دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(G)$

اعظم قلعه آقابابایی[۱]، عفت گلپررابوکی[۲*]، محدثه حیدری بندرآبادی[۳]

[۱و۲و۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۵/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۱۶

چکیده

انرژی گراف توسط گوتمن در ۱۹۷۰ مطرح شد و پس از آن انواع مختلفی از انرژی بر حسب ویژگی‌های گراف تعریف شده است. اخیرا خواص طیفی ترکیب محدب $0 \leq \alpha \leq 1$ $\quad A_\alpha(G) \quad \alpha D(G) + (1 \quad \alpha)A(G)$ که $A(G)$ ماتریس مجاورت و $D(G)$ ماتریس قطری درجه‌های گراف G است، مورد توجه قرار گرفته و ویژگی‌های طیفی آن بررسی شده است. ما در این مقاله به بررسی انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(G)$ که G یک گراف ساده بدون جهت است، می‌پردازیم. نشان می‌دهیم انرژی حلال $A_\alpha(G)$ با افزایش α افزایش می‌یابد و اگر $\alpha > \frac{1}{2}$ انرژی $A_\alpha(G)$ نیز افزایشی است. کران‌هایی برای انرژی $A_\alpha(G)$ بر حسب درجه راس‌های گراف ارائه می‌دهیم همچنین، کران‌هایی برای انرژی $A_\alpha(\mathrm{G})$ در صورتی که G یک گراف منظم باشد، بیان می‌کنیم. سپس، انرژی و انرژی حلال گراف‌های مسیر و دور را محاسبه می‌کنیم و در آخر انرژی $A_\alpha(G)$ را برای گراف‌های کامل، دوبخشی کامل و ستاره محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: پولشویی، بانک، نقشه‌های خودسازمانده، شبکه عصبی چند لایه.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: g.raboky@qom.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید $G = \big(V(G), E(G)\big)$ یک گراف با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. فرض می‌کنیم G یک گراف ساده بدون جهت باشد (منظور از گراف ساده گرافی است که شامل حلقه و یال چندگانه نیست). فرض کنید $A(G)$ ماتریس مجاورت گراف G و $D(G)$ ماتریس قطری شامل درجه‌های G باشد. همچنین، طیف گراف G، یعنی مجموعه مقادیر ویژه گراف G را با $S(G)$ نشان می‌دهیم. ترکیب‌های مختلفی از $A(G)$ و $D(G)$ همچون ماتریس لاپلاسین بی‌علامت

$$Q(G) \quad A(G) + D(G)$$

مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۱]. لی و همکاران [۲] یک ترکیب محدب از $A(G)$ و $D(G)$ به صورت

$$A_\alpha(G) \quad \alpha D(G) + (1 \quad \alpha)A(G), \qquad (۱)$$

که $0 \le \alpha \le 1$، معرفی و خواص طیفی $A_\alpha(G)$ را مورد بررسی قرار دادند. مشاهده می‌کنیم

$$A(G) = A_0(G), D(G) = A_1(G)$$

و

$$Q(G) = 2A_{1/2}(G).$$

انرژی گراف بدون جهت G توسط گوتمن در ۱۹۷۰ به صورت مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن معرفی شد. فرض کنید G یک گراف شامل n رأس و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه $A(G)$ باشند. انرژی گراف G عبارتست از:

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} \big|\lambda_i\big(A(G)\big)\big|. \qquad (۲)$$

انواع مختلفی از انرژی گراف معرفی شده است. نوع دیگری از انرژی گراف که ما در این مقاله به آن می‌پردازیم انرژی حلال گراف است که توسط گوتمن و همکاران [۳] معرفی شد. فرض کنید G یک گراف ساده بدون جهت باشد. انرژی حلال گراف G که با $ER(G)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود[۴]:

$$ER(G) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - \lambda_i(A(G))}. \qquad (۳)$$

چون گراف G یک گراف ساده بدون جهت است بنابراین ماتریس مجاورت آن متقارن و مقادیر ویژه آن همگی حقیقی هستند. به علاوه داریم:

$$\big|\lambda_i\big(A(G)\big)\big| \le n \quad 1, i = 1, \dots, n \qquad (۴)$$

بنابراین، رابطه (۳) خوش تعریف است.

توجه کنید که همان‌طور که بیان شد، انرژی گراف و انرژی حلال گراف توسط فرمول‌هایی براساس مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف مطرح شد. در ادامه به بررسی انرژی و انرژی حلال ماتریس $A_\alpha(G)$ می‌پردازیم برای این منظور از همان فرمول‌ها استفاده می‌شود و در آن‌ها مقادیر ویژه ماتریس $A_\alpha(G)$ جایگذاری می‌شود.

در این مقاله به بررسی انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(G)$ می‌پردازیم و کران‌هایی برای انرژی ارائه می‌کنیم. همچنین، انرژی $A_\alpha(G)$ که در آن G مسیر، دور، گراف کامل، دوبخشی کامل و ستاره است را محاسبه می‌کنیم.

این مقاله به صورت زیر تنظیم شده است. در بخش ۲ نمادها و تعاریف مقدماتی را مطرح می‌کنیم. در بخش ۳ نشان می‌دهیم انرژی حلال $A_\alpha(G)$ با افزایش α افزایش می‌یابد و اگر $\alpha > \frac{1}{2}$ انرژی $A_\alpha(G)$ نیز افزایشی است. در بخش ۴، گراف‌های منظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم و کران‌هایی برای انرژی $A_\alpha(G)$ بیان می‌کنیم. در بخش ۵، انرژی A_α را برای مسیر، دور، گراف کامل، دوبخشی کامل و ستاره محاسبه می‌کنیم.

۲- نمادها و تعاریف اولیه

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و $\lambda_1 \ge \quad \ge \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند. بزرگترین

و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A را به ترتیب با نماد $\lambda_{max}(A)$ و $\lambda_{min}(A)$ نشان می‌دهیم. بزرگترین و کوچکترین درجه رئوس گراف G را به ترتیب با نماد $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.
گراف کامل از مرتبه n را با K_n، گراف دوبخشی کامل با مجموعه‌های افراز با اندازه‌های a و b را با $K_{a,b}$، و ستاره از مرتبه n که یک گراف دوبخشی کامل به صورت $K_{1,n-1}$ است را با S_n نشان می‌دهیم.
اگر G یک گراف شامل n راس و $\lambda_1(A_\alpha(G)), \dots, \lambda_n(A_\alpha(G))$ مقادیر ویژه ماتریس $A_\alpha(G)$ باشند، آنگاه انرژی $A_\alpha(G)$ عبارتست از:

$$E(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A_\alpha(G))|$$

و انرژی حلال $A_\alpha(G)$ عبارتست از:

$$ER(A_\alpha(G)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-\lambda_i(A_\alpha(G))}.$$

از آن‌جا که ماتریس $A_\alpha(G)$ ترکیبی از دو ماتریس نامنفی است و برای محاسبه انرژی، به مقادیر ویژه آن نیاز داریم؛ از نامساوی‌های ویل برای مقادیر ویژه ماتریس‌های هرمیتی استفاده می‌کنیم. (برای جزئیات بیشتر [۵، ۶، ۷] را ببینید.)
در ادامه این نامساوی‌ها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۲. فرض کنید A و B ماتریس‌های هرمیتی از مرتبه n باشند و
$\lambda_1(A) \geq \quad \geq \lambda_n(A)$ مقادیر ویژه ماتریس A
و $\lambda_1(B) \geq \quad \geq \lambda_n(B)$ مقادیر ویژه ماتریس B باشند. آن‌گاه،

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_{i+j-n}(A+B) \qquad (۵)$$

و اگر $i + j \geq n + 1$

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \geq \lambda_{i+j-1}(A+B) \qquad (۶)$$

اگر

$$i + j \leq n + 1$$

در هر یک از این نابرابری‌ها، تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر یک بردار n تایی غیرصفر وجود داشته باشد که یک بردارویژه برای هر یک از سه مقدارویژه دیگر باشد. رابطه‌ی زیر یک نسخه‌ی ساده شده از (۵) و (۶) است:

$$\lambda_k(A) + \lambda_{min}(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_{max}(B) \qquad (۷)$$

۳- یکنوایی انرژی $A_\alpha(G)$

ابتدا به بررسی یکنوایی $A_\alpha(G)$ نسبت به α می‌پردازیم و نشان می‌دهیم افزایش α چه تاثیری بر انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(G)$ دارد. گزاره زیر یکنوایی مقادیر ویژه نسبت به α را بیان می‌کند.

گزاره ۱-۳. فرض کنید G یک گراف از مرتبه n، همچنین
$1 \geq \alpha > \beta \geq 0$، و
$\lambda_1(A_\alpha) \geq \quad \geq \lambda_n(A_\alpha)$ و
$\lambda_1(A_\beta) \geq \quad \geq \lambda_n(A_\beta)$،
به‌ترتیب مقادیر ویژه $A_\alpha(G) = A_\alpha$ و $A_\beta(G) = A_\beta$ باشند. آن‌گاه،

$$\lambda_k(A_\alpha) \geq \lambda_k(A_\beta),\ 1 \leq k \leq n \qquad (۸)$$

اگر G همبند باشد، آن‌گاه نامساوی (۸) اکید است، مگر این‌که $k = 1$ و G منظم باشد.
اثبات. گزاره ۳ در [۸] را ببینید.
حال با استفاده از گزاره ۱-۳ به بررسی یکنوایی انرژی حلال A_α نسبت به α می‌پردازیم.

گزاره ۲-۳. فرض کنید $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$. آن‌گاه،

$$ER(A_\alpha) \geq ER(A_\beta)$$

اثبات: طبق گزاره ۱-۳ و از رابطه (۸)، برای $k = 1, \dots n$، داریم:

$$\frac{1}{n-\lambda_k(A_\alpha)} \geq \frac{1}{n-\lambda_k(A_\beta)},$$

در نتیجه برای $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-\lambda_k(A_\alpha)} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-\lambda_k(A_\beta)}$$

یا به عبارت دیگر

$$ER(A_\alpha) \geq ER(A_\beta).$$

یکنوایی برای انرژی در حالت کلی برقرار نیست. در ادامه شرایطی ارائه می‌کنیم که انرژی $A_\alpha(G)$ یکنوا خواهد بود. بدین منظور از گزاره زیر استفاده می‌کنیم.

گزاره ۳-۳. فرض کنید $\alpha > \frac{1}{2}$. آن‌گاه $A_\alpha(G)$ نیمه معین مثبت است. اگر G هیچ رأس تنهایی نداشته باشد، آن‌گاه $A_\alpha(G)$ معین مثبت است.
اثبات. به گزاره ۶ در [۸] مراجعه شود.

گزاره ۴-۳. فرض کنید $\alpha > \beta > \frac{1}{2}$. در این صورت

$$E(A_\alpha(G)) \geq E\big(A_\beta(G)\big).$$

اثبات: طبق گزاره ۳-۳، $A_\alpha(G)$ و $A_\beta(G)$ نیمه معین مثبت هستند و مقادیر ویژه‌ی آن‌ها نامنفی است، به‌علاوه $\lambda_k(A_\alpha) \geq \lambda_k\big(A_\beta\big)$ بنابراین:

$$E(A_\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A_\alpha) \geq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\big(A_\beta\big) = E\big(A_\beta\big).$$

۴- گراف‌های منظم

فرض کنید G یک گراف از مرتبه n و d ـ منظم باشد. آن‌گاه برای $0 \leq \alpha \leq 1$ داریم:

$$A_\alpha(G) = \alpha d I_n + (1 \quad \alpha)A(G).$$

بنابراین، برای $1 \leq k \leq n$ داریم:

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) = \alpha d + (1 \quad \alpha)\lambda_k\big(A(G)\big). \qquad (۹)$$

انرژی A_α برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ عبارتست از:

$$E\big(A_\alpha(G)\big) = \sum_{k=1}^{n}\big|\alpha d + (1 \quad \alpha)\lambda_k\big(A(G)\big)\big| \leq n\alpha d + (1 \quad \alpha)E(G).$$

انرژی حلال $A_\alpha(G)$ به صورت زیر است:

$$ER\big(A_\alpha(G)\big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-\alpha d-(1-\alpha)\lambda_k(A)}. \qquad (۱۰)$$

در ادامه کران‌هایی برای انرژی $A_\alpha(G)$ ارائه می‌دهیم.

لم ۱-۴. فرض کنید G یک گراف از مرتبه n و $d_1 \geq \quad \geq d_n$ درجه رئوس گراف باشد. در این صورت، برای $1 \leq k \leq n$ داریم:

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) \leq d_k. \qquad (۱۱)$$

و به طور خاص، $\lambda_k(A_\alpha(G)) \leq \Delta(G)$.
اثبات. از گزاره ۱-۳ و با توجه به $\alpha \leq 1$ داریم:

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) \leq \lambda_k(A_1(G)) = \lambda_k(D(G)) = d_k$$

با توجه به تعریف $\Delta(G)$ بدیهی است که

$$\lambda_k(A_\alpha(G)) \leq \Delta(G).$$

گزاره۲-۴. فرض کنید G یک گراف ساده باشد. آنگاه، کران‌های زیر برای انرژی و انرژی حلال $A_\alpha = A_\alpha(G)$ وجود دارد.

$$E(A_\alpha) = \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k\,(A_\alpha)| \leq \sum_{k=1}^{n}d_k$$

$$ER(A_\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-\lambda_k(A_\alpha)} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-d_k}$$

اثبات. از رابطه‌ی (۱۱) حکم بدیهی است.

گزاره ۲-۴. فرض کنید $\alpha \in [0,1]$ و G یک گراف با $A(G) = A$ و $A_\alpha(G) = A_\alpha$ باشد، آن‌گاه

$$\delta\alpha + (1 \quad \alpha)\lambda_k(A) \le \lambda_k(A_\alpha) \le \alpha\Delta + (1 \quad \alpha)\lambda_k(A). \qquad (۱۲)$$

اثبات: از رابطه‌ی (۷) و با توجه به تعریف A_α داریم:

$$\alpha\lambda_{min}(D) + (1 \quad \alpha)\lambda_k(A) \le \lambda_k(A_\alpha) \le (1 \quad \alpha)\lambda_k(A) + \alpha\lambda_{max}(D)$$

D یک ماتریس قطری است به طوریکه $\lambda_{min}(D) = \delta$ و $\lambda_{max}(D) = \Delta$ بنابراین رابطه (۱۲) برقرار است.

۵- انرژی و انرژی حلال A_α برخی از گراف‌ها

در این بخش به بررسی انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(G)$ که G مسیر، دور، گراف کامل، کامل دوبخشی و ستاره باشد، می‌پردازیم.

۵-۱- گراف P_n

مجموعه مقادیر ویژه گراف P_n که با $S(P_n)$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر است:

$$S(P_n) = \{2cos\frac{\pi k}{n+1}, k = 1, \dots, n\}$$

در نتیجه $\lambda_{max} < 2$ و $\lambda_{min} > \quad 2$ در این گراف ۲ رأس از درجه ۱ و $n \quad 2$ رأس از درجه ۲ داریم. پس طبق رابطه‌ی (۱۲) داریم:

$$3\alpha \quad 2 = \alpha \quad 2(1 \quad \alpha) < \lambda_k(A_\alpha) < 2\alpha + 2(1 \quad \alpha) = 2. \qquad (۱۳)$$

در نتیجه

$$|\lambda_k(A_\alpha)| < 2, \qquad k = 1, \dots, n.$$

بنابراین برای محاسبه کران بالای $E(A_\alpha)$ از رابطه (۱۳) داریم:

$$0 \le E(A_\alpha) < 2n.$$

برای محاسبه کران بالا و پایین $ER(A_\alpha)$ از رابطه (۱۳) داریم:

$$\frac{1}{n-3\alpha+2} < \frac{1}{n-\lambda_k(A_\alpha)} < \frac{1}{n-2}$$

بنابراین

$$\frac{n}{n-3\alpha+2} \le ER(A_\alpha) \le \frac{n}{n-2}. \qquad (۱۴)$$

۵-۲- گراف C_n

مجموعه مقادیر ویژه گراف C_n به‌صورت زیر است:

$$S(C_n) = \{2cos\frac{2\pi k}{n}, k = 0, \dots, n \quad 1\}$$

در نتیجه $\lambda_{max} = 2$ و $\lambda_{min} > \quad 2$ در این گراف تمام رئوس از درجه ۲ هستند. بنابراین از رابطه‌ی (۱۲)، برای $k = 1, \dots, n$، کران‌های مقادیر ویژه به‌صورت:

$$4\alpha \quad 2 = 2\alpha \quad 2(1 \quad \alpha) < \lambda_k(A_\alpha) \le 2 \qquad (۱۵)$$

خواهد بود. بنابراین

$$|\lambda_k(A_\alpha)| \le 2, \qquad k = 1, \dots, n$$

و در نتیجه داریم:

$$0 \le E(A_\alpha) \le 2n.$$

همچنین، طبق رابطه‌ی(۱۵)، برای $k = 1, \dots, n$ داریم:

$$\frac{1}{n-4\alpha+2} \le \frac{1}{n-\lambda_k(A_\alpha)} \le \frac{1}{n-2}$$

بنابراین

$$\frac{n}{n-4\alpha+2} \le ER(A_\alpha) \le \frac{n}{n-2}.$$

۳-۵- گراف K_n

گزاره ۱-۳-۵. [۸] مقادیر ویژه $A_\alpha(K_n)$ به صورت زیر است:

$$\lambda_{max}(A_\alpha(K_n)) = n \quad 1$$

و

$$\lambda_k(A_\alpha(K_n)) = \alpha n \quad 1,\ \ 2 \le k \le n.$$

گزاره ۲-۳-۵. انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(K_n)$ برای $n \ge 1$ و $0 \le \alpha \le 1$ به‌ترتیب

$$E(A_\alpha(K_n)) = \begin{cases} \alpha n(n \quad 1), & \alpha \ge \frac{1}{n} \\ (n \quad 1)(2 \quad \alpha n), & \alpha < \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (۱۶)$$

و

$$ER(A_\alpha(K_n)) = \frac{n(2-\alpha)}{n(1-\alpha)+1}. \qquad (۱۷)$$

اثبات: بنابر مقادیر وِیژه K_n که در گزاره ۱-۳-۵ بیان شد داریم:

$$E(A_\alpha(K_n)) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(A_\alpha(K_n))| = (n \quad 1)(1 + |\alpha n \quad 1|)$$

با توجه به وجود عبارت $|\alpha n \quad 1|$، با بررسی پارامتر α برای دوحالت $\alpha \ge \frac{1}{n}$ و $\alpha < \frac{1}{n}$ درستی رابطه (۱۶) ثابت می‌شود. همچنین برای انرژی حلال $A_\alpha(K_n)$ داریم:

$$ER(A_\alpha(K_n)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-\lambda_k(A_\alpha(K_n))} = \frac{1}{n-(n-1)} + \frac{n-1}{n-(\alpha n-1)} = \frac{n(2-\alpha)}{n(1-\alpha)+1}.$$

۴-۵- گراف $K_{a,b}$

گزاره ۱-۴-۵.[۸] فرض کنید $a \ge b \ge 1$. اگر $\alpha \in [0,1]$، مقادیر ویژه $A_\alpha(K_{a,b})$ به صورت زیر است:

$$\lambda_{max}\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha(a+b) + \sqrt{\alpha^2(a+b)^2 + 4ab(1 \quad 2\alpha}\right)$$

$$\lambda_{min}\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \lambda_n = \frac{1}{2}\left(\alpha(a+b) \quad \sqrt{\alpha^2(a+b)^2 + 4ab(1 \quad 2\alpha}\right),$$

$$\lambda_k\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \alpha a\,,\ \ 1 < k \le b,$$

$$\lambda_k\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \alpha b, b < k < a+b.$$

گزاره ۲-۴-۵. فرض کنید $a \ge b \ge 1$ و $\alpha \in [0,1]$. انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(K_{a,b})$ عبارتست از:

$$E\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \begin{cases} \alpha(2ab-a-b) + \alpha(a+b), & \alpha \ge \frac{1}{2} \\ \alpha(2ab-a-b) + \sqrt{\alpha^2(a+b)^2 + 4ab(1-2\alpha)}, & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

و اگر $a = b$، آن‌گاه

$$E\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \begin{cases} 2\alpha a^2 & \alpha \ge \frac{1}{2} \\ 2a(\alpha a \quad 2\alpha + 1) & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

و

$$ER\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \frac{b \quad 1}{n \quad \alpha a} + \frac{a \quad 1}{n \quad \alpha b} + \frac{2n \quad \alpha(a+b)}{n^2 \quad n\alpha(a+b) \quad ab(1 \quad 2\alpha)}$$

و اگر $a = b$ باشد، آن‌گاه

$$ER\left(A_\alpha(K_{a,b})\right) = \frac{2(a-1)}{n-\alpha a} + \frac{2(n-\alpha a)}{n^2-2n\alpha a-a^2(1-2\alpha)}$$

نتیجه ۳-۴-۵. گراف ستاره با n رأس یک گراف کامل دوبخشی به صورت $K_{1,n-1}$ است. بنابراین مقادیر ویژه آن عبارتند از:

$$\lambda_{max}\left(A_\alpha\left(K_{1,n-1}\right)\right)=\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\alpha n+\sqrt{\alpha^2n^2+4(n\quad 1)(1\quad 2\alpha)}\right),$$
$$\lambda_{min}\left(A_\alpha\left(K_{1,n-1}\right)\right)=\lambda_n=\frac{1}{2}\left(\alpha n\quad\sqrt{\alpha^2n^2+4(n\quad 1)(1\quad 2\alpha)}\right),$$
$$\lambda_k\left(A_\alpha\left(K_{1,n-1}\right)\right)=\alpha, 1<k<n$$

بنابراین انرژی و انرژی حلال $A_\alpha(S_n)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$E\left(A_\alpha(S_n)\right)=\begin{cases}2\alpha(n\quad 1), & \alpha\geq\frac{1}{2}\\ \sqrt{\alpha^2n^2+4(n\quad 1)(1\quad 2\alpha)}+(n\quad 2)\alpha, & \alpha<\frac{1}{2}\end{cases}$$

و

$$ER\left(A_\alpha(S_n)\right)=\frac{n^3(1\quad\alpha)+n^2(3\alpha\quad 1)+n(\alpha^2\quad 8\alpha+3)\quad 2+4\alpha}{n^3(1\quad\alpha)+n^2(\alpha^2+\alpha\quad 1)+n(1\quad\alpha\quad 2\alpha^2)\quad\alpha+2\alpha^2}$$

نتیجه‌گیری

انرژی گراف توسط گوتمن در ۱۹۷۰ مطرح شد. اخیرا ترکیب محدب ماتریس مجاورت و ماتریس علامت گراف G که با نماد $A_\alpha(G)$ نشان داده می‌شود، مورد توجه قرار گرفته و ویژگی‌های طیفی آن بررسی شده است. ما در این مقاله انرژی و انرژی حلال یک گراف ساده بدون جهت را مورد بررسی قرار دادیم. نشان دادیم که افزایش α باعث افزایش $A_\alpha(G)$ می‌شود. همچنین کران‌هایی را برای انرژی $A_\alpha(G)$ که G یک گراف منظم است بیان کردیم. انرژی $A_\alpha(G)$ را برای گراف‌های مسیر، دور، گراف کامل، گراف دوبخشی کامل و گراف ستاره محاسبه کردیم.

فهرست منابع

[1] D. Cvetković, Signless Laplacians and line graphs, Bulletin academie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathematiques et natturalles, 131 (30) (2005), 85-92.

[2] J. Liu, X. Wu, J. Chen, and B. Liu,The A_α spectral radius characterization of some digraphs, Linear algebra and its applications, 563 (2019), 63-74.

[3] I. Gutman, The energy of a graph, Ber. Math. Statist. Sekt. Forschungsz. Graz. 103 (1978), 1–22.

[4] I. Gutman, B. Furtula, E. Zogic, and E. Glogic, Resolvent energy of graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem, 75(2) (2016), 279-290.

[5] Y. Ikebe, T. Inagaki and S. Miyamoto, The monotonicity theorem, Cauchy's interlace theorem, and the Courant-Fischer theorem, The American Mathematical Monthly, 94(4) (1987), 352-354.

[6] C. R. Johnson, and R. A. Horn, Matrix analysis, Cambridge: Cambridge University Press, (1985).

[7] W. So, Commutativity and spectra of Hermitian matrices, Linear algebra and its applications, 212 (1994), 121-129.

[8] V. Nikiforov, Merging the A- and Q-spectral theories, Applicable analysis and discrete mathematics, 11(1) (2017), 81-107.