophysics*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, ۲۰۱۶. ۱۱(۵).
۲۲. Singh, R., H. Garg, and V. Guleria, *Haar wavelet collocation method for Lane–Emden equations with Dirichlet, Neumann and Neumann–Robin boundary conditions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, ۲۰۱۹. ۳۴۶: p. ۱۵۰-۱۶۱.
۲۳. Banzhaf, W., *Artificial intelligence: Genetic programming*. International encyclopedia of the social & behavioral sciences, ۲nd edn. Elsevier, Oxford, ۲۰۱۵: p. ۴۱-۴۵.
۲۴. Koza, J.R., *Genetic Programming, On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. A Bradford Book. MIT Press, ۱۹۹۲.

۲۵. Al-Hayani, W., L. Alzubaidy, and A. Entesar, *Solutions of Singular IVP's of Lane-Emden type by Homotopy analysis method with Genetic Algorithm*. Applied Mathematics & Information Sciences, ۲۰۱۷. ۱۱(۲): p. ۴۰۷-۴۱۶.
۲۶. Iba, H., *Inference of differential equation models by genetic programming*. Information Sciences, ۲۰۰۸. ۱۷۸(۲۳): p. ۴۴۵۳-۴۴۶۸.
۲۷. Lobão, W.J., D.M. Dias, and M.A.C. Pacheco. *Genetic programming and automatic differentiation algorithms applied to the solution of ordinary and partial differential equations*. in ۲۰۱۶ IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). ۲۰۱۶. IEEE.
۲۸. Chauhan, V. and P.K. Srivastava, *Computational techniques based on Runge-Kutta method of various order and type for solving differential equations*. International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, ۲۰۱۹. ۴(۲): p. ۳۷۵.
۲۹. Bukhari, A.H., et al., *Design of intelligent computing networks for nonlinear chaotic fractional Rossler system*. Chaos, Solitons & Fractals, ۲۰۲۲. ۱۵۷: p. ۱۱۱۹۸۵.
۳۰. D'Ambrosio, R. and C. Scalone, *Two-step Runge-Kutta methods for stochastic differential equations*. Applied Mathematics and Computation, ۲۰۲۱. ۴۰۳: p. ۱۲۵۹۳۰.
۳۱. Jackson, D. *Promoting phenotypic diversity in genetic programming*. in *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. ۲۰۱۰. Springer.
۳۲. Zhang, F., et al., *Genetic Programming for Production Scheduling*. ۲۰۲۱: Springer.
۳۳. Iba, H., *Swarm Intelligence and Deep Evolution: Evolutionary Approach to Artificial Intelligence*. ۲۰۲۲: CRC Press.
۳۴. Jamali, A., et al., *Modelling and prediction of complex non-linear processes by using Pareto multi-objective genetic programming*. International Journal of Systems Science, ۲۰۱۶. ۴۷(۷): p. ۱۶۷۵-۱۶۸۸.
۳۵. Iba, H., Y. Hasegawa, and T.K. Paul, *Applied genetic programming and machine learning*. ۲۰۰۹: cRc Press.
۳۶. Banzhaf, W., et al., *Genetic Programming Theory and Practice XVIII*. ۲۰۲۲: Springer.
۳۷. Lavinias, Y., et al. *Experimental analysis of the tournament size on genetic algorithms*. in ۲۰۱۸ IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). ۲۰۱۸. IEEE.

۳۸. Searson, D.P., *GPTIPS ۲: an open-source software platform for symbolic data mining*, in *Handbook of genetic programming applications*. ۲۰۱۵, Springer. p. ۵۵۱-۵۷۳.

۳۹. Deb, K., et al., *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II*. IEEE transactions on evolutionary computation, ۲۰۰۲. ۶(۲): p. ۱۸۲-۱۹۷.

۴۰. Hichar, S., et al., *Application of nonlinear Bratu's equation in two and three dimensions to electrostatics*. Reports on mathematical physics, ۲۰۱۵. ۷۶(۳): p. ۲۸۳-۲۹۰.

۴۱. Kilic, M., et al., ۱۱-۱۲ *Gyr old white dwarfs ۳۰ pc away*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, ۲۰۱۲. ۴۲۳(۱): p. L۱۳۲-L۱۳۶.