دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حرکت اعضای گروه‌های جایگشتی دووجهی متناهی

مهدی رضائی*

گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۳/۲۸   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۲۰

چکیده

فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی یک مجموعه Ω باشد به طوری که هیچ نقطه ثابتی در Ω نداشته باشد و فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر برای هر زیرمجموعه Γ از Ω و هر g از G اندازه‌های $\left|\Gamma^g-\Gamma\right|$ کراندار باشند، آن‌گاه حرکت Γ و حرکت g به ترتیب با نمادهای $\mathrm{move}(\Gamma)$ و $\mathrm{move}(g)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند: $\mathrm{move}(\Gamma):=\max\left\{\left|\Gamma^g-\Gamma\right| \mid g\in G\right\}$ و $\mathrm{move}(g):=\max\left\{\left|\Gamma^g-\Gamma\right| \mid \Gamma\subseteq\Omega\right\}$. اگر برای هر زیرمجموعه Γ از Ω داشته باشیم $\mathrm{move}(\Gamma)\le m$، آن‌گاه G با حرکت کراندار m نامیده شده و حرکت G به صورت زیر تعریف می‌شود: $\mathrm{move}(G):=\max\left\{\left|\Gamma^g-\Gamma\right| \mid \Gamma\subseteq\Omega\,,g\in G\right\}$. در این مقاله به بررسی حرکت اعضای گروه دووجهی از مرتبه $2n$ که با نماد D_n نشان داده می‌شود، می‌پردازیم. برای این کار ابتدا نشان می‌دهیم که این گروه روی مجموعه $\{1,\dots,n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. سپس ساختار دوری اعضای این گروه‌ها و حرکت این اعضا تعیین می‌شوند. در انتها، حالتی که n یک عدد اول فرد باشد بررسی می‌شود و نشان می‌دهیم که حرکت تمامی عناصر گروه دووجهی در این حالت یکسان می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: حرکت، گروه دووجهی، انتقالی، دور.

---

* عهده‌دار مکاتبات: Email: mehdrezaei@gmail.com, m_rezaei@bzte.ac.ir

۱- مقدمه

برای اولین بار پرگر[1] تعریف جدیدی را در مورد دسته‌ای خاص از گروه‌های جایگشتی در [4] عنوان نمود و آن را حرکت یک گروه جایگشتی نامید. برای یک گروه جایگشتی G روی یک مجموعه Ω، اگر برای زیرمجموعه Γ از Ω و هر g از G اندازه‌های $\left|\Gamma^g - \Gamma\right|$ کراندار باشند، آن‌گاه حرکت Γ و حرکت g به ترتیب با نمادهای $\mathrm{move}(\Gamma)$ و $\mathrm{move}(g)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{move}(\Gamma) := \max\left\{\left|\Gamma^g - \Gamma\right| \middle| g \in G\right\}$$

و

$$\mathrm{move}(g) := \max\left\{\left|\Gamma^g - \Gamma\right| \middle| \Gamma \subseteq \Omega\right\}.$$

اگر برای هر زیرمجموعه Γ از Ω عدد صحیح مثبت m موجود باشد که $\mathrm{move}(\Gamma) \le m$، آن‌گاه G را با حرکت کراندار m گویند و حرکت G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{move}(G) := \max\left\{\left|\Gamma^g - \Gamma\right| \middle| \Gamma \subseteq \Omega\,, g \in G\right\}.$$

پرگر در [4] ثابت کرده است که درجه، طول و تعداد مدارهای گروه‌های با حرکت کراندار m، محدود به تابعی از m می‌باشند. گروه جایگشتی G روی یک مجموعه Ω انتقالی عمل می‌کند، هرگاه برای هر دو نقطه α و β از Ω، عضو $g \in G$ موجود باشد به طوری که $\alpha^g = \beta$. اگر هر عضو غیر همانی G دارای حرکت یکسان m باشد، آن‌گاه G را با حرکت یکسان m گویند. به وضوح هر گروه جایگشتی با حرکت یکسان، با حرکت کراندار نیز می‌باشد، ولی لزوماً عکس این مطلب صحیح نیست. به عنوان مثال گروه متقارن S_4 در عمل انتقالی خود روی مجموعه $\{1,2,3,4\}$ دارای حرکت کراندار ۲ است ولی حرکت تمامی اعضای آن ۲ نیست و لذا یک گروه با حرکت یکسان نمی‌باشد. مفهوم حرکت یکسان برای اولین بار در [1] بیان شد.

یک جایگشت $(a_1 \ldots a_n)$ که در آن a_iها اعداد طبیعی هستند را یک دور به طول n می‌نامیم. می‌گوییم عضو $g \in G$ یک نقطه مانند α از Ω را ثابت نگه می‌دارد، هرگاه $\alpha^g = \alpha$. به طور کلی مجموعه تمام نقاط ثابت g در Ω را با $\mathrm{fix}(g)$ نشان می‌دهیم. اگر در تجزیه g به حاصلضرب دورهای مجزا، t_1 دور به طول ۱، t_2 دور به طول ۲، ... و در نهایت t_n دور به طول n ظاهر شود، گوییم g دارای ساختار دوری $(t_1,\ldots,t_n)$ می‌باشد. ساختار دوری عضو g را با $cs(g)$ نشان می‌دهیم. گروه دووجهی از مرتبه $2n$ با نماد D_n نشان داده شده و به صورت $D_n = \left\langle a,b \middle| a^n = b^2 = 1,\, b^{-1}ab = a^{-1}\right\rangle$ تعریف می‌شود. می‌دانیم که اعضای D_n به صورت زیر می‌باشند: $\{1,a,\ldots,a^{n-1},b,ab,\ldots,a^{n-1}b\}$.

گروه $G = K \rtimes H$ که به صورت ضرب نیم مستقیم زیرگروه نرمال K و زیرگروه H از گروه G نوشته می‌شود را یک گروه فروبنیوس روی یک مجموعه Ω گویند، هرگاه G روی Ω انتقالی عمل کند و در این عمل، تنها عضو همانی، بیش از یک نقطه را ثابت نگه دارد. یعنی، برای هر $1 \ne g \in G$ داشته باشیم $|\mathrm{fix}(g)| \le 1$. می‌دانیم که گروه دووجهی از مرتبه $2n$، برای n های فرد، یک گروه فروبنیوس است. ([2] را ببینید). هدف این مقاله محاسبه حرکت اعضای گروه دووجهی D_n در نمایش جایگشتی انتقالی آن روی مجموعه $\{1,\ldots,n\}$ می‌باشد. منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

1. C.E. Praeger

۲- نتایج مقدماتی

فرض کنیم G یک گروه جایگشتی روی یک مجموعه Ω و g یک عضو غیر همانی G باشد. همچنین فرض کنیم در نمایش g به صورت حاصلضربی از دورهای مجزا، t دور نابدیهی از طول‌های $l_t,\dots,l_1$ وجود داشته باشند. در این صورت می‌توانیم g را به صورت $g=c_1\dots c_t$ نشان دهیم که در آن برای هر $1\le i\le t$، داریم $|c_i|=l_i$ و $c_i=(c_{i_1}\dots c_{i_{l_t}})$.

فرض کنیم $\Gamma(g)$ یک زیرمجموعه از Ω باشد به طوری که برای هر i، شامل $\left\lfloor \frac{l_i}{2}\right\rfloor$ نقاط از $i-$امین دور g است و همچنین نقاط طوری انتخاب شوند که $\Gamma(g)^g\cap\Gamma(g)=\phi$.

لذا می‌توانیم $\Gamma(g)$ را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$\Gamma(g)=\left\{c_{1_2},c_{1_4},\dots,c_{1_{k_1}},c_{2_2},c_{2_4},\dots,c_{2_{k_2}},\dots,c_{t_2},c_{t_4},\dots,c_{t_{k_t}}\right\}$$

که در آن اگر l_i فرد باشد، $k_i=l_i-1$ را در نظر می‌گیریم و اگر l_i زوج باشد، $k_i=l_i$ در نظر گرفته می‌شود.

توجه شود که $\Gamma(g)$ به شکل منحصر به فرد مشخص نمی‌شود و بستگی به نوشتن دورهای g دارد. برای هر زیرمجموعه $\Gamma(g)$ از این نوع، می‌گوییم که $\Gamma(g)$ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور نابدیهی g است. حال می‌توان نتیجه گرفت که

$$\left|\Gamma(g)^g-\Gamma(g)\right|=\left|\Gamma(g)\right|=\sum_{i=1}^{t}\left\lfloor \frac{l_i}{2}\right\rfloor.$$

لم بعدی نشان می‌دهد که مقدار فوق، به ازای هر زیرمجموعه دلخواه Γ از Ω، یک کران بالا برای $\left|\Gamma^g-\Gamma\right|$ می‌باشد.

لم ۱.۲: (لم ۱.۲ از [3]) فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی یک مجموعه Ω باشد و $\Gamma\subseteq\Omega$. در این صورت برای هر $g\in G$، $\left|\Gamma^g-\Gamma\right|\le\sum_{i=1}^{t}\left\lfloor \frac{l_i}{2}\right\rfloor$ که l_i طول $i-$امین دور g و t تعداد دورهای نابدیهی g در نمایش دور مجزای آن می‌باشد.

به عنوان یک نتیجه مستقیم از لم فوق می‌توان گفت که با در نظر گرفتن نمایش ذکر شده g به صورت حاصلضرب دورهای مجزای از طول‌های l_i، داریم: $\mathrm{move}(g)=\sum_{i=1}^{t}\left\lfloor \frac{l_i}{2}\right\rfloor$.

حال گروه دووجهی D_n را از نگاه هندسی در نظر می‌گیریم. این گروه به عنوان گروه تقارن‌های یک n-ضلعی منظم در نظر گرفته می‌شود و شامل n دوران حول مرکز n-ضلعی به اندازه $\frac{2k\pi}{n}$ رادیان برای $k\in\{1,\dots,n\}$ در جهت مثلثاتی و n انعکاس نسبت به n محور تقارن n-ضلعی می‌باشد. گروه D_n روی مجموعه رئوس n-ضلعی، که مجموعه $\{1,\dots,n\}$ در نظر می‌گیریم، عمل می‌کند و با توجه به فرد یا زوج بودن n، مولدهایش تعیین می‌شوند. در واقع، با در نظر گرفتن $b=(1\ n)(2\ n-1)\dots(k\ k+1)$ که در آن k یک عدد طبیعی بوده و $n=2k$ یا $n=2k+1$ و $a=(1\dots n)$، می‌توان D_n را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$D_n=\left\langle a,b\,\middle|\,a^n=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle .$$

۳- نتایج اصلی و مثال‌ها

در این بخش، نتایج اصلی این مقاله ارائه می‌گردند. ابتدا در لم زیر نشان می‌دهیم که گروه دووجهی D_n به عنوان یک گروه جایگشتی روی مجموعه $\{1,\dots,n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند.

لم ۱.۳: گروه دووجهی D_n روی مجموعه $\{1,...,n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند.

برهان: فرض کنیم i و j دو نقطه در $\Omega=\{1,...,n\}$ باشند بطوری که $i<j$. در واقع این دو نقطه، رئوس یک n-ضلعی منظم می‌باشند. در این صورت $(1...i...j...n)^{j-i}$ یک دوران حول مرکز این n-ضلعی منظم می‌باشد که i را به j منتقل می‌کند.

اکنون مثال‌هایی از گروه‌های جایگشتی دووجهی D_n برای n های زوج و فرد ارائه می‌دهیم و حرکت اعضای آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۲.۳: فرض کنید $G\cong D_4=\langle(1234),(14)(23)\rangle$ که روی مجموعه $\{1,2,3,4\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. در این صورت G بجز عنصر همانی، دارای دو عضو g_1 و g_2 به صورت یک دور به طول ۴، دو عضو g_3 و g_4 به صورت یک دور به طول ۲ و سه عضو g_5، g_6 و g_7 به صورت حاصلضرب دو دور به طول ۲ می‌باشد که

$$|\mathrm{fix}(g_1)|=|\mathrm{fix}(g_2)|=|\mathrm{fix}(g_5)|=$$
$$|\mathrm{fix}(g_6)|=|\mathrm{fix}(g_7)|=\varnothing$$

و $|\mathrm{fix}(g_3)|=|\mathrm{fix}(g_4)|=2$. لذا با در نظر گرفتن مجموعه Γ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور از این اعضا، مشاهده می‌شود که

$$\mathrm{move}(g_1)=\mathrm{move}(g_2)=\mathrm{move}(g_5)=$$
$$\mathrm{move}(g_6)=\mathrm{move}(g_7)=2$$

و $\mathrm{move}(g_3)=\mathrm{move}(g_4)=1$. در نتیجه این گروه با حرکت کراندار ۲ می‌باشد.

مثال ۳.۳: عمل انتقالی گروه فروبنیوس $G\cong D_5=\langle(12345),(15)(24)\rangle$ روی مجموعه $\{1,2,3,4,5\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت G بجز عنصر همانی، دارای چهار عضو g_1، g_2، g_3 و g_4 به صورت یک دور به طول ۵ و پنج عضو g_5، g_6، g_7، g_8 و g_9 به صورت حاصلضرب دو دور به طول ۲ می‌باشد که

$$|\mathrm{fix}(g_1)|=|\mathrm{fix}(g_2)|=|\mathrm{fix}(g_3)|=$$
$$|\mathrm{fix}(g_4)|=\varnothing$$

و

$$|\mathrm{fix}(g_5)|=|\mathrm{fix}(g_6)|=|\mathrm{fix}(g_7)|=$$
$$|\mathrm{fix}(g_8)|=|\mathrm{fix}(g_9)|=1$$

با در نظر گرفتن مجموعه Γ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور از این اعضا، مشاهده می‌شود که $\mathrm{move}(g_1)=...=\mathrm{move}(g_9)=2$ و لذا این گروه با حرکت یکسان ۲ می‌باشد.

حال در گزاره زیر، ساختار دوری اعضای گروه‌های جایگشتی دووجهی D_n برای nهای زوج و فرد مشخص می‌گردد.

گزاره ۴.۳: ساختار دوری اعضای گروه جایگشتی دووجهی $D_n=\langle a,b\,|\,a^n=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ به صورت زیر می‌باشند:

الف) اگر $n=2k$، آن‌گاه

$$cs(a)=(\overbrace{0,...,0}^{n-1},1),\ \ cs(b)=(0,k,\overbrace{0,...,0}^{n-2})$$

و

$$cs(a^i)=(\overbrace{0,...,0}^{\frac{n}{(n,i)}-1},(n,i),\overbrace{0,...,0}^{n-\frac{n}{(n,i)}})$$

و

$$cs(a^ib)=\begin{cases}(0,k,\overbrace{0,...,0}^{k-2}) & \text{زوج}\\ (0,k-1,\overbrace{0,...,0}^{k-2}) & \text{فرد}\end{cases}$$

ب) اگر $n=2k+1$، آن‌گاه

$$cs(a)=(\overbrace{0,\dots,0}^{n-1},1)$$

و

$$cs(a^ib)=cs(b)=(0,k,\overbrace{0,\dots,0}^{n-2})$$

و

$$cs(a^i)=(\overbrace{0,\dots,0}^{\frac{n}{(n,i)}-1},(n,i),\overbrace{0,\dots,0}^{n-\frac{n}{(n,i)}})\,.$$

برهان: از آنجایی که a یک دوران حول مرکز n-ضلعی به اندازه $\frac{2\pi}{n}$ رادیان در جهت مثلثاتی می‌باشد، می‌توان نوشت: $a=(1\dots n)$. پس ساختار دوری a معلوم می‌شود. از طرفی می‌دانیم که a^i ها دوران‌هایی حول مرکز n-ضلعی به اندازه $\frac{2\pi i}{n}$ رادیان در جهت مثلثاتی می‌باشند که از مرتبه $\frac{n}{(n,i)}$ هستند. پس به صورت (n,i) دور به طول $\frac{n}{(n,i)}$ می‌باشند و لذا

$$cs(a^i)=(\overbrace{0,\dots,0}^{\frac{n}{(n,i)}-1},(n,i),\overbrace{0,\dots,0}^{n-\frac{n}{(n,i)}})\,.$$

فرض کنیم $n=2k$. از آنجایی که b یک انعکاس نسبت به محور تقارن افقی n-ضلعی می‌باشد، پس b به صورت حاصلضرب k دور به طول ۲ می‌باشد و لذا $cs(b)=(0,k,\overbrace{0,\dots,0}^{n-2})$. ساختار دوری اعضای a^ib را در دو حالتی که k فرد یا زوج است جداگانه بررسی می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم k فرد باشد. در این صورت a و b هر دو جایگشتی فرد هستند. همچنین a^iها برای iهای زوج، جایگشتی زوج و برای iهای فرد، جایگشتی فرد هستند. در نتیجه a^ibها برای iهای زوج، جایگشتی فرد و برای iهای فرد، جایگشتی زوج هستند. از آنجایی که از نظر هندسی، a^ib ها حداکثر دو نقطه را می‌توانند ثابت نگه دارند، پس برای i های زوج به صورت k دور به طول ۲ و برای i های فرد به صورت $k-1$ دور به طول ۲ می‌باشند. در نتیجه داریم

$$cs(a^ib)=\begin{cases}(0,k,\overbrace{0,\dots,0}^{k-2}) & \text{زوج}\\ (0,k-1,\overbrace{0,\dots,0}^{k-2}) & \text{فرد}\end{cases}.$$

حال فرض کنیم k عددی زوج باشد. در این صورت a جایگشتی فرد و b جایگشتی زوج می‌باشد. از طرفی a^i ها برای i های زوج، جایگشتی زوج و برای i های فرد، جایگشتی فرد هستند. در نتیجه a^ib ها برای i های زوج، جایگشتی زوج و برای i های فرد، جایگشتی فرد هستند. چون از نظر هندسی، a^ib ها حداکثر دو نقطه را می‌توانند ثابت نگه دارند، پس برای i های زوج به صورت k دور به طول ۲ و برای i های فرد به صورت $k-1$ دور به طول ۲ می‌باشند. در نتیجه داریم

$$cs(a^ib)=\begin{cases}(0,k,\overbrace{0,\dots,0}^{k-2}) & \text{زوج}\\ (0,k-1,\overbrace{0,\dots,0}^{k-2}) & \text{فرد}\end{cases}.$$

حال فرض کنیم $n=2k+1$. چون b به صورت حاصلضرب k دور به طول ۲ می‌باشد داریم $cs(b)=(0,k,\overbrace{0,\dots,0}^{n-2})$. با توجه به اینکه از نظر هندسی، a^ibها حداکثر دو نقطه را می‌توانند ثابت نگه دارند، پس باید به صورت حاصلضرب k دور به طول ۲ باشند. در نتیجه ساختار دوری یکسان با b خواهند داشت.

اکنون قضیه اصلی این مقاله را بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۳: فرض کنید G گروه جایگشتی دووجهی D_n باشد که روی مجموعه $\Omega=\{1,\dots,n\}$

به صورت انتقالی عمل می‌کند. در این صورت G با حرکت کراندار $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ می‌باشد و با نمادهای گزاره فوق داریم:

$$\text{move}(a) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \text{move}(b) = k$$

و $\text{move}(a^i) = (n,i)\left\lfloor \frac{n}{2(n,i)} \right\rfloor$، که در آن $2 \le i \le n-1$. همچنین

الف) اگر $n = 2k$، آن‌گاه

$$\text{move}(a^i b) = \begin{cases} k & k \text{ زوج} \\ k-1 & k \text{ فرد} \end{cases}$$

ب) اگر $n = 2k+1$، آن‌گاه $\text{move}(a^i b) = k$.

برهان: با توجه به ساختار دوری اعضای گروه دووجهی D_n ذکر شده در گزاره ۴.۳ و انتخاب مجموعه Γ متشکل از هر نقطه دوم از هر دور از این اعضا، مقادیر حرکت اعضای این گروه تعیین می‌گردند. همچنین چون برای هر زیرمجموعه Γ از Ω داریم $\text{move}(\Gamma) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$، پس G با حرکت کراندار $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ می‌باشد و قضیه ثابت می‌گردد.

در انتها حرکت حالت خاصی از گروه‌های دووجهی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۶.۳: فرض کنید p عددی اول، فرد و G گروه جایگشتی دووجهی $D_p = \left\langle a,b \middle| a^p = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$ باشد که روی مجموعه $\Omega = \{1,\dots,p\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. در این صورت با توجه به اینکه a^i ها از مرتبه p هستند، پس هر یک از آن‌ها به صورت یک دور به طول p می‌باشند. یعنی حرکت این اعضا برابر با $\frac{p-1}{2}$ می‌باشد. از طرفی $a^i b$ها از مرتبه ۲ هستند و هر یک از این p عضو، به صورت $\frac{p-1}{2}$ دور به طول ۲ می‌باشند. پس حرکت این اعضا نیز برابر با $\frac{p-1}{2}$ می‌باشد. در نتیجه چون حرکت تمامی عناصر غیر همانی این گروه با هم برابر است، لذا این گروه با حرکت یکسان $\frac{p-1}{2}$ می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان داده شد که گروه جایگشتی دووجهی D_n روی مجموعه $\Omega = \{1,\dots,n\}$ به صورت انتقالی عمل می‌کند. در ادامه ساختار دوری اعضای این گروه تعیین گردید و با توجه به آن، حرکت اعضای این گروه مشخص شد. در انتها نشان داده شد که گروه جایگشتی دووجهی D_p روی مجموعه $\Omega = \{1,\dots,p\}$ دارای حرکت یکسان می‌باشد.

فهرست منابع

[1] M. Alaeiyan, H.A. Tavallaee. Permutation groups with the same movement. Carpathian J. Math. 25(2):147-156 (2009)

[2] D. Gorenstein. Finite Groups. Second Edition. Chelsea, New York (1980)

[3] A. Hassani, M. Khayaty (Alaeiyan), E.I. Khukhro, C.E. Praeger. Transitive permutation groups with bounded movement having maximal degree. J. Algebra 214:317-337 (1999)

[4] C.E. Praeger. On permutation groups with bounded movement. J. Algebra 144:436-442 (1991)