

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400

شماره شاخه: 588-2588X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## یک الگوریتم جدید برای مسائل نامساوی تغییراتی با کاربرد در مسأله تعادل ترافیک نامتقارن

مرادعلی پیوند<sup>1</sup>، صدیقه جاهدی<sup>2\*</sup>، حمیدرضا ملکی<sup>3</sup>

(1) دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

(2و3) دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/04/29 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/06/05

### چکیده:

در این مقاله یک الگوریتم تصویر دوگامی مبتنی بر روش گرادیان افزوده برای حل مسائل نامساوی تغییراتی معرفی نموده و به اثبات قضیه همگرایی الگوریتم پیشنهادی، می‌پردازیم. یکی از پارامترهایی که کارایی و دقت الگوریتم‌های تصویر را تعیین می‌کند انتخاب اندازه گام الگوریتم است. این انتخاب وابسته به ویژگی‌های انقباضی نگاشتی است که در الگوریتم به ناحیه شدنی تصویر می‌شود. اگر به عنوان نمونه ثابت لیپشیتز نگاشت مشخص نباشد در انتخاب اندازه گام الگوریتم دچار مشکل می‌شویم. در الگوریتم پیشنهادی نیاز به دانستن ثابت لیپشیتز برداشته شده است و روشی ارائه شده است که انتخاب اندازه گام را آسان می‌کند. مسأله تعادل شبکه ترافیک نامتقارن را به صورت یک مسأله نامساوی تغییراتی روی فضای جریان مسیرهای شبکه مدل‌سازی نموده و با توجه به ساختار تجزیه‌پذیر مجموعه شدنی این مدل، حالت تعادل شبکه ترافیک را با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، به دست می‌آوریم. در نهایت، نتایج عددی حاصل از اجرای این الگوریتم را بر روی شبکه ترافیک آزمایشی سایوکس فال ارائه می‌کنیم.

**واژه‌ی کلیدی:** روش گرادیان افزوده؛ الگوریتم خوبوتو؛ جریان مسیر؛ تولید ستون.

**1- مقدمه**

فرض کنید  $K$  یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت  $H$  و  $C: K \rightarrow H$  یک نگاشت باشد.

در مسأله نامساوی تغییراتی هدف یافتن  $x \in K$  به گونه‌ای است که برای هر  $y \in K$ ، رابطه  

$$\langle Cx, y - x \rangle \geq 0, \quad (1)$$
برقرار باشد، جایی که در آن  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  نشان دهنده ضرب داخلی روی  $H$  است. مجموعه جواب این مسأله با  $VI(K, C)$  نمایش داده می‌شود. مسأله نامساوی تغییراتی یک مسأله کلی است که بسیاری از مسائل ریاضی از جمله معادلات غیرخطی، مسأله بهینه سازی، مسأله متمم و مسأله نقطه ثابت را شامل می‌شود. بسیاری از مسائل در فیزیک، اقتصاد و تجارت، حمل و نقل و... به یافتن جواب یک مسأله نامساوی تغییراتی تقلیل می‌یابند [۱،۲،۳،۴].

برای حل مسأله نامساوی تغییراتی روش‌های متعددی ارائه شده است. ساده‌ترین آنها روش تکراری تصویر است که با نقطه شروع  $x_0 \in K$  دنباله تکراری  $\{x_k\}$  را با استفاده از فرمول  

$$x_{k+1} = P_K(x_k - \lambda C(x_k))$$
که در آن  $P_K(\cdot)$  تصویر متریک روی  $K$  و  $\lambda$  یک عدد حقیقی و مثبت است، می‌سازد [2]. در این روش  $P_K(\cdot)$  جواب مسأله نامساوی تغییراتی است اگر و تنها اگر  

$$x^* = P_K(x^* - \lambda C(x^*)).$$

اگر نگاشت  $C$  یکنوای قوی با ثابت  $l$  باشد یعنی برای هر  $x, y \in K$  که  $x \neq y$  ثابت  $l > 0$  وجود داشته باشد که  

$$\langle Cx - Cy, x - y \rangle \geq l \|x - y\|^2,$$
و روی  $K$  پیوسته لیپ شیتز با ثابت  $L$  باشد یعنی برای هر  $x, y \in K$  ثابت  $L > 0$  وجود داشته باشد که

را معرفی نمود. این روش که به روش گرادیان افزوده مشهور است، در صورت ناتهی بودن مجموعه جواب مسأله نامساوی تغییراتی، به عنصری از این مجموعه همگرا است [5].

از آنجا که انتخاب  $\lambda$  وابسته به ثابت  $L$  می‌باشد در مواردی که مقدار  $L$  دقیقاً معلوم نباشد در انتخاب  $\lambda$  به مشکل بر می‌خوریم. در حقیقت به ازای  $\lambda$ های بسیار کوچک، سرعت همگرایی بسیار کم است و به ازای  $\lambda$ های بسیار بزرگ ممکن است الگوریتم اصلاً همگرا نشود. نتایج عددی جدول 1 برای دو مسأله User OPT و Kojima-Shindo [6و7]، صحت این ادعا را نشان می‌دهد. در این جدول iter و  $n_p$  به ترتیب تعداد تکرار و تعداد دفعات محاسبه تصویر برای مقادیر مختلف  $\lambda$  است. به منظور فائق آمدن بر این مشکل، خوبوتو با به کارگیری الگوریتم گرادیان افزوده، با معرفی مناسب  $\lambda$  در هر گام، الگوریتمی را معرفی کرد که در آن شرط لیپ شیتز حذف شده است [8]. با الهام از ایده خوبوتو، الگوریتم‌های دیگری برای حل مسأله‌ی نامساوی تغییراتی و با استفاده از روش‌های مناسب برای انتخاب  $\lambda$  معرفی شده است [9و10]. اگر چه تلاش برای بهبود الگوریتم گرادیان افزوده با معرفی الگوریتم خوبوتو ادامه یافت و به نتایج خوبی رسیده است اما همچنان نیازمند محاسبه دو عمل تصویر روی مجموعه بسته و محدب  $K$  هستیم که خود از طریق مسأله کمینه سازی فاصله به سرانجام می‌رسد.

برای حل مسأله نامساوی تغییراتی روش‌های متعددی ارائه شده است. ساده‌ترین آنها روش تکراری تصویر است که با نقطه شروع  $x_0 \in K$  دنباله تکراری  $\{x_k\}$  را با استفاده از فرمول

$$x_{k+1} = P_K(x_k - \lambda C(x_k))$$

که در آن  $P_K(\cdot)$  تصویر متریک روی  $K$  و  $\lambda$  یک عدد حقیقی و مثبت است، می‌سازد [2]. در این روش  $P_K(\cdot)$  جواب مسأله نامساوی تغییراتی است اگر و تنها اگر

$$x^* = P_K(x^* - \lambda C(x^*)).$$

اگر نگاشت  $C$  یکنوای قوی با ثابت  $l$  باشد یعنی برای هر  $x, y \in K$  که  $x \neq y$  ثابت  $l > 0$  وجود داشته باشد که

$$\langle Cx - Cy, x - y \rangle \geq l \|x - y\|^2,$$

و روی  $K$  پیوسته لیپ شیتز با ثابت  $L$  باشد یعنی برای هر  $x, y \in K$  ثابت  $L > 0$  وجود داشته باشد که

جدول 1 - نتایج عددی متناظر با  $\lambda$  های متفاوت

iter	$n_p$	$\lambda$
Komija – Shindo		
221	422	$10^{-2}$
38	76	$10^{-1}$
-	-	1
User OPT		
663	1326	$10^{-3}$
92	184	$10^{-2}$
-	-	$10^{-1}$

تعادل یک شبکه ترافیک با جواب مسأله نامساوی تغییراتی متناظر آن، الگوریتم پیشنهادی به منظور حل یک مسأله تعادل ترافیک بازنویسی می‌شود. در بخش 4 با یک مثال محاسباتی، از الگوریتم ارائه شده برای حل یک مسأله تعادل ترافیک استفاده و کارایی آن در حل مسائل با اندازه بزرگ نشان داده می‌شود. در بخش پایانی این مقاله نتیجه‌گیری مباحث ارائه می‌شود.

## 2- روشی جدید برای حل مسأله نامساوی

### تغییراتی

در این بخش به منظور یافتن جواب یک مسأله نامساوی تغییراتی یک روش تکراری جدید را معرفی می‌کنیم. ابتدا تعریف و لم زیر را که برای معرفی و اثبات الگوریتم نیاز است بیان می‌کنیم.

**تعریف 1:** [4] نگاهت  $C$  روی  $K$  شبه یکنوا است هرگاه برای هر  $x, y \in K$  با  $\langle Cy, x - y \rangle \geq 0$  آنگاه  $\langle Cx, x - y \rangle \geq 0$ .

**لم 2:** [15] اگر  $P_K: H \rightarrow K$  نگاهت تصویر باشد، آنگاه برای هر  $x \in H$  و  $y \in K$   $\langle x - P_K x, P_K x - y \rangle \geq 0$ .

### الگوریتم پیشنهادی:

درحقیقت اگر مجموعه  $K$  یک ساختار ساده‌ای داشته باشد (مانند چند وجهی‌ها) این روش‌ها دارای کارایی مناسب می‌باشند، در غیر این صورت چون برای به دست آوردن تصویر نیازمند حل یک مسأله کمینه-سازی هستیم، با توجه به گران بودن محاسبه می‌بایست الگوریتم را به گونه‌ای طراحی کرد که حتی‌المقدور کمترین محاسبه تصویر روی مجموعه انجام شود. این امر توسط یوسم و پس از آن توسط محققین دیگری، به منظور تسریع محاسبات الگوریتم گرادیان افزوده انجام شد [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴].

ساختار مقاله، در ادامه به این صورت سازماندهی می‌شود: در بخش 2 یک الگوریتم تکراری مبتنی بر روش تصویر برای حل مسأله نامساوی تغییراتی ارائه و در ادامه همگرایی آن را ثابت می‌کنیم. در این الگوریتم به ثابت لیپ‌شیتز در بحث همگرایی نیاز نیست. علاوه بر این در گام دوم الگوریتم، به جای تصویر روی مجموعه‌ی  $K$ ، با یافتن ابرصفحه محمل فضای شدنی در یک نقطه، تصویر روی این ابرصفحه به دست می‌آید که از لحاظ محاسباتی یافتن آن بسیار راحت‌تر است. در همین بخش، سرعت همگرایی این الگوریتم با سه الگوریتم پیشنهاد شده توسط مارکوته، سولودو-سواپتر و نیز سولودو-تسنگ برای دو مسأله آزمایشی مقایسه می‌شود. در بخش 3، مسأله تعادل ترافیک، به صورت یک مسأله نامساوی تغییراتی ارائه می‌شود. با اثبات یکسان بودن جریان

اثبات: از آنجا که  $u \in VI(K, C)$  و  $C$  یک نگاشت شبه یکنواست، بنابراین به ازای هر  $k \geq 0$  داریم

$$\langle Cy_k, y_k - u \rangle \geq 0$$

$$\langle Cy_k, x_{k+1} - u \rangle \geq \langle Cy_k, x_{k+1} - y_k \rangle. \quad (2)$$

با توجه به تعریف  $T_k$  برای هر  $k \geq 0$  داریم.

$$\langle x_{k+1} - y_k, (x_k - \alpha_k Cx_k) - y_k \rangle \leq 0.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \langle x_{k+1} - y_k, (x_k - \alpha_k Cy_k) - y_k \rangle = \\ & \langle x_{k+1} - y_k, (x_k - \alpha_k Cx_k) - y_k \rangle \\ & + \alpha_k \langle x_{k+1} - y_k, Cx_k - Cy_k \rangle \\ & \leq \alpha_k \langle x_{k+1} - y_k, Cx_k - Cy_k \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

قرار می‌دهیم  $z_k = x_k - \alpha_k Cy_k$  بنابراین

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - u\|^2 &= \|P_{T_k}(z_k) - u\|^2 \\ &= \|z_k - u\|^2 + \|z_k - P_{T_k}(z_k)\|^2 \\ &+ 2\langle P_{T_k}(z_k) - z_k, z_k - u \rangle \\ &= \|z_k - u\|^2 - \|z_k - P_{T_k}(z_k)\|^2 \\ &+ 2\|z_k - P_{T_k}(z_k)\|^2 \\ &+ 2\langle P_{T_k}(z_k) - z_k, z_k - u \rangle \\ &= \|z_k - u\|^2 - \|z_k - P_{T_k}(z_k)\|^2 \\ &+ 2\langle z_k - P_{T_k}(z_k), u - P_{T_k}(z_k) \rangle \\ &\leq \|z_k - u\|^2 - \|z_k - P_{T_k}(z_k)\|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

با توجه به نامساوی‌های (2) و (4) داریم

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - u\|^2 &\leq \|z_k - u\|^2 - \|z_k - P_{T_k}(z_k)\|^2 \\ &= \|(x_k - \alpha_k Cy_k) - u\|^2 - \|(x_k - \alpha_k Cy_k) - x_{k+1}\|^2 \\ &= \|x_k - u\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 \\ &+ 2\alpha_k \langle u - x_{k+1}, Cy_k \rangle \\ &\leq \|x_k - u\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 \\ &+ 2\alpha_k \langle y_k - x_{k+1}, Cy_k \rangle \\ &= \|x_k - u\|^2 - \|x_k - y_k\|^2 \\ &- \|y_k - x_{k+1}\|^2 \\ &+ 2\langle x_{k+1} - y_k, x_k - y_k \rangle \\ &+ 2\alpha_k \langle y_k - x_{k+1}, Cy_k \rangle \\ &= \|x_k - u\|^2 - \|x_k - y_k\|^2 \\ &- \|y_k - x_{k+1}\|^2 \end{aligned}$$

**گام صفر:** پارامترهای  $\beta, \varepsilon \in (0, 1)$  و  $\bar{\alpha} > 0$  و نقطه شروع  $x_0$  را انتخاب کنید. قرار دهید  $\alpha_0 = \bar{\alpha}$  و  $k = 0$

**گام اول:** محاسبه کنید  $y_k = P_K(x_k - \alpha_k Cx_k)$  اگر شرط توقف،  $x_k = y_k$  برقرار است توقف کنید.

**گام دوم:** (2-1) تا زمانی که  $\alpha_k > \beta > 0$  قرار دهید.

$$\alpha_k = \min \left\{ \varepsilon \alpha_k, \beta \frac{\|x_k - y_k\|}{\|Cx_k - Cy_k\|} \right\}.$$

(2-2) محاسبه کنید

$$T_k = \{w \in H : \langle (x_k - \alpha_k Cx_k) - y_k, w - y_k \rangle \leq 0\}$$

$T_k$  نیم فضای شامل ابرصفحه محمل  $K$  در  $y_k$  است.

(2-3) محاسبه کنید  $x_{k+1} = P_{T_k}(x_k - \alpha_k Cy_k)$  قرار دهید  $\alpha_{k+1} = \min \left\{ \bar{\alpha}, \beta \frac{\|x_k - y_k\|}{\|Cx_k - Cy_k\|} \right\}$  و  $k = k + 1$  و به گام اول برگردید.

در الگوریتم پیشنهادی شرط توقف را برقراری  $x_k = y_k$  معرفی کرده‌ایم. هرگاه به مرحله  $x_k = y_k$  برسیم آنگاه

$$x_k = P_K(x_k - \alpha_k Cx_k),$$

پس  $x_k \in K$  با توجه به لم 2 برای هر  $z \in K$  داریم

$$\langle z - x_k, x_k - (x_k - \alpha_k Cx_k) \rangle \geq 0$$

و در نتیجه  $\alpha_k \langle z - x_k, Cx_k \rangle \geq 0$ . چون  $\alpha_k > 0$ ، پس  $x_k$  عضوی از  $VI(K, C)$  است. لذا شرط توقف به خوبی کارآمد است.

**قضیه 3:** فرض کنید  $C: K \rightarrow H$  یک نگاشت شبه یکنوای پیوسته باشد و  $VI(K, C) \neq \emptyset$ . در این صورت دنباله‌های  $\{x_k\}$  و  $\{y_k\}$ ، تعریف شده توسط الگوریتم پیشنهادی، به‌عضوی چون  $u \in VI(K, C)$  همگرا می‌باشند.

سواپتر و نیز سولدو-تسنگ برای دو مسأله آزمایشی Kojima-Shindo و HPHard می‌پردازیم.

در الگوریتم مارکوتته داریم:

$$x^{k+1} = P_K(x^k - \alpha_k C(\bar{x}^k)).$$

که در آن  $\bar{x}^k = P_K(x^k - \alpha_k C(x^k))$  [10]. در

این الگوریتم در هر مرحله پارامتر  $\alpha_k$  به صورت

$$\alpha_k = \alpha = \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\|x^k - \bar{x}^k\|}{\sqrt{2} \|C(x^k) - C(\bar{x}^k)\|} \right\}$$

آغازین  $\alpha$  تعریف می‌شود. سولدو-سواپتر [13] با

انتخاب پارامترهای مناسب با تکرار  $x^{k+1} =$

$$P_{K \cap H_k}(x^k)$$

$$H_k = \{x \in R^n \mid \langle C(z^k), x - z^k \rangle \leq 0\},$$

$$z^k = x^k - \eta_k r(x^k, \mu_k),$$

$$r(x^k, \mu_k) = x^k - P_K(x^k - \mu_k C(x^k)),$$

$$\eta_k = \gamma^i \mu_k, \mu_k = \min\{\theta \eta_{k-1}, 1\} \text{ و}$$

$$\bar{i} = \min_{i \in Z^+} \left\{ \langle C(x^k - \gamma^i \mu_k r(x^k, \mu_k)), \right.$$

$$\left. r(x^k, \mu_k) \rangle \geq \frac{\sigma}{\mu_k} \|r(x^k, \mu_k)\|^2 \right\}.$$

سولدو-تسنگ [14] با انتخاب پارامترهای مناسب

$$x^{k+1} = x^k - \gamma M^{-1}(T_\alpha(x^k) - T_\alpha(\bar{x}^k))$$

به جستجوی جواب می‌پردازد که در آن

$$T_\alpha = I - \alpha C, \bar{x}^k = P_K(x^k - \alpha_k C(x^k))$$

یک ماتریس عددی متقارن است (برای جزئیات

بیشتر به [16] مراجعه کنید).

نقطه شروع برای مسائل Kojima-Shindo [7] و

HPHard [17] به ترتیب  $x_0 = (2, 0, 0, 2)$  و

$x_0 = (1, \dots, 1)$  در نظر گرفته شده است. برای

مسأله آزمایشی Kojima-Shindo جواب برابر است با

$$x^* = (1, 22, 0, 0, 0, 5).$$

به ازای  $n = 20$  داریم

$$x^* = (0, 0, 1, 71, 3, 22, 1, 95, 0, 0, 2, 37, 0, 1, 86,$$

$$1, 93, 1, 18, 0, 0, 0, 39, 1, 68, 0, 36, 1, 44, 1, 84)$$

و به ازای  $n = 30$

$$x^* = (0, 0, 1, 13, 2, 61, 0, 0, 51, 0, 1, 31, 2, 52, 0, 16, 3, 43,$$

$$+ 2 \langle x_{k+1} - y_k, x_k - y_k - \alpha_k C y_k \rangle.$$

بنا به نامساوی (3) داریم

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - u\|^2 &\leq \|x_k - u\|^2 - \|x_k - y_k\|^2 \\ &\quad - \|y_k - x_{k+1}\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_k \langle x_{k+1} - y_k, C x_k - C y_k \rangle. \end{aligned}$$

از طرفی با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - u\|^2 &\leq \|x_k - u\|^2 - \|x_k - \\ &\quad y_k\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_k \|x_{k+1} - y_k\| \|C x_k - C y_k\| \\ &\leq \|x_k - u\|^2 - \|x_k - y_k\|^2 - \|y_k - \\ &\quad x_{k+1}\|^2 \\ &\quad + \alpha_k^2 \|A x_k - A y_k\|^2 + \|x_{k+1} - y_k\|^2 \\ &= \|x_k - u\|^2 - \|y_k - x_k\|^2 + \\ &\quad \alpha_k^2 \|C x_k - C y_k\|^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|x_{k+1} - u\|^2 \leq \|x_k - u\|^2 - \|y_k - x_k\|^2 + \alpha_k^2 \|C x_k - C y_k\|^2.$$

در ادامه، همگرایی قضیه شبیه اثبات قضیه خوبوتو به

سرانجام می‌رسد. در اثبات قضیه خوبوتو، در هر تکرار

$k$  می‌توان یک زیر مجموعه فشرده از  $K$  مثل  $S_k$

چنان یافت که تابع  $C$  پیوسته لیپشیتز با ثابت  $L_k$

باشد. چون  $S_k \supset S_{k+1} \supset \dots$  در نتیجه

$$L_0 \geq L_1 \geq \dots \geq L_k \geq \dots$$

که در آن  $\alpha_k \in (0, \frac{1}{L_k})$  پس اگر  $\{L_k\}$  مشخص

باشد آنگاه دنباله  $\{\alpha_k\}$  باید نازولی باشد. اما در عمل

از تقریب  $\tilde{L}_k$  برای  $L_k$  استفاده می‌شود و پارامتر  $\alpha_k$

از قاعده زیر به دست می‌آید:

$$0 < \hat{\alpha} \leq \alpha_k \leq \min \left\{ \bar{\alpha}, \beta \frac{\|x_k - y_k\|}{\|C(x_k) - C(y_k)\|} \right\},$$

که در آن  $\bar{\alpha}$  بیشترین مقدار الگوریتم در هر گام است،

$$\square \text{ [8] } \hat{\alpha} = \min \left\{ \frac{\beta}{L_0} \right\} \text{ و } \beta \in (0, 1)$$

اکنون به مقایسه‌ی الگوریتم پیشنهادی با سه

الگوریتم پیشنهاد شده توسط مارکوتته، سولدو-

$$f_a = \sum_{p \in P} F_p \Delta_{a,p},$$

که در آن

$$\Delta_{a,p} = \begin{cases} 1 & a \in p \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (5)$$

به این ترتیب معادله  $f_a$  نشان دهنده آن است که جریان روی یک یال برابر است با مجموع جریان مسیرهایی که شامل این یال هستند. اگر  $F$  بردار جریان‌های  $F_p$  که  $p \in P_w$  و  $w \in W$  باشد در آن صورت مجموعه بردارهای شدنی جریان مسیر به صورت زیر است:

$$X = \{F \geq 0 : d_w = \sum_{p \in P_w} F_p, \forall w \in W\}$$

بنابراین اگر  $f = (f_a)_{a \in A}$  بردار یال‌های شبکه باشد در این صورت  $f = \Delta F$ ، که  $\Delta$  ماتریس تلاقی مسیر-یال با درایه‌های (5) می‌باشد.

فرض کنیم  $c_a$  و  $C_p$  به ترتیب هزینه مربوط به یال  $a$  و مسیر  $p$  باشند. برای هر یال  $a$  یک تابع هزینه نامنفی، پیوسته و صعودی  $c_a(f_a)$  که نشان دهنده تأثیر جریان یال، روی هزینه می‌باشد وجود دارد. هزینه مسیر با مجموع هزینه یال‌های تشکیل دهنده آن مسیر برابر است یعنی؛  $C_p = \sum c_a(f_a) \Delta_{a,p}$ .

بنابراین تابع هزینه مربوط به یک مسیر به صورت  $C_p(F) = \sum_{arcs a \in p} c_a(f)$

است و تابع بردار هزینه مسیر برابر است با

$$C(F) = \Delta^T c(\Delta F)$$

$$1.88, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 61, 0, 3, 36, 2, 17, 0, 0, 0, 1, 16, 1.09, 2.06, 2.8, 0, 79, 0, 1, 52)$$

نتایج عددی جدول 2، نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی از نظر سرعت همگرایی در مقایسه با الگوریتم‌های فوق [16] از عملکرد بهتری برخوردار است. در حقیقت هر چه تعداد وجه‌های یک چند وجهی رو به افزایش باشد و محیط چند وجهی با افزایش بیشتر وجه‌ها به حالت منحنی نزدیک شود، الگوریتم پیشنهادی کارایی خود را بهتر نشان می‌دهد.

### 3- نامساوی تغییراتی و مسئله تعادل ترافیک

#### نامتقارن

در این بخش شبکه ترافیک، به صورت یک گراف جهت دار به صورت سه تایی  $(N, A, W)$  نمایش داده می‌شود.  $N$  بیانگر مجموعه گره‌ها،  $A$  مجموعه یال‌ها و  $W$  نمایش دهنده مجموعه همه زوج‌های مبدأ-مقصد،  $O/D$ ، است. برای زوج  $w \in W$  تقاضای ترافیک،  $d_w > 0$ ، نشان دهنده نرخ ورود به مبدأ و خروج از مقصد است. مجموعه مسیره‌های شامل زوج  $w$  را با  $P_w$  نمایش می‌دهیم. تقاضای ترافیک  $d_w$  روی تمام مسیره‌های شامل زوج  $w$  توزیع می‌شود؛ به عبارتی اگر  $F_p$  جریان روی مسیر  $p$  باشد در این صورت  $d_w = \sum_{p \in P_w} F_p$  اگر  $f_a$  جریان روی یال  $a$  باشد، در آن صورت معادله جریان زیر برای هر  $a \in N$  برقرار است:

جدول 2- مقایسه نتایج عددی الگوریتم پیشنهادی با سه الگوریتم یاد شده

الگوریتم پیشنهادی		Solodov-Svaiter		Solodov-Teseng		Marcotte		نام
$\beta=0.7, \alpha=10^6, \eta=0.9$		$\theta=4, \sigma=0.3, \gamma=0.5, \eta_{-1}=1$		$\alpha=1, \beta=0.3, \theta=1.9, \rho=0.5$		$\alpha=1, \beta=0.7$		
CPU time	تکرار	time CPU	تکرار	CPU time	تکرار	CPU time	تکرار	
0/88	18	0/7	12	0/87	56	1/34	64	Kojima-Shindo HPHard20 HPHard30
1/33	35	11/61	289	2/72	113	7/89	227	
1/38	35	9/83	221	3/33	138	7/7	182	

مسیر  $p \in P_w$  را در نظر می‌گیریم. جریان شدنی  $H$  را به گونه‌ای می‌سازیم که  $H_p \neq F_p$  و به ازای هر  $q \in P_w$  که  $p \neq q$ ، اگر  $C_q(F) - \pi_w = 0$  آنگاه  $H_q > 0$  و  $H_q \neq F_q$  و اگر  $C_q(F) - \pi_w \geq 0$  آنگاه  $H_q = F_q$  با استفاده از رابطه (8) داریم

$$[C_p(F) - \pi_w] \times [H_p - F_p] \geq 0 \quad (9)$$

اگر  $F_p > 0$ ، آنگاه  $H_p > F_p$  یا  $H_p < F_p$ . بنابراین نامعادله (9) در صورتی برقرار است که  $C_p(F) - \pi_w = 0$  یعنی  $C_p(F) = \pi_w$ . از طرف دیگر اگر  $F_p = 0$ ، در این صورت  $H_p > F_p$ . بنابراین نامعادله (9) در صورتی برقرار است که  $C_p(F) \geq \pi_w$ ، یعنی  $F$  جریان تعادل شبکه است و اثبات تمام است.  $\square$

از آنجا که طراحی‌ها در یک فضای جریان مسیر انجام می‌شود، فضای شدنی  $X$  می‌تواند به صورت ضرب دکارتی مجموعه‌های ساده‌تر به صورت  $X = \prod_{w \in W} X_w$  بیان شود که در آن

$$X_w = \left\{ F \in R_+^{|P_w|} : \sum_{p \in P_w} F_p = d_w \right\}$$

از آنجا که تصویر روی مجموعه‌های ساده‌تر چون  $X_w$  از کارایی بهتری در محاسبه برخوردارند [19]، روش‌های تصویر یک انتخاب طبیعی برای حل مسائل اندازه بزرگ نامساوی تغییراتی هستند که در مقالات متعدد از آن‌ها استفاده شده است [20، 21، 22].

هنگام به کارگیری یک الگوریتم برای حل یک مسأله تعادل، اولین قدم تولید همه مسیرهاست. اما مشکل بزرگی که در این مرحله با آن مواجهیم این است که حتی برای شبکه‌های (گراف) با اندازه کوچک تعداد متغیرهای جریان مسیر به صورت نمایی رشد می‌کند [20 و 23]. به علاوه حتی اگر متغیرهای جریان مسیر در دسترس باشند به علت زیاد بودن تعداد این متغیرها، ممکن است در اجرای الگوریتم با مشکل مواجه شویم، این در حالی است که در شبکه‌های جریان بزرگ نیز تعداد متغیرهای مسیر که در حل

بنا به اصول تعادل واردراپ، مسأله تعادل شبکه ترافیک عبارت است از یافتن بردار جریان شبکه  $F^* \in X$ ، که شامل مسیرهای با جریان مثبت و هزینه مینیمم است. در این حالت هیچ کاربری از شبکه نمی‌تواند با عوض کردن مسیر، هزینه سفر خود را کم کند. به عبارت دیگر برای هر  $w \in W$  و هر  $p \in P_w$

(1) اگر  $F_p > 0$ ، آنگاه  $C_p = \pi_w$ ؛

(2) اگر  $F_p = 0$ ، آنگاه  $C_p \geq \pi_w$ ؛

جایی که  $\pi_w$  هزینه سفر روی کوتاه‌ترین مسیر از  $w$  است [18].

**قضیه 4:** جریان  $F \in X$ ، یک جریان تعادل است اگر

و تنها اگر  $F$  جواب مسأله نامساوی تغییراتی

$$\langle C(F), H - F \rangle \geq 0. \quad (6)$$

به ازای هر  $H \in X$  باشد.

**اثبات:** فرض کنید  $F$  جریان تعادل شبکه باشد. برای

هر  $p \in P_w$  و  $H_p \geq 0$  داریم

$$[C_p(F) - \pi_w] \times [H_p - F_p] \geq 0 \quad (7)$$

زیرا اگر  $F_p > 0$ ، در این صورت  $C_p(F) - \pi_w = 0$  و در نتیجه رابطه (7) برقرار است و اگر  $F_p = 0$ ، در این صورت  $C_p(F) - \pi_w \geq 0$  و در نتیجه چون  $H_p \geq 0$ ، باز هم رابطه (7) برقرار است. حال چون

این رابطه برای هر  $p \in P_w$  برقرار است پس

$$\sum_{p \in P_w} [C_p(F) - \pi_w] \times [H_p - F_p] \geq 0. \quad (8)$$

با توجه به تعریف  $X$ ، رابطه (8) معادل است با

$$\sum_{p \in P_w} C_p(F) \times [H_p - F_p] \geq 0.$$

یعنی برای هر  $H \in X$ ،  $\langle C(F), H - F \rangle \geq 0$ .

برعکس فرض کنید جریان شدنی  $F$ ، یک جواب

مسأله نامساوی تغییراتی (6) یا جواب مسأله معادل

با آن، یعنی (8)، باشد. برای جفت مبدأ-مقصد  $w$ ،

ترافیک نامتقارن:

**گام صفر:** پارامترهای  $\beta, \varepsilon \in (0,1)$  و  $\bar{\alpha} > 0$  را انتخاب کنید. فرض کنید  $F^0$  یک بردار مسیر شدنی و برای هر  $w \in W$ ، مجموعه مسیرهای استفاده شده باشد. قرار دهید  $\alpha_0 = \bar{\alpha}$  و  $k = 0$ .

**گام اول:** محاسبه کنید  $\bar{F}^k = P_{X_W^k}(F^k - \alpha_k C F^k)$  اگر شرط توقف برقرار است، توقف کنید.

**گام دوم:** (1-2) هزینه یال‌ها را محاسبه کنید. برای هر  $w \in W$ ، کوتاهترین مسیر  $s_w$  را پیدا کنید. اگر  $s_w \notin P_W^k$  قرار دهید  $P_W^k = P_W^k \cup \{s_w\}$  و  $P_{s_w}^k = 0$ .

(2-2) تا زمانی که  $\frac{\|F^k - \bar{F}^k\|}{\|C F^k - C \bar{F}^k\|} > \beta > \alpha_k$ ، قرار دهید  $\alpha_k = \min \left\{ \varepsilon \alpha_k, \beta \frac{\|F^k - \bar{F}^k\|}{\|C F^k - C \bar{F}^k\|} \right\}$  (2-3) محاسبه کنید

$$T_k = \{q \in H: \langle (F^k - \alpha_k C F^k) - \bar{F}^k, q - \bar{F}^k \rangle \leq 0\}$$

$T_k$  نیم فضای شامل ابرصفحه محمل  $X_W^k$  در  $\bar{F}^k$  است.

(2-4) محاسبه کنید  $F^{k+1} = P_{T_k}(F^k - \alpha_{k+1} C \bar{F}^k)$  قرار دهید  $\alpha_{k+1} = \min \left\{ \bar{\alpha}, \beta \frac{\|F^k - \bar{F}^k\|}{\|C F^k - C \bar{F}^k\|} \right\}$  و  $k = k + 1$  و به گام اول برگردید.

برای اجرای دقیق الگوریتم به چند نکته مهم باید دقت شود:

- 1- برای انتخاب کوتاهترین مسیر در گام (2-1) از الگوریتم دکسترا<sup>2</sup> استفاده می‌شود.
- 2- شرط توقف به صورت  $\|F^k - \bar{F}^k\| < \delta$  در نظر گرفته می‌شود.

#### 4- یک مثال محاسباتی

در این بخش کارایی الگوریتم پیشنهادی را با اجرا روی شبکه ترافیک سایوکس فال<sup>3</sup> [24] نشان

مسأله، داری جریان مثبت هستند بسیار کوچک است [20]. برای رفع این مشکل می‌بایست برای هر زوج مبدأ-مقصد آن دسته از مسیرهایی که به صورت بالقوه جریان مثبت از آنها خواهد گذشت تولید کنیم. این کار با استفاده از «رهیافت تولید ستون» به صورت زیر انجام خواهد شد [23]:

ابتدا یک بردار جریان شدنی انتخاب می‌کنیم و برای هر زوج  $w$ ، مجموعه متناظر از مسیرهایی استفاده شده  $p_w^0$  را در نظر می‌گیریم. بعد از آن در  $k$ -امین تکرار با به کار گیری فرمول هزینه، هزینه‌های یال مرتبط با بردار جریان جاری را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از این هزینه‌های یال، برای هر زوج  $w$  کوتاهترین مسیر را محاسبه می‌کنیم. اگر این مسیر در مجموعه مسیرهای به دست آمده قبلی قرار نگرفته باشد آن را به مجموعه مسیرها اضافه می‌کنیم. بنابراین در  $k$ -امین تکرار، مجموعه شدنی  $X$  می‌تواند با مجموع  $X^k = \prod_{w \in W} X_w^k$  جایگزین شود که در آن

$$X_w^k = \left\{ F \in R_+^{|P_w^k|} : \sum_{p \in P_w^k} F_p = d_w \right\}$$

سپس جریان توسط تکرارهای الگوریتم پیشنهاد شده برای نامساوی تغییراتی، به روز می‌شود.

به منظور به کارگیری و توسعه الگوریتم پیشین برای حل مسأله تعادل شبکه ترافیک نامتقارن، در  $k$ -امین تکرار برای هر زوج  $w$ ، جریان مسیر را به صورت  $F_w^k = (F_p^k)_{p \in P_w^k}$  و هزینه مسیر را به صورت  $C_w(F^k) = (C_p(F^k))_{p \in P_w^k}$  در نظر می‌گیریم. بردار جریان را با  $(F_w^k)_{w \in W}$  در  $C(F^k) = (C_w(F^k))_{w \in W}$  و بردار هزینه را به صورت  $C(F^k) = (C_w(F^k))_{w \in W}$  نمایش می‌دهیم. براساس مطالب بیان شده، جزئیات الگوریتم برای حل مسأله تعادل ترافیک نامتقارن به صورت زیر ارائه می‌شود.

بازنویسی الگوریتم پیشنهادی برای حل مسأله تعادل

<sup>3</sup> Sioux-Fall

<sup>2</sup> Dijkstra



شود که نمایانگر اثر سایر یال‌ها به ویژه یالی که در خلاف جهت آن است نیز باشد. به همین جهت تابع بهبود یافته

$$c_{i,j}(f) = t_{i,j} \left[ 1 + 0,15 \left( \frac{f_{i,j} + 0,5f_{j,i}}{2K_{i,j}} \right)^4 \right]$$

برای مدل‌های نامتقارن ترافیک، معرفی شده است [25]. برای اجرای الگوریتم، پارامترها را به صورت زیر تنظیم کرده‌ایم:

$$\beta = 0/8, \varepsilon = 0/9, \bar{\alpha} = 10^6, \delta = 10^{-4}$$

جدول 4 نتایج حاصل از اجرای الگوریتم را نشان می‌دهد. ستون دوم جدول تعداد تکرار، ستون سوم تعداد توابع هزینه محاسبه شده، ستون چهارم بیشینه بعد (متغیرهای) هر زیر مساله و ستون آخر معرف زمان انجام محاسبه می‌باشد.

می‌دهیم. اطلاعات این شبکه مطابق شکل 1، در جدول 3 آورده شده است.

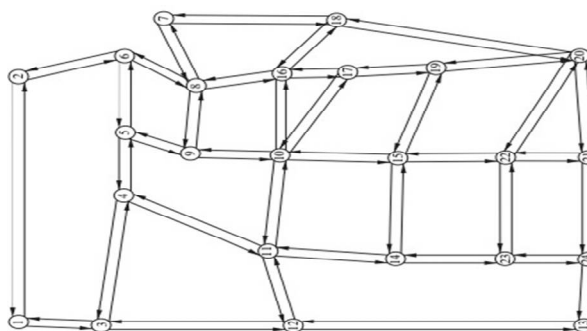
در معرفی تابع هزینه سفر، اداره‌ی راه‌های (جاده‌های) عمومی آمریکا<sup>4</sup>، BPR، تابع هزینه زیر را معرفی نموده است:

$$c_{i,j}(f) = t_{i,j} \left[ 1 + 0,15 \left( \frac{f_{i,j}}{K_{i,j}} \right)^4 \right] N$$

که در آن  $c_{i,j}(f)$  هزینه سفر روی یال  $(i, j)$  در جریان  $f$  و  $t_{i,j}$  هزینه سفر در شرایط بدون جریان (جریان صفر) روی یال  $(i, j)$  و همچنین  $f_{i,j}$  و  $K_{i,j}$  به ترتیب جریان و ظرفیت یال  $(i, j)$  است. در این تابع پیشنهادی هزینه سفر روی هر یال فقط به جریان روی آن یال بستگی دارد، اما با توجه به اثر متقابل وضعیت ترافیک یال‌ها و مسیرها بر همدیگر، هزینه سفر روی هر یال باید به گونه‌ای در نظر گرفته

جدول 3- اطلاعات شبکه سایوکس فال

نمونه	تعداد گره	تعداد یال	تعداد زوج مبدأ-مقصد
سایوکس فال	24	76	528



شکل 1- شبکه ترافیک سایوکس فال

جدول 4- نتایج عددی برای شبکه ترافیک سایوکس فال

تکرار	تعداد تابع هزینه	بیشینه بعد	CPU time
69	239	3	2/19

<sup>4</sup> Bureau of Public Roads

با توجه به ساختار تجزیه‌پذیر مجموعه شدنی  $X$ ، به کار گرفتن الگوریتم‌های تصویر مناسب است. روشن است که مسأله کوتاهترین مسیر برای مسائل شبکه با چند صد گره به خوبی حل پذیر هستند. همانگونه که در نتایج عددی مشاهده شد بیشینه بعد هر زیرمساله بزرگ نیست، بنابراین الگوریتم پیشنهادی برای مسائل با اندازه بزرگ از کارایی لازم برخوردار است.

### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک الگوریتم جدید برای حل مسأله نامساوی تغییراتی ارائه گردید. الگوریتم ارائه شده مبتنی بر روش گرادیان افزوده است و در آن نیازی به دانستن ثابت لیپ‌شیتز، برای طراحی الگوریتم نیست. با بررسی نتایج عددی به دست آمده، به ویژه برای ساختارهای چندوجهی که تعداد وجه‌های آنها بیشتر باشد، نشان داده شد که این الگوریتم سرعت همگرایی بالاتری در مقایسه با الگوریتم‌های پیشنهاد شده مارکوت، سولودو-سواپتر و سولودو-تسنگ دارد. در ادامه به منظور استفاده از الگوریتم ارائه شده در حل مسأله تعادل ترافیک، با بررسی نسبت میان این مسأله و مسأله نامساوی تغییراتی، ثابت شد که یک مسأله تعادل ترافیک را می‌توان به صورت یک مسأله نامساوی تغییراتی مدل کرد. با به‌کارگیری الگوریتم پیشنهادی برای حل مسأله تعادل ترافیک، نتایج به دست آمده نشان داد که این الگوریتم کارایی لازم برای حل مسائل با اندازه بزرگ را دارد.

### تشکر و قدردانی

از داوران محترم بابت داوری این مقاله و ارائه پیشنهادات سودمندشان نهایت سپاس و قدردانی را داریم.

for monotone variational inequalities in a unified framework II: General methods and numerical experiments, *Computational Optimization and Application*, 51 (2), 681–708.

[10] Marcotte, P., (1991). Application of Khobotov's algorithm to variational inequalities and network equilibrium problem, *Information Systems and Operational Research*, 29(4), 258–270.

[11] Iusem, A. N., (1994). An iterative algorithm for the variational inequality problem, *Computational and Applied Mathematics*, 13(2), 103-114.

[12] Iusem, A. N., and Svaiter, B. F., (1997). A variant of Korpelevich's method for variational inequalities with a new search strategy, *Optimization*, 42,309-321.

[13] Solodov, M. V. and Svaiter, B. F., (1999). A new projection method for variational inequality problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(3), 756-776.

[14] Solodov, M. V. and Tseng, P., (1996). Modified projection type methods for monotone variational inequalities, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(5), 1914-1830.

[15] A. Cegielski, (2011) *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*, Springer, London.

[16] Tinti, F. (2005). Numerical solution for pseudomonotone variational inequality problems by extragradient methods, *NOIA Variational Analysis and Applications*, 79, 1101-1128.

[17] Harker, P. T., (1988). Accelerating the convergence of the diagonalization and projection algorithms for finite-dimensional variational inequalities, *Mathematical Programming*, 41, 29-59.

## فهرست مراجع

[1] جاهدی، صدیقه و پیوند، مرادعلی، یک الگوریتم تکراری برای مسایل تعادل تعمیم یافته، نامساوی تغییراتی و نقطه ثابت مبتنی بر روش گرادیان افزوده، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، دوره 2، شماره 7، آذر و دی 1395، صفحه 61-76.

[2] Facchinei, F., and Pang, J. S., (2003). *Finite Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volume I, II*, New York, Springer.

[3] Konnov, I. V. and Laitinen, E., (2002). *Theory and Application of Variational Inequalities*, University of Oulu, ISBN 951- 4242-6688-9.

[4] Patriksson, M., (1999). *Nonlinear Programming and Variational Inequality Problems, a Unified Approach*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

[5] Korpelevich, G. M., (1976). The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Matecon*, 12, 747- 756.

[6] Dafermos, S., (1980). Traffic equilibrium and variational inequalities, *Transportation Science*, 14, 42-54.

[7] Pang, J. S. and Gabriel, S. A., (1993). A robust algorithm for the nonlinear complementary problem, *Mathematical Programming*, 60, 295-337.

[8] Khobotov, E. N. (1987). Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems, *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 27(5), 120–127.

[9] He, B., Liao, L. Z., and Wang, X. (2012). Proximal-like contraction methods

[18] Patriksson, M., (2015). *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*, New York, Dover Publications.

[19] Michelot, C., (1986). A finite algorithm for finding the projection of a point onto the canonical simplex of  $\mathbb{R}^n$ , *Journal of Optimization Theory and Applications*, 50, 195–200.

[20] Bertsekas, D. P. and Gafni, E. M., (1982). Projection methods for variational inequality with application to the traffic assignment problem, *Mathematical Programming Study*, 17, 139-159.

[21] Chen, A., Lee, D. H. and Nie, Y., (2003). conjugate gradient projection algorithm for the traffic assignment problem", *Mathematical and Computer Modelling*, 37, 863–878.

[22] Nagurney, A. and Zhang, D., (1996). *Projected dynamical systems and variational inequalities with applications*, Boston, Kluwer.

[23] Leventhal, L., Nemhouse, G. and Trotter, L., (1972). A column generation algorithm for optimal traffic assignment, *Transportation Science*, 7, 168-172.

[24] Bar-Gera, H., Transportation Network Test Problems, <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>.

[25] Barbara P., Massimo P., and Mauro P., (2007). A path-based double projection method for solving the asymmetric traffic network equilibrium problem, *Optimization Letters*, 1, 171–185.