دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

خاصیت جابه‌جایی روی حلقه‌های قویاً متناوب

سعید نصیری‌فر[1]، شعبانعلی صفری ثابت[2*]

[۱و۲] گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۰۹

چکیده

حلقه R را که به ازای هر $x \in R$، اعداد صحیح مثبت متمایز مانند m, n وجود دارند بطوریکه در شرط $x^n = x^m$، صدق کند، یک حلقه متناوب می‌نامیم. ریشه اصلی این تعریف به قضیه جیکوبسن باز می‌گردد. وی در این قضیه ثابت کرد که هر حلقه با شرط $x = x^{n(x)}$ و $n(x) > ۱$، جا به جایی است. ریاضی دانان معاصر از جمله عدیل یعقوب، هاوارد بل، شاکرون و ... در مقطعی از زندگی علمی خود در این حیطه فعالیت کرده‌اند. ما برای اولین بار در این مقاله به بیان حلقه‌های قویاً متناوب و بررسی خواص و ساختار آنها پرداخته‌ایم. حلقه R را که به ازای هر $x \in R \setminus (J \cup N)$ اعداد صحیح مثبت m, n از زوجیت‌های متفاوت وجود داشته باشند بطوریکه $x^n - x^m \in N$، یک حلقه قویاً متناوب نامیم. در این مقاله مثال‌هایی از حلقه‌های قویاً متناوب و یکدار غیر جابه جایی ارائه می دهیم و در قضیه ۳-۶، نیز نشان می دهیم که حلقه قویاً متناوب یکدار جابه جایی است یا $(R, +)$ یک ۲-گروه و R متناوب می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: حلقه های قویاً متناوب، رادیکال جیکوبسن، حلقه‌های متناوب، شرط شاکرون، جابه‌جایی.

[*] عهده دار مکاتبات

Email: drsafarisabet@gmail.com, sh_safarisabet@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

در سراسر این مقاله، R یک حلقه شرکت‌پذیر و نه لزوماً یکدار است. رادیکال جیکوبسن، مجموعه تمام عناصر پوچ توان حلقه و مرکز حلقه را به ترتیب با J، و Z نمایش می‌دهیم.

حلقه R را حلقه متناوب نامند هرگاه به ازای هر $x \in R$ اعداد صحیح مثبت متمایز مانند m,n وجود داشته باشند بطوریکه $x^n = x^m$.

حلقه R را حلقه قویاً متناوب نامند هرگاه به ازای هر $x \in R \setminus (J \cup N)$ اعداد صحیح مثبت $m\,,n$ از زوجیت‌های متفاوت وجود داشته باشند بطوریکه $x^n - x^m \in N$.

مثال ۱-۱. $\mathbb{Z}_۸$، یک حلقه قویاً متناوب است زیرا $J(\mathbb{Z}_۸) = N(\mathbb{Z}_۸) = \{۰,۲,۴,۶\}$ و به ازای هر $\mathbb{Z}_۸ \setminus (J \cup N) = \{۱,۳,۵,۷\}$، اعداد صحیح مثبت $m\,,n$ از زوجیت‌های متفاوت وجود دارند بطوریکه $x^n - x^m \in N$.

مثال ۱-۲. $\mathbb{Z}_۶$ یک حلقه قویاً متناوب است زیرا $N(\mathbb{Z}_۶) = J(\mathbb{Z}_۶) = \{۰\}$ و به ازای هر $x \in \mathbb{Z}_۶ \setminus (J \cup N) = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$، اعداد صحیح مثبت $m\,,n$ از زوجیت‌های متفاوت وجود دارند بطوریکه $x^n - x^m \in N$ [۱]، اگر هر عضو حلقه R در شرط شاکرون که در ذیل بیان شده، صدق کند آنگاه R یک حلقه متناوب است. $m \in \mathbb{Z}^+$ و $q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ وجود دارند بطوریکه $x^m = x^{m+1}q(x)$ بنا به تعریف شاکرون به نظر می رسد که هر حلقه متناوب، یک حلقه قویاً متناوب است در مثال زیر نشان می‌دهیم که هر حلقه متناوب لزوماً قویاً متناوب نیست.

مثال ۱-۳. حلقه $\mathbb{Z}_p$ که p عدد اول باشد یک حلقه متناوب است اما قویاً متناوب نیست، زیرا طبق قضیه فرما به ازای هر $x \in \mathbb{Z}_p$، $(x,p) = ۱$ داریم $x^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$. بنابراین با انتخاب $n = p - ۱$ و $m = ۲(p-۱)$ یا $m = k(p-۱)$ که $k \in \mathbb{Z}^+$ همواره $x^n = x^m$. اما از آنجایی که $J(\mathbb{Z}_p) = N(\mathbb{Z}_p) = \{۰\}$، به ازای هر $x \in \mathbb{Z}_p \setminus (J \cup N) = \{۱,۲,\dots,p-۱\}$، اعداد صحیح مثبت $m\,,n$ از زوجیت های متفاوت وجود ندارند بطوریکه $x^n - x^m \in N$. به عنوان مثال فرض کنید $p = ۳$ در این صورت $\mathbb{Z}_۳ \setminus \{۰\} = \{۱,۲\}$ عضو ۲ را در نظر بگیرید آنگاه اعداد صحیح مثبت $m\,,n$ از زوجیت‌های متفاوت وجود ندارند که $۲^n \overset{p}{\equiv} ۲^m$ زیرا برای زوجیت‌های متفاوت $۲^n - ۲^m \neq ۳k$ است و لذا $\mathbb{Z}_۳$ حلقه قویاً متناوب نیست. در این مقاله در قضیه ۳-۶، نشان خواهیم داد که تحت شرایطی حلقه قویاً متناوب می‌تواند یک حلقه متناوب باشد. همچنین با الهام از قضیه معروف هرشتاین، خاصیت جابه جایی را برای حلقه های قویاً متناوب بررسی می‌کنیم. در ابتدا به بیان برخی تعاریف مقدماتی می‌پردازیم.

تعریف. حلقه R، تقلیل یافته است هرگاه $N = \{۰\}$.

تعریف. حلقه R ،آبلی است هر گاه تمام خود توان‌های آن مرکزی باشند.

تعریف. عضو $x \in R$، متناوب است هر گاه اعداد صحیح مثبت متمایز $m\,,n$ وجود داشته باشند به طوریکه $x^n = x^m$.

تعریف. عضو $x \in R$، توانی از خود است هر گاه $n \in \mathbb{Z}^+$ و $n > ۱$ وجود داشته باشد به طوریکه $x^n = x$. به سادگی می‌توان نشان داد که در یک حلقه تقلیل یافته هر عضو متناوب، توانی از خود است.

تعریف. به ازای هر $x, y \in R$، جابه جاگر x و y به صورت $[x,y] = xy - yx$ تعریف می‌شود، به علاوه به ازای هر $k \in \mathbb{Z}^+$ جابه جاگر $[x,y]_k$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[x,y]_k = [[x,y]_{k-1}, y]$$

$$= \sum_{i=\cdot}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y^i x y^{k-i} \quad (۱.۱)$$

تعریف. $C(R)$ را ایده آل جابه‌جاگر تولید شده توسط‌مجموعه تمام جابه‌جاگرهای‌حلقه R می‌نامیم.

تعریف. $a \in R$ را شبه منظم چپ (راست) نامیم اگر $r \in R$ وجود داشته باشد بطوریکه $r + a + ra = \cdot$ و $(a + r + ar = \cdot)$ عضو r را شبه معکوس چپ a می‌نامند. به سادگی می توان ثابت کرد که هر گاه R حلقه ای یکدار باشد آنگاه a شبه منظم چپ (راست) است اگر و تنها اگر $1_R + a$ معکوس پذیر چپ (راست) باشد.لازم به ذکر است که هر عضو پوچ توان، شبه منظم چپ است زیرا اگر $a^n = \cdot$ ، بافرض $r = -a + a^۲ - a^۳ + \cdots + (-1)^{n-1} a^{n-1}$

در این صورت $r + a + ra = \cdot$.

تعریف. حلقه R را به طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر گویند اگر اشتراک تمام ایده آل های ناصفر از R، ناصفر باشد و به سادگی می توان نشان داد در یک حلقه به‌طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر، خودتوان مرکزی صفر یا یک است.

تعریف. $< x >$ را زیر حلقه تولیده شده توسط x نامند.

تعریف. نماد $((m,n))$ را یک دوتایی مرتب از اعداد صحیح مثبت از زوجیت های متفاوت در نظر می‌گیریم.

اکنون، لم‌های زیر را برای حلقه‌هایی بیان می‌کنیم که لزوماً قویاً متناوب نیستند. پس از بیان لم‌های مختلف، ویژگی‌های اولیه حلقه‌های قویاً متناوب رابیان می‌کنیم.

۲- قضایا و لم های مقدماتی

لم ۲-۱. فرض کنید R یک حلقه است و هر عضو آن مرکزی یا توانی از خود باشد در این صورت R جابه جایی است. [۲]

لم ۲-۲. اگر I یک ایده آل حلقه R ، و I و R/I هر دو جابه جایی باشند،آنگاه ایده آل جابه جاگر $C(R)$ پوچ است و N یک ایده آل است.[۲]

لم ۲-۳. فرض کنید R حلقه ای قویاً متناوب باشد:

آ) هر تصویر بروریختی R، قویاً متناوب است و هر ایده آل R نیز قویاً متناوب است.

ب) اگر e یک عنصر خودتوان باشدکه مرتبه جمعی آن توانی از ۲ نیست، آن گاه $e \in Z$.

ج) اگر $x \notin J \cup N$، آن‌گاه $q \in \mathbb{Z}^+$ و $g(t) \in t\mathbb{Z}[t]$ وجود دارند که $e = g(x)$ خودتوان است و $x^q = x^q e$.

برهان. آ) اگر $f: R \to S$ یک بروریختی حلقه‌ای باشد، کافی است نشان دهیم که به ازای هر $y \in S \backslash (J(S) \cup N(S))$ ، عنصری مانند x در $\mathrm{R} \backslash (J(R) \cup N(R))$ وجود دارد. *(زیرا در غیر این صورت اگر* $x \in J(R)$ و $\mathrm{f}(J(R)) \subseteq J(S)$ نتیجه می شود $y \in J(S)$ که تناقض است. اگر $x \in N(R)$ و $\mathrm{f}(N(R)) \subseteq N(S)$ نتیجه می شود $y \in N(S)$ که تناقض است.) با توجه به این که R قویاً متناوب است زوج $((m,n))$ وجود دارد بطوریکه $x^n - x^m \in \mathrm{N(R)}$.

در این صورت

$$(x^n - x^m)^k = \cdot \Rightarrow$$
$$\mathrm{f}\,(x^n - x^m) = \mathrm{f}(x^n) - \mathrm{f}(x^m) = [f(x)]^n - [f(x)]^m = y^n - y^m \in N(f(R)) = N(S)$$

لذا حکم برقرار است. حال از آنجایی که به ازای هر ایده آل I از R داریم، $J(I) = I \cap J(R)$ و $N(I) = I \cap N(R)$ پس به ازای هر $x \in I \ \backslash ((J(I) \cup N(I))$ ایجاب می‌کند که $x \in \mathrm{R} \backslash (J(R) \cup N(R))$ *و از آنجایی که* R حلقه قویاً متناوب است، پس $x^n - x^m \in N(I)$.

ب) اگر e خودتوان غیرمرکزی باشد، آن‌گاه $-e \notin J \cup N$ و زوج $((m,n))$ وجود دارد که

و ازآنجایی که $(-e)^n-(-e)^m \in N$ و e خودتوان است پس $2e \in N$ بنابراین $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که $(2e)^k = 0$ و بنا به بسط دوجمله ای نیوتن می توان نوشت:

$$\begin{aligned}(2e)^k &= (e+e)^k \\ &= \left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\cdots+\binom{k}{k}\right]e^k \\ &= 2^k e^k = 2^k e = 0\end{aligned}$$

بنابراین مرتبه جمعی e توانی از ۲ می باشد و بنا به عکس نقیض حکم ثابت می شود.

ج) اگر $x \notin J \cup N$ از آنجایی که R حلقه قویاً متناوب است پس زوج $((m,n))$ وجود دارد که $x^n - x^m \in N$ بنابراین $k \in \mathbb{Z}^+$ موجود است که

$$(x^n-x^m)^k = 0 \Rightarrow (x^n)^k = \binom{k}{1}(x^n)^{k-1}x^m - \binom{k}{2}(x^n)^{k-2}(x^m)^2 + \cdots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k}(x^m)^k$$

چون $n,k \in \mathbb{Z}^+$ پس $nk = q \in \mathbb{Z}^+$ و در نتیجه $q \in \mathbb{Z}^+$ و $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ وجود دارند که $x^q = x^{q+1}f(x)$. با فرض این که $e = [xf(x)]^q$ در این صورت $e^2 = e$ و $x^q = x^q e$ زیرا؛

$$\begin{aligned}e &= [xf(x)]^q = x^q[f(x)]^q \\ xe &= xx^q[f(x)]^q \\ &= x^{q+1}[f(x)]^q\end{aligned}$$

و با توجه به این که $x^q = x^{q+1}f(x)$ پس می‌توان نوشت:

$$xe = x^q[f(x)]^{q-1}$$

اگر فرآیند فوق را q بار تکرار کنیم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$x^q e = x^q$$

اکنون نشان می‌دهیم که $e^2 = e$.

$$\begin{aligned}e^2 &= [xf(x)]^q e = x^q[f(x)]^q e \\ &= [f(x)]^q x^q e \\ &= [f(x)]^q x^q \\ &= x^q[f(x)]^q = e.\end{aligned}$$

لم ۲-۴. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب آبلی باشد، در این صورت $N \subseteq J$.

برهان. فرض کنید $a \in N$ و $x \in R$، دو حالت در نظر می‌گیریم. حالت اول: فرض کنید: $ax \in (J \cup N)$، در این صورت ax شبه منظم راست است. حالت دوم: با فرض $ax \notin (J \cup N)$، در این صورت $e = [(ax)f(ax)]^q$ خودتوان است و $q \in \mathbb{Z}^+$ و یک خودتوان مرکزی $e = ay$ وجود دارند که $(ax)^q = (ax)^q e$ و از آنجایی که $e = ay$ خودتوان مرکزی است و $a \in N$ پس $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که $a^k = 0$ و داریم:

$$e = e^2 = eay = a^2ey^2 = \cdots = a^k e y^k = 0$$

پس $(ax)^q = (ax)^q.0 = 0$ و بنابراین ax شبه منظم راست است و در هر دو حالت $a \in J$.

مثال ۲-۵. حلقه $R = M_2(GF(2))$ قویاً متناوب است و از آنجایی که در شرط آبلی صدق نمی‌کند $N \nsubseteq J$.

لم ۲-۶. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و یکدار باشد، در این صورت $J \subseteq N$ یا $J \subseteq Z$.

برهان. فرض کنید $j \in J \backslash Z$ در این صورت $-1+j \notin J \cup N$ و $1+j \notin J \cup N$، بنابراین زوج‌های $((m_1,n_1))$ و $((m_2,n_2))$ وجود دارند به طوری که

$$(1+j)^{n_1}-(1+j)^{m_1} = \left[\binom{n_1}{0}+\binom{n_1}{1}j+\binom{n_1}{2}j^2+\cdots+\binom{n_1}{n_1}j^{n_1}\right] - \left[\binom{m_1}{0}+\binom{m_1}{1}j+\binom{m_1}{2}j^2+\cdots+\binom{m_1}{m_1}j^{m_1}\right] \in N$$

و

$$(-1+j)^{n_2} - (-1+j)^{m_2} = \left[\binom{n_2}{0}(-1)^{n_2} + \binom{n_2}{1}(-1)^{n_2-1}j + \cdots + \binom{n_2}{n_2}(-1)^{0} j^{n_2}\right] - \left[\binom{m_2}{0}(-1)^{m_2} + \binom{m_2}{1}(-1)^{m_2-1}j + \cdots + \binom{m_2}{m_2}(-1)^{0} j^{m_2}\right] \in N$$

لذا به ازای برخی $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ داریم:

$$(m_1 - n_1)j + j^2 f(j) \in N \qquad (2.2)$$

$$2 + jg(j) \in N \qquad (2.3)$$

شرط اخیر ایجاب می کند که؛

$$2j + j^2 g(j) \in N \qquad (2.4)$$

با در نظر گرفتن روابط (۲.۲) و (۲.۴) و این حقیقت که تفاضل عناصر جابه جا شونده پوچ توان عضوی پوچ توان است، داریم: $j + j^2 h(t) \in N$ که $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ و مشابه استدلال برهان لم ۲-۳ (ج)، $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که به ازای خودتوان $e \in J$ داریم $j^k = j^k e$ و از آنجایی که J شامل خودتوان ناصفر نیست، پس $j^k = 0$.

اکنون نشان می‌دهیم که $J \subseteq N \cup Z$.

اگر $J \nsubseteq Z$ و $j \in J \setminus Z$ آن گاه بنا به اثبات بالا $j \in N$ و به ازای هر $c \in J \cap Z$، داریم $j + c \in J \setminus Z$ و بنابراین $c = j + c - j$ یک تفاضل از عناصر جابه‌جا شونده پوچ توان است، بنابراین $c \in N$ و در نتیجه $J \subseteq N$ یا $J \subseteq Z$.

لم ۲-۷. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و آبلی و $\emptyset: R \to S$ یک بروریختی حلقه ای باشد، در این صورت $N(s) \subseteq \emptyset\,(J(R))$.

برهان. فرض کنید $w \in N(S)\setminus\emptyset(J)$. با فرض این که $w^q = 0$ و $u \in \emptyset^{-1}(w)$ داریم $u \notin (J(R) \cup N(R))$. بنابراین زوج $((m,n))$ وجود دارد که $u^n - u^m \in N(R)$ و بنا به لم ۲-۳ (ج)، $q \in \mathbb{Z}^+$ و $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ وجود دارند که $u^q = u^{q+1}f(u)$، پس هر $u \in R \setminus (J(R) \cup N(R))$ در شرط شاکرون صدق می کند و متناوب است پس $k > 1$ وجود دارد که $u - u^k \in N$ و بنا به لم ۲-۴ ، $N \subseteq J$ وبنابراین $u^n - u^m \in J$ پس $u - u^{q(k-1)+k} \in J$ یعنی $u - u^{(q+1)(k-1)+1} \in J$ و از آنجایی که $\emptyset$ همریختی حلقه هاست

$$\emptyset\left(\mathrm{u} - u^{(q+1)(k-1)+1}\right) = \emptyset(\mathrm{u}) - [\emptyset(\mathrm{u})]^{(q+1)(k-1)+1} \in J(S)$$

و در نتیجه $w - w^{(q+1)(k-1)+1} \in \emptyset(J)$ و از آنجایی که $w^q = 0$ پس $w \in \emptyset(J)$ که متناقض با فرض است.

۳- بررسی خاصیت جابه جایی و نزدیک به جابه جایی در حلقه های قویاً متناوب

قضیه ۳-۱. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و آبلی باشد در این صورت R/J جابه جایی است. به علاوه اگر J جابه جایی باشد، آنگاه N یک ایده آل است و R/N جابه جایی است.

برهان. فرض کنید $\bar{\mathrm{R}} = \mathrm{R}/\mathrm{J}$، از آنجایی که R آبلی است $N \subseteq J$ بنا به لم ۲-۴ ، $N \subseteq J$ و لذا $((m,n))$ وجود دارد که به ازای هر $\acute{x} \in R \setminus (J \cup N)$ داریم $x'^n - x'^m \in N \subseteq J$ بنابراین

$$x'^n - x'^m \in J \Longrightarrow x'^n - x'^m + J = J \Longrightarrow (x' + J)^n - (x' + J)^m = J$$

واز آنجایی که J صفر حلقه $\bar{\mathrm{R}}$است، لذا $(x' + J)^n = (x' + J)^m$ و چون $x = x' + J$ نتیجه می شود $x^n = x^m$. حال اگر $x' \in J$ آنگاه $x' + J = J$ و با توجه به اینکه J صفر حلقه $\bar{\mathrm{R}}$ است ، پس $x \in Z(\bar{R})$ و اگر $x' \in N \subseteq J$ آنگاه $x' + J \in N(\bar{\mathrm{R}})$ پس $x \in N(\bar{\mathrm{R}})$ و در

نتیجه $x \in Z(\bar{R})$ بنابراین $\bar{\mathrm{R}}$ *دارای این خاصیت است که به ازای هر* $x \in \bar{R}$، *نتیجه می گیریم به ازای برخی* $((m,n))$

$$x \in Z(\bar{R}) \quad \text{یا} \quad x^n = x^m \qquad (۳.۱)$$

$\bar{\mathrm{R}} = R/J$ نیم ساده است و با حاصل ضرب زیر مستقیمی از حلقه های ابتدایی یکریخت است. فرض کنید S، تصویر ابتدایی $\bar{\mathrm{R}}$ *باشد به ازای هر* $y \in S$ از آنجایی که $f: \bar{R} \to S$، بروریختی است، پس $x \in \bar{R}$ *وجود دارد که* $f(x) = y$. بنابه رابطه (۳.۱) اگر $x \in Z(\bar{R})$ به آسانی می توان نتیجه گرفت که $y \in Z(S)$ و اگر $x^n = x^m$ آنگاه رابطه (۳.۱) تحت تصویر بروریختی منتقل می گردد و $y^n = y^m$ حال با توجه به اینکه S یک حلقه ابتدایی است بنا به قضیه چگالی جیکوبسن از آنجایی که حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ روی حلقه تقسیم در رابطه (۳.۱)، صدق نمی‌کند پس S یک حلقه تقسیم است.اما یک حلقه تقسیم که در رابطه (۳.۱) صدق کند دارای این ویژگی است که هر عضو آن مرکزی یا توانی از خود است بنابراین بنا به لم ۲-۱، $\bar{\mathrm{R}}$ جابه جایی است و اگر J جابه جایی باشد بنا به لم ۲-۲، N یک ایده آل است و $\mathrm{R/N}$ جابه جایی است.

نتیجه ۳-۲. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و تقلیل یافته با رادیکال جیکوبسن جابه جایی باشد، در این صورت R جا به جایی است.

برهان. از آنجایی که R تقلیل یافته است، به سادگی می‌توان نشان داد که خود توان‌های آن مرکزی و در نتیجه R آبلی است، بنا به قضیه ۳-۱، $\mathrm{R/N}$ جابه جایی است و از آنجایی که $N = \{۰\}$ پس $\mathrm{R/N} \cong \mathrm{R}/۰ \cong \mathrm{R}$ ،جابه جایی است.

قضیه ۳-۳. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و آبلی و یکدار باشد. در این صورت N یک ایده آل است و $\mathrm{R/N}$ جابه جایی است.

برهان. از لم های ۲-۴ و ۲-۶ نتیجه می گیریم $J = N$ یا $J \subseteq Z$. اگر $J = N$ در این حالت به وضوح N یک ایده آل است و بنا به قضیه ۳-۱، $\mathrm{R}/J = \mathrm{R/N}$ جابه جایی است. اگر $J \subseteq Z$، آنگاه J جابه جایی است و بنا به قضیه ۳-۱، N یک ایده آل است و $\mathrm{R/N}$ جابه جایی است.

در قضیه معروف هرشتاین، ثابت می شود که یک حلقه متناوب با این ویژگی که $N \subseteq Z$، جابه جایی است.[۳]

ما نیز قضایای مشابهی برای حلقه‌های قویاً متناوب مطرح می‌کنیم.

قضیه ۳-۴. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و آبلی با $J \subseteq Z$ باشد، در این صورت R جابه جایی است.

برهان. باتوجه به لم ۲-۴، $N \subseteq J$ بنابراین $((m\,,n))$ وجود دارد که به ازای هر $x \in R \setminus J$، $x^n - x^m \in Z$.

حال نشان می دهیم که به ازای هر $x \in R \setminus J$

$$x^{(n-m+۱)} - x \in N \subseteq Z \qquad (۳.۲)$$

از آنجایی که $x^n - x^m \in N$، پس $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که

$$(x^n - x^m)^k = ۰$$
$$\Rightarrow \binom{k}{۰}(x^n)^k + \cdots + (-۱)^k\binom{k}{k}(x^m)^k = ۰$$

پس $q \in \mathbb{Z}^+$ و $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ وجود دارند که $x^q = x^{q+1}e$ بنابراین هر $x \in R \setminus J$ در شرط شاکرون صدق می‌کند و لذا متناوب است و می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$x^{n-m+۱} - x \in N \subseteq Z$$

و اگر $x \in J$ از آنجایی که J جابه جایی است، بنابه قضیه معروف هرشتاین R جابه جایی است.

نتیجه ۳-۵. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و یکدار با $N \subseteq Z$ باشد، در این صورت R جابه جایی است.

برهان. از آنجایی که $N \subseteq Z$ به سادگی می‌توان نشان داد که خودتوان های آن مرکزی هستند و در نتیجه R آبلی است. از طرفی R حلقه قویاً متناوب و یکدار است لذا بنا به لم ۲-۶، $J \subseteq Z$ و بنا به قضیه ۳-۴، R جابه جایی است.

قضیه ۳-۶. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب و یکدار باشد. در این صورت R جابه جایی است یا $(R,+)$ یک ۲-گروه است و R متناوب می‌باشد.

برهان. فرض کنیدR جابه جایی نباشد، در این صورت بنا به عکس نقیض نتیجه ۳-۵، $N \nsubseteq Z$ پس $x \in N\backslash Z$ وجود دارد که $-۱ + x \notin (J \cup N)$ پس $((m,n))$ وجود دارد که $(-۱ + x)^n - (-۱ + x)^m \in N$ و بنا به بسط دوجمله‌ای نیوتن و با فرض این که n زوج و m فرد باشد، داریم:

$$۲ + \left[\binom{n}{۱}(-۱)^{n-۱}x - \cdots - \binom{m}{m}x^m\right] \in N$$

بنابراین $۲ + u \in N$ به ازای برخی $u \in N$. در این حالت $۲ = ۲ + u - u$ تفاضل دو عضو پوچ توان جابه جا شونده است پس پوچ توان است و لذا $۲ \in N$ و $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که $۲^k = ۰$ و از آنجایی که به ازای هر $x \in R$ می‌توان نوشت $۲^k x = ۰$ پس مرتبه هر عضو، توانی از عدد اول ۲ است و بنابراین $(R,+)$ یک ۲-گروه است و $x \in R\backslash(J \cup N)$ در شرط شاکرون صدق می‌کند و لذا متناوب است پس زیر حلقه $< x >$ متناهی است و بنا به لم ۲-۶ ، $J \subseteq N$ یا $J \subseteq Z$ پس دوحالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر $J \subseteq N$، آنگاه به ازای هر $x \in J$ داریم $x^n - x^m \in J \subseteq N$ و بنابراین x متناوب است.

حالت دوم: اگر $J \subseteq Z$، آنگاه به ازای هر$x \in J$ داریم $۱ \in R\backslash(J \cup N)$ و $-۱ + x \in R\backslash(J \cup N)$ و در نتیجه $x = (-۱ + x) + ۱$ حاصل جمع عناصر متناوب جابه جا شونده است پس x متناوب است. بنابراین نشان دادیم که اگر R جابه جایی نباشد آنگاه $(R,+)$ یک ۲-گروه است و R متناوب می باشد.

قضیه ۳-۷. فرض کنید R، یک حلقه قویاً متناوب و تقلیل یافته با $J \neq R$ باشد، در این صورت R جابه جایی است.

برهان. بنا به لم ۲-۴ ، $N \subseteq J$ به سادگی می‌توانیم نشان دهیم که هر $x \in R\backslash J$ توانی از خود است. فرض کنید a، یک عضو توانی از خود ناصفر باشد که $a^n = a$ و $n > ۱$. در این صورت $e = a^{n-۱}$ و از آنجایی که R، آبلی و $a \neq ۰$ پس e خودتوان مرکزی ناصفر است. بنا به لم ۲-۳ (آ)، ایده آل eR قویاً متناوب با عضو همانی e است، بنابه لم ۲-۶ و از آنجایی که R تقلیل یافته است، داریم $J(eR) \subseteq Z(eR)$ یا $J(eR) = ۰$ بنابراین $J(eR) \subseteq Z(eR)$ و بنا به قضیه ۳-۴، eR جابه جایی است و به ازای هر $x \in R$ داریم:

$$[ea, ex] = ۰ \implies [ea, x] = [a, x]$$

این امر نشان می دهد که تمام عناصر توانی از خود $R\backslash J$، مرکزی هستند.اگر $J \nsubseteq Z$ پس $x \in J\backslash Z$ وجود دارد و اگرe ، خودتوان مرکزی ناصفری باشد، $x + e \notin J$ و از آنجایی که هر عضو $R\backslash J$ توانی از خود مرکزی است در نتیجه $x + e \in Z$ و لذا تمام عناصر R مرکزی و بنابراین R جابه جایی است.

قضیه ۳-۸. فرض کنید R، یک حلقه قویاً متناوب و نیم اول و ۲- بی تاب با $R \neq J$ باشد، در این صورت R جابه جایی است.

برهان. باتوجه به اینکه R، ۲- بی تاب است. بنا به لم۲-۶ (ب)، $e \in Z$ و R آبلی است و بنا به لم ۲-۴ ، $N \subseteq J$ حال اگر ثابت کنیم R تقلیل یافته است بنا به قضیه ۳-۷، R جابه جایی است. فرض کنید R تقلیل یافته نباشد،از آنجایی که در یک حلقه نیم اول $N \cap Z = \{۰\}$پس $N \nsubseteq Z$. بافرض اینکه $u \in N \backslash Z$ و e خودتوان مرکزی ناصفری باشد در این صورت $-e+u \in R\backslash(J \cup N)$ و زوج $((m,n))$ وجود دارد که

$(-e+u)^n-(-e+u)^m \in N$

و در نتیجه $۲e+v \in N$ که $v \in N$ و لذا $۲e=۲e+v-v$ حاصل جمع عناصر پوچ توان جابه جا شونده است، پس $۲e \in N$ و $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که $۲^k e=۰$ و این در تناقض با فرض ۲- بی‌تاب بودن R است. بنابراین R خودتوان ناصفر ندارد و اگر $x \notin J \cup N$ بنا به لم ۲-۳(ج)،داریم$x^q=x^q e$ و از آنجایی که $e=۰$ پس $x^q=x^q.۰=۰$ و در نتیجه $x \in N \subseteq J$ و نشان دادیم که $R=J$ و در تناقض با فرض قضیه است،پس فرض خلف باطل و $N \subseteq Z$ ، لذا بنا به قضیه ۳-۷، R جابه جایی است.

قضیه ۳-۹. فرض کنید R یک حلقه قویاً متناوب با $R \neq J$ باشد، اگر R و R/J ،۲- بی تاب باشند آنگاه R جابه جایی است.

برهان. از آنجایی که R، ۲- بی تاب است پس R آبلی وبنا به لم ۲-۴، $N \subseteq J$. حال اگر $J \subseteq Z$ بنا به قضیه ۳-۴، R جابه جایی است. فرض کنید $J \nsubseteq Z$ و $j \in J \backslash Z$ و e خودتوان مرکزی ناصفر باشد، دراین صورت $-e+j \notin J \cup N$ و $((m,n))$ وجود دارد که $(-e+j)^n-(-e+j)^m \in N$ و در نتیجه $۲e+u \in N$ به ازای برخی $u \in J$. بنابراین $k \in \mathbb{Z}^+$ و $v \in J$ وجود دارد بطوریکه $۲^k e+v=۰$. با فرض اینکه $\bar{e}$ *تصویر* e در R/J داریم $۲^k \bar{e}=۰$ و از آنجایی که R/J ، ۲- بی‌تاب است. پس $\bar{e}=۰$ و $e+J=J$ در نتیجه $e \in J$ و با توجه به اینکه J شامل خودتوان ناصفر نیست پس $e=۰$ و بنا به لم ۲-۳ (ج)، داریم $x^q=x^q.۰=۰$ و داریم $x \in N \subseteq J$ و نشان دادیم $R=J$ که به تناقض می رسیم. پس $J \subseteq Z$ و بنا به قضیه ۳-۴، R جابه جایی است.

قضیه ۳-۱۰. فرض کنید R، یک حلقه قویاً متناوب یکدار باشد که در دو شرط زیر صدق می‌کند؛

آ) به ازای هر $a \in N$ و $x \in R$، $k \in \mathbb{Z}^+$ی وجود دارد بطوریکه $[a,x]_k=۰$

ب) N جابه جایی باشد

در این صورت، R جابه جایی است.

برهان. بنا به (آ) خودتوان‌ها مرکزی هستند. زیرا اگر $e \in R$ خود توان باشد، از آنجایی که $(ex-exe)^۲=۰$ پس $ex-exe \in N$ در نتیجه شرط $[ex-exe,e]_k=۰$ معادل گزاره $ex-exe=۰$ می باشد و به طور مشابه شرط $[xe-exe,e]_k=۰$ معادل با گزاره $xe-exe=۰$ می‌باشد، بنابراین $ex=xe$ یعنی خودتوان ها مرکزی و لذا R آبلی است.بنا به قضیه ۳-۳، N یک ایده آل است و R/N جابه جایی است و به ازای هر $x,y \in R$ داریم $[x,y] \in N$. اگر R جا به جایی نباشد بنا به قضیه ۳-۶ ، $(R,+)$ یک ۲- گروه است و برای هر $x \in R$، زیر حلقه $R_x=<x>$ متناهی است و لذا حلقه $\frac{R_x}{N(R_x)}$متناهی و تقلیل یافته است و یک حاصل جمع مستقیم از میدان های متناهی با مشخصه ۲ است. بنابراین $s \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که به ازای هر$t \in \mathbb{Z}^+$

$$x^{۲^{St}}-x \in N \qquad (۳.۳)$$

از آنجایی که به ازای هر $a \in R$، $۲a=a+a \in R$ و از طرفی $(R,+)$ یک ۲- گروه است پس

$\cdot = \text{۲}^t(a+a)$ و از آنجایی که $\text{۲}^{t+\text{۱}}a = \cdot$ داریم $\cdot = \text{۲}(a)^{t+\text{۱}} = (a+a)^{t+\text{۱}}$ یعنی $\text{۲}R \subseteq N$ و بنا به (ب)، N جابه جایی است، پس نتیجه می گیریم که به ازای هر $a \in N$ و $x \in R$ داریم $\cdot = [a, \text{۲}x] = \text{۲}[a,x]$. فرض کنید $a \in N$ و x چنان باشد که $[a,x]_k = \cdot$، $k > \text{۱}$ و در این صورت $\left[[a,x],x\,\right]_{k-\text{۱}} = \cdot$ حال $w \in \mathbb{Z}^+$ را طوری در نظر می‌گیریم که $k - \text{۱} \leq \text{۲}^w$ داریم $\left[[a,x],x\,\right]_{\text{۲}^w} = \cdot$ اما بنا به تعریف و این که $\cdot = \text{۲}[a,x]$ می‌توان نوشت $= \left[[a,x],x\,\right]_{\text{۲}^w}$ $\left[[a,x],x^{\text{۲}^w}\right]$ بنابراین $\left[[a,x],x^{\text{۲}^w}\right] = \cdot$ پس $x^{\text{۲}Sw} = \left(x^{\text{۲}^w}\right)^{\text{۲}Sw-w}$ با $[a,x]$ جا به جا می‌شود و بنا به رابطه (۳.۳) ، $x^{\text{۲}Sw} - x \in N$، که $s \in \mathbb{Z}^+$ و از آنجایی که $[a,x] \in N$ و بنا به (ب)، N جابه جایی است پس

$$\left[[a,x],x^{\text{۲}Sw} - x\right] = \cdot \;\Rightarrow$$
$$\left[[a,x],x^{\text{۲}Sw} - x\right] =$$
$$\left[[a,x],x^{\text{۲}Sw}\right] - \left[[a,x],x\right] = \cdot$$

باتوجه به مطالب بیان شده نتیجه می‌گیریم که $\left[[a,x],x\right] = \cdot$ بنابراین $= \left[a,x^{\text{۲}^S}\right]$ $\text{۲}^S x^{\text{۲}^S-\text{۱}}[a,x] = \cdot$ و از آنجایی که $a \in N$ و بنا به (ب)، N جابه جایی است $\left[a,x^{\text{۲}^s} - x\right] = \cdot$ و ما داریم:

$$\cdot = \left[a,x^{\text{۲}^s} - x\right] = \left[a,x^{\text{۲}^s}\right] - [a,x]$$

باتوجه به اینکه $\left[a,x^{\text{۲}^s}\right] = \cdot$ پس می‌توان نوشت $[a,x] = \cdot$ ، بنابراین a با هر عضو R جابه‌جا می‌شود. این نشان می‌دهد $N \subseteq Z$ و بنا به نتیجه ۳-۵، R جابه جایی است.

قضیه ۳-۱۱. فرض کنید R، یک حلقه قویاً متناوب باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند؛

آ) به ازای هر $a \in N$ و $x \in R$، $k \in \mathbb{Z}^+$ی وجود دارد بطوریکه $[a,x]_k = \cdot$

ب) J جابه جایی باشد

در این صورت، R جابه‌جایی است.

برهان. بنا به (آ)، مشابه اثبات قضیه ۳-۱۰، می‌توان نشان داد که حلقه R آبلی است. بنا به قضیه ۱-۳، R/J جابه جایی است و از آنجایی که طبق (ب)، J جابه جایی است پس N یک ایده آل است و R/N جابه جایی است. بنابراین مشابه اثبات لم ۲-۲، می‌توان نشان داد به ازای هر $x, y \in R$ داریم $[x,y] \in N$. حال به ازای هر $y \in R$، بنا به (آ)، $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که $[[x,y],y]_k = \cdot$ به ازای $k = \text{۲}$، بنا به رابطه (۱.۱) داریم: $[a,x]_\text{۲} = \left[[a,x],x\right]$ و به ازای $k = \text{۳}$، داریم:
$= \emptyset(e).\emptyset(r)$

$$[a,x]_\text{۳} = [\,[a,x]_\text{۲},x]$$
$$= \left[\left[[a,x],x\right],x\right] = \left[[a,x],x\right]_\text{۲}$$

$$[x,y]_{k+\text{۱}} = [[x,y],y]_k$$

پس $[x,y]_{k+\text{۱}} = \cdot$.بنابراین بنا به شرط (آ) ، به ازای هر $x, y \in R$ ، $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که

$$[x,y]_k = \cdot \qquad (\text{۳.۴})$$

اکنون کافیست نشان دهیم که تصویر به طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر R جابه جایی است.

فرض کنید S تصویر به طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر R باشد و $\emptyset: R \to S$ یک بروریختی باشد. اگر S، خود توان مرکزی ناصفر نداشته باشد، بنا به لم ۲-۳ (آ)، S حلقه قویاً متناوب و به ازای هر $x \notin J \cup N$ ، $\emptyset(x) \notin (\emptyset(J) \cup \emptyset\,(N))$ و بنا به لم ۲-۳ (ج)، $q \in \mathbb{Z}^+$ و $g(t) \in t\,\mathbb{Z}[t]$ وجود دارند که $\emptyset(e) = g(x)$ خود توان است و $[\emptyset(x)]^q = [\emptyset(x)]^q\emptyset(e)$ که $\emptyset(e)$ در S

خودتوان مرکزی است زیرا از آنجایی که $\emptyset$ بروریختی است، داریم:

$$[\emptyset(e)]^۲ = \emptyset(e).\emptyset(e) = \emptyset(e^۲) = \emptyset(e)$$

$\emptyset(r).\emptyset(e) = \emptyset(re) = \emptyset(er)$ و از آنجایی که S خودتوان مرکزی ناصفر ندارد، $\emptyset(e) = 0$ و بنابراین $[\emptyset(e)]^q = [\emptyset(e)]^q.۰ = ۰$ و در نتیجه $\emptyset(e) \in N(S)$ پس $\emptyset(R\backslash(J \cup N)) \subseteq N(S)$ و از آنجایی که R حلقه قویاً متناوب و آبلی و $\emptyset: R \to S$ یک بروریختی است در این صورت بنا به لم ۲-۷، $N(S) \subseteq \emptyset(J)$ بنابراین $S \subseteq \emptyset(J)$ و لذا $S = \emptyset(J)$ و باتوجه به اینکه $\emptyset(J)$ جابه جایی است، پس S جابه جایی است. حال فرض کنید که S، خودتوان مرکزی ناصفر دارد.از آنجایی که S به طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر است پس خودتوان مرکزی آن ۱ است و S یکدار است. از آنجایی که $[x,y] \in N(R)$ و $\emptyset([x,y]) \in$ $\emptyset(N(R)) \subseteq N\ (S)$ بنابراین $[\emptyset(x),\emptyset(y)] \in$ $N(S)$ و بنا به رابطه (۳.۴)، $k \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد که $[\emptyset(x),\emptyset(y)]_k = ۰$ بنابراین S ویژگی (آ) را به ارث می برد و بنا به لم ۷-۲، $N(S) \subseteq \emptyset\ (J)$ و از آنجایی که $\emptyset\ (J)$ جابه جایی است پس $N(S)$ جابه جایی است. حال از آنجایی که S یک حلقه قویاً متناوب و یکدار است که در شرایط قضیه ۳-۱۰، صدق می کند پس S جابه جایی است و بنا به قضیه بیرخف، هر حلقه با حاصل ضرب زیر مستقیمی از یک خانواده به طور زیر مستقیم تحویل ناپذیر از حلقه ها یکریخت است پس R، جابه جایی است.[۴]

۴- مثال ها

در این بخش ما مثال‌هایی از حلقه‌های قویاً متناوب و یکدار غیر جابه جایی ارائه می‌دهیم. قبل از بیان مثالی ابتدا به این مطلب اشاره می‌کنیم که اگر حلقه در شرایط قضیه ۳-۶، صدق کند در این صورت J حلقه پوچ است، زیرا اگر $x \in J$ عضو دلخواهی باشد از آنجایی که R متناوب است پس زوج $((m,n))$ وجود دارد بطوریکه $x^n =$ x^m با $n > m$ که

$$x^m - x^n = ۰ \Rightarrow x^m(۱ - x^{n-m}) = ۰ \quad (۴.۱)$$

از آنجایی که R یکدار است و $x \in J$ ، پس داریم $۱ - x^{n-m-۱}.x = ۱ - x^{n-m}$ وارون پذیر است. حال اگر طرفین رابطه (۴.۱) را از سمت راست در عبارت $(۱ - x^{n-m})^{-۱}$ ضرب کنیم داریم $x^m = ۰$ یعنی J پوچ است.

مثال ۴-۱. حلقه $R = M_۲(GF(۲))$ ، یعنی حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ روی میدان گالوا از مرتبه ۲، را در نظر بگیرید.

$$R = \left\{\begin{matrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{matrix}\right\}$$

$$N(R) = \left\{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\right\}$$

$$J(R) = \left\{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right\}$$

$$Z(R) = \left\{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right\}$$

به وضوح زوج $((m,n))$ وجود دارد که به ازای هر $x \in R\ \backslash(J \cup N)$ ، داریم $x^n - x^m \in N$.
بعنوان مثال اگر $x = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \in R$ از آنجایی که $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ داریم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}^۲ - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \in N$$

بنابراین R یک حلقه قویاً متناوب و یکدار است که بنا به لم ۲-۶، $J \subseteq N$ یا $J \subseteq Z$. $((m,n))$ وجود دارد که به ازای هر $x \in R$ داریم $x^n -$

$x^m \in N$ و $۲x = ۰$ بنا به قضیه ۶-۳، $(R,+)$ یک ۲- گروه است و R، متناوب است.

مثال ۴-۲. فرض کنید R، حلقه ماتریس های بالا مثلثی ۲ × ۲ روی میدان گالوا از مرتبه۲ باشد.

$$R = \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{matrix} \right\}$$

$$J = N = \left\{ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

به ازای هر $x \in R$، $((m,n))$ وجود دارد که $x^n - x^m \in N$ ، بنابراین R یک حلقه متناوب است و $(R,+)$ یک ۲- گروه است.

۵- نتیجه گیری و پیشنهادات

در ادامه برخی پیشنهادات در این ارتباط بیان می گردد.

(آ) آیا حلقه‌های بولی تعمیم یافته و حلقه‌های شبه بولی را می توان تحت شرایطی خاص به حلقه‌های قویاً متناوب تبدیل کرد؟

(ب) آیا می‌توان ارتباطی بین حلقه‌های با مشخصه اول p بطوریکه به ازای هر $x \in R$ و $x^p = x$ با حلقه‌های قویاً متناوب برقرار کرد؟

فهرست منابع

[1] M. Chacron. On a theorem of Herstein. Canada. Journal of mathematics, 21 (1969) 1348 − 1353.

[2] H.E.Bell.On commutativity of semiperiodic rings.Results in mathematics,53,(2009),19-26.

[3] I.N.Herstein,A generalization of a theorem of Jacobson III.Amer.J.Math.75,(1953),105-111.

[4] Hungerford,W.T.,1973,Algebra. Math . Assoc. of America.