دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل جبری معادلات ماتریسی غیرمربعی بازه‌ایی به فرم $A[X] = [B]$

راهله نورایی[۱*]، مجتبی قنبری[۲]

(۱) گروه ریاضی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد علی آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی آباد کتول، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۲۲   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۱

چکیده

یکی از معادلات پرکاربرد در برخی از شاخه های علمی، معادلات ماتریسی می باشد. در این مقاله، نوع خاصی از این معادلات بنام معادلات ماتریسی بازه‌ایی به فرم $A[X] = [B]$ در حالت کلی (مربعی و غیرمربعی) مورد مطالعه قرار گرفته است. دو روش ساده برای حل جبری این گونه معادلات ارائه شده است. در روش اول، براساس حساب بازه‌ایی، یک معادله ی ماتریسی بازه‌ایی تبدیل به یک معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) با اندازه‌ایی بزرگتر می شود. همچنین براساس روش دوم و با توجه به بعضی مفاهیم، یک معادله ی ماتریسی بازه‌ایی تبدیل به دو معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) با همان ابعاد و اندازه شده است. شرایط لازم و کافی برای وجود جواب جبری یکتا، در حالتی خاص ارائه شده است. ضمناً برای نشان دادن توانایی و کارایی این دو روش، مثال های عددی در حالت هایی که معادله دارای جواب جبری یکتا و یا دارای بی نهایت جواب جبری است، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: عدد بازه‌ایی، حساب بازه‌ایی، معادلات ماتریسی بازه‌ایی، حل جبری

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:Rahele.Nuraei@gmail.com

۱ مقدمه

در مدل بندی پدیده‌های مختلف فیزیکی با دو نوع عدم قطعیت مواجه هستیم:

نوع اول: عدم قطعیتی که ناشی از ضعف دانش و ابزار بشری در شناخت پیچیدگی‌های یک پدیده می‌باشد. به عنوان مثال برای اندازه گیری دمای یک شهر در چندین نقطه از شهر دماسنج را بکار برده و در نهایت از آن ها میانگین گرفته می‌شود. مسلماً دمای به دست آمده با دمای واقعی آن شهر تفاوت دارد، زیرا اولاً تنها چند نقطه از آن شهر در محاسبات دخالت داده شده است، ثانیاً خطای شخص اندازه گیر و همچنین دستگاه‌ها باعث ایجاد عدم قطعیت در میزان دمای اعلام شده می گردد.

نوع دوم : مربوط به عدم صراحت و عدم شفافیت مربوط به یک پدیده یا ویژگی خاص می‌باشد. یک پدیده ممکن است ذاتاً غیرصریح و وابسته به قضاوت افراد باشد. به عنوان مثال ویژگی گرم بودن هوا از نظر افراد مختلف متفاوت است و هیچ تعریف واحدی برای آن وجود ندارد به طوری که یک نفر دمای ۳۰ درجه را گرم بداند و فرد دیگری ۴۰ درجه را.

بنابراین برای به دست آوردن یک مدل واقع گرایانه، می بایستی عدم قطعیت را در مدل در نظر بگیریم. یکی از روش‌های موجود برای تأثیر عدم قطعیت ذاتی، استفاده از ریاضیات بازه‌ایی می‌باشد. در چند سال اخیر، این نوع ریاضیات در بررسی عدم قطعیت عددی در الگوریتم‌ها و مسائل عددی توسعه‌ی شگرفی داشته است. از طرف دیگر، مسائل بازه‌ای کاربرد فراوانی در علوم مهندسی دارند. این مسائل زمانی به وجود می‌آیند که اطلاعات مسأله نمی‌توانند به صورت دقیق اندازه‌گیری شوند، اما می‌توانند متعلق به دامنه‌ی مشخصی از اعداد باشند [۱, ۲].

یکی از مسائل بازه‌ایی که اخیراً مورد توجه محققان و پژوهشگران قرار گرفته است، معادلات ماتریسی بازه‌ایی می باشد. این معادلات، کاربردهای فراوانی در بعضی شاخه های علوم مهندسی مانند پراکندگی الکترومغناطیسی، مکانیک سازه و نظریه کنترل دارند [۳]. در ادامه به بعضی از فعالیت های پژوهشی صورت گرفته در چند سال گذشته بصورت مختصر اشاره می نماییم.

در سال ۱۹۹۴، سیف و همکاران [۴] معادله ی ماتریسی بازه‌ایی به فرم $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$ را در نظر گرفتند و یک شرط لازم و کافی، برای وجود جواب معادله ی فوق را ارائه دادند. در سال ۲۰۱۱، هاشمی و دهقان [۵] مجموعه جواب های مختلفی برای معادله ی ماتریسی $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$، که در آن $\boldsymbol{A}$ یک ماتریس مربعی بازه‌ایی و $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{X}$ دو ماتریس غیرمربعی بازه‌ایی هستند را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین آنها در سال ۲۰۱۲ [۶]، روشی کارا جهت تخمین خارجی مجموعه جواب معادلات ماتریسی بازه‌ایی به فرم $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^T=\boldsymbol{F}$ ارائه دادند. در سال ۲۰۱۴، ریواز و همکاران [۳] دستگاهی از معادلات ماتریسی بازه‌ایی را که شامل دو معادله و دو مجهول بود را مورد مطالعه قرار دادند و برای آن یک مجموعه جواب تعریف نموده و شرایطی را مطرح نمودند که تحت آن این مجموعه جواب کراندار باشد. سپس روشهای مستقیم و تکراری را برای حل این دستگاه ارائه دادند. همچنین در همین سال، دهقانی مدیسه [۷] معادلات ماتریسی سیلوستر تعمیم یافته ی بازه‌ایی به فرم

$$\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\sum_{j=1}^{q}\boldsymbol{Y}_j\boldsymbol{B}_j=\boldsymbol{C},$$

را مورد مطالعه قرار داده و برای این دسته از معادلات، مفهوم مجموعه جواب تعمیم یافته را مطرح نمودند. در سال ۲۰۱۵، زنگوئی زاده [۸] با در نظر گرفتن معادله ی ماتریسی بازه‌ایی مربعی به فرم $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$، شرایطی را ارائه داد که تحت آنها مجموعه جواب این معادله ی ماتریسی کراندار باشد. در سال ۲۰۱۶، هلنا میسکووا [۹] حل پذیری معادلات ماتریسی بازه‌ایی را در جبر مکس-پلاس مورد مطالعه و بررسی قرار داد. خاطر نشان می گردد که در جبر ماکس-پلاس، عملگر های جمع و ضرب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a\oplus b=\max\{a,b\},\qquad a\otimes b=a+b.$$

در سال ۲۰۱۷، درازنسکا و میسکووا [۱۰] با در نظر گرفتن معادلات ماتریسی بازه‌ایی به فرم $\boldsymbol{AXC}=\boldsymbol{B}$، چهار روش

را برای حل پذیری این گونه معادلات ارائه دادند. در سال ۲۰۱۸، دهقانی مدیسه [۱۱] معادلات ماتریسی بازه‌ایی به فرم $\boldsymbol{AXB + CXD = F}$ را مورد بررسی قرار داده و روش هایی را جهت یافتن تخمین های خارجی مجموعه جواب این گونه معادلات مطرح نمودند. در همین سال، پوپووا در مقاله ی خود [۱۲] معادلات ماتریسی پارامتری به فرم $\boldsymbol{A(p)\,X = B(p)}$ را که در آن پارامتر p متعلق به بازه هایی مشخص و معین می باشد، را مورد مطالعه قرار داد. همچنین، میسکووا در ادامه ی کارهای پژوهشی قبلی خود [۱۳, ۱۴] سه روش برای حل پذیری معادلات ماتریسی بازه‌ایی به فرم $\boldsymbol{AXC = B}$ ارائه داد. همچنین اخیراً، وانگ [۱۵] شرایط لازم و کافی جدیدی برای وجود جواب یکتای معادله ماتریسی به فرم

$$\boldsymbol{AXB + C|X|D = E},$$

ارائه دادند. هدف از این مقاله، حل جبری معادلات ماتریسی بازه‌ایی به فرم

$$\boldsymbol{A[X] = [B]}, \qquad (۱)$$

است، که در آن $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و

$$[\boldsymbol{X}] = \left([x_{ij}]\right)_{n\times p}, \quad [\boldsymbol{B}] = \left([b_{ij}]\right)_{m\times p},$$

ماتریس های بازه‌ایی مقدار هستند. برای این هدف، دو روش مطرح شده است. در روش پیشنهادی اول، براساس حساب بازه‌ایی، معادله ی ماتریسی (۱) را به یک معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) منتها با ابعاد بزرگتر از مسأله ی اولیه، تبدیل می نماییم و سپس به کمک روش حذفی گاوس، جواب جبری مسأله را در صورت وجود می یابیم. همچنین در روش پیشنهادی دوم، براساس بعضی مفاهیم مطرح شده در این مقاله، معادله ی ماتریسی (۱) را به دو معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) با همان ابعاد و اندازه ی مسأله ی اولیه، تبدیل می نماییم و سپس مشابه روش اول، به وسیله ی روش حذفی گاوس، جواب جبری مسأله را در صورت وجود می یابیم. این تحقیق به صورت زیر سازماندهی گردیده است:

در بخش ۲، مفاهیم و مقدمات ریاضیات بازه‌ایی مطرح گردیده است. در بخش های ۳ و ۴، روش های پیشنهادی برای حل جبری معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۱)، به همراه حل مثال های عددی، ارائه شده است. بحث و نتیجه گیری و همچنین ارائه ی موضوعاتی برای انجام پژوهش های آینده، در بخش ۵ آورده شده است.

۲. مفاهیم اولیه

در این بخش، بعضی تعاریف و مفاهیم پایه ای ریاضیات بازه‌ایی که در سرتاسر مقاله از آن ها استفاده می گردد، ارائه می شود.

تعریف ۲-۱. [۱۶] یک عدد بازه‌ایی را با نماد $[x]$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[x] = \{\, t \in \mathbb{R} \;:\; \underline{x} \le t \le \overline{x} \,\} := [\,\underline{x}, \overline{x}\,],$$

که در آن $\mathbb{R}$ بیانگر مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد و $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$ و $\underline{x} \le \overline{x}$.

در تعریف فوق، $\underline{x}$ را کران پایین و $\overline{x}$ را کران بالای عدد بازه‌ایی $[x]$ می‌نامیم. در این مقاله، مجموعه‌ی تمام اعداد بازه‌ایی را با $\mathbb{IR}$ نشان می‌دهیم. همچنین واضح است که $\mathbb{R} \subset \mathbb{IR}$، زیرا

$$\mathbb{R} = \{\, [x] \in \mathbb{IR} \;:\; \underline{x} = \overline{x} \,\}.$$

تعریف ۲-۲. [۱۶] عدد بازه‌ای $[x] = [\,\underline{x}, \overline{x}\,]$ را عدد بازه‌ایی محض می‌نامیم هرگاه $\underline{x} < \overline{x}$. در این صورت می نویسیم $[x] \in \mathbb{IR}\backslash\mathbb{R}$.

تعریف ۲-۳. [۱۶] برای اعداد بازه‌ایی دلخواه $[x]$ و $[y]$ داریم:

$$[x] = [y] \iff \underline{x} = \underline{y} \;\;\&\;\; \overline{x} = \overline{y}.$$

تعریف ۲-۴. [۱۶] هرگاه $[x]$ و $[y]$ دو عدد بازه‌ایی دلخواه باشند، آنگاه

$$[x] \le [y] \quad \iff \quad \overline{x} \le \underline{y}.$$

از تعریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$$[x] \leq [\cdot] \coloneqq [\cdot,\cdot] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} \leq \cdot,$$
$$[x] \geq [\cdot] \coloneqq [\cdot,\cdot] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x} \geq \cdot.$$

تعریف ۲-۵. [۱۶] عدد بازه‌ایی $[x] = [\underline{x},\overline{x}]$ را متقارن گوییم هرگاه:

$$\underline{x} + \overline{x} = \cdot.$$

تعریف ۲-۶. [۱۷] مرکز عدد بازه‌ایی $[x]$ را با نماد x^c نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$x^c = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{۲}.$$

با توجه به تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای عدد بازه‌ایی متقارن $[x]$ داریم: $x^c = \cdot$.

تعریف ۲-۷. [۱۷] پهنای عدد بازه‌ایی $[x]$ را با نماد x^w نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$x^w = \overline{x} - \underline{x}.$$

تعریف ۲-۸. [۱۷] شعاع عدد بازه‌ایی $[x]$ را با نماد x^r نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$x^r = \frac{۱}{۲} x^w = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{۲}.$$

با استفاده از مفاهیم فوق، می‌توانیم قضیه ی زیر را ارائه دهیم.

قضیه ۲-۱. برای اعداد بازه‌ایی دلخواه $[x]$ و $[y]$ داریم:

الف) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر

$$|x^c - y^c| \leq x^r + y^r,$$

ب) $[y] \subseteq [x]$ اگر و تنها اگر

$$|x^c - y^c| \leq x^r - y^r.$$

اثبات الف). رفت: ابتدا فرض می‌کنیم که $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ و همچنین $a \in [x] \cap [y]$. در این صورت:

$$a \in [x] \Longrightarrow |x^c - a| \leq x^r,$$

و به صورت مشابه

$$a \in [y] \Longrightarrow |y^c - a| \leq y^r,$$

لذا

$$|x^c - a| + |y^c - a| \leq x^r + y^r.$$

از طرفی واضح است که:

$$|x^c - y^c| \leq |x^c - a| + |y^c - a|,$$

بنابراین

$$|x^c - y^c| \leq x^r + y^r,$$

بنابراین قسمت لزوم بخش الف، ثابت شد.

برگشت: حال فرض می‌کنیم که نامساوی ذیل برقرار باشد

$$|x^c - y^c| \leq x^r + y^r.$$

براساس برهان خلف، اگر $[x] \cap [y] = \emptyset$. در این صورت دارای دو حالت می باشیم:

حالت اول: هرگاه $[x] < [y]$. در این حالت واضح است که:

$$|x^c - y^c| = |x^c - \overline{x}| + \left|\overline{x} - \underline{y}\right| + \left|\underline{y} - y^c\right|$$
$$= x^r + \left|\overline{x} - \underline{y}\right| + y^r > x^r + y^r.$$

که این، یک تناقض آشکار است.

حالت دوم: هرگاه $[x] > [y]$. اثبات این حالت، کاملا مشابه حالت اول است. بنابراین اثبات بخش الف، تمام است.

اثبات ب). رفت: ابتدا فرض می‌کنیم که: $[y] \subseteq [x]$. در این صورت اگر

$$y^c = x^c,$$

اثبات بدیهی است. در غیر این صورت، دارای دو حالت هستیم:

حالت اول: هرگاه $y^c \in [\underline{x}, x^c]$. به طور واضح در این قسمت خواهیم داشت:

$$x^r = \left|\underline{x} - \underline{y}\right| + \left|\underline{y} - y^c\right| + |y^c - x^c|$$
$$= \left|\underline{x} - \underline{y}\right| + y^r + |x^c - y^c|,$$

بنابراین، نتیجه می گیریم:

$$x^r - y^r = \left|\underline{x} - \underline{y}\right| + |x^c - y^c|,$$

و در نتیجه

$$|x^c - y^c| \leq x^r - y^r.$$

حالت دوم: هرگاه $y^c \in [x^c, \overline{x}]$. اثبات این حالت کاملاً مشابه اثبات حالت اول است. بنابراین قسمت ب بخش رفت، ثابت شد.

برگشت: حال فرض کنید که نامساوی ذیل برقرار باشد

$$|x^c - y^c| \leq x^r - y^r.$$

براساس برهان خلف، اگر $[y] \nsubseteq [x]$، آن گاه می توان نتیجه گرفت عضو $y^* \in [y]$ وجود دارد به طوری که $y^* \notin [x]$. در این صورت نتیجه می گیریم:

$$|x^c - y^*| > x^r,$$

و همچنین

$$|y^* - y^c| \leq y^r,$$

بنابراین

$$|x^c - y^*| - |y^* - y^c| > x^r - y^r.$$

از طرفی واضح است که:

$$|x^c - y^c| \geq |x^c - y^*| - |y^* - y^c|.$$

بنابراین

$$|x^c - y^c| > x^r - y^r,$$

که این، یک تناقض آشکار است. بنابراین، اثبات بخش ب تمام است. ■

نتیجه ۲-۱. با توجه به تعریف شعاع یک عدد بازه‌ایی، از قضیه ۲-۱ می‌توان نتیجه گرفت که:

الف) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر

$$۲|x^c - y^c| \leq x^w + y^w,$$

ب) $[y] \subseteq [x]$ اگر و تنها اگر

$$۲|x^c - y^c| \leq x^w - y^w.$$

تعریف ۲-۹. [۱۸] تابع $d: \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$d([x],[y]) = \max\left\{|\underline{x} - \underline{y}|, |\overline{x} - \overline{y}|\right\},$$

را تابع فاصله یا متر روی مجموعه‌ی $\mathbb{IR}$ می‌نامیم.

در ادامه، اعمال حسابی رو اعداد بازه‌ایی را بیان می کنیم.

تعریف ۲-۱۰. [۱۶] هرگاه $[x]$ و $[y]$ دو عدد بازه‌ایی دلخواه باشند، در این صورت اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به صورت زیر تعریف می شوند:

$$[x] + [y] = \{x + y \ : \ x \in [x], y \in [y]\},$$

$$[x] - [y] = \{x - y \ : \ x \in [x], y \in [y]\},$$

$$[x] \cdot [y] = \{x \cdot y \ : \ x \in [x], y \in [y]\},$$

$$\frac{[x]}{[y]} = \left\{\frac{x}{y} : \ x \in [x], y \in [y]\right\}; \quad ۰ \notin [y].$$

نکته ۲-۱. هرگاه $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ و $[y] = [\underline{y}, \overline{y}]$ دو عدد بازه‌ایی دلخواه باشند و $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ آنگاه $[x] * [y]$ نیز یک عدد بازه‌ایی به صورت زیر است:

$$[x] * [y] = \left[\min\left\{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \overline{y}, \overline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}\right\}, \max\left\{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \overline{y}, \overline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}\right\}\right],$$

البته در حالت تقسیم، می بایستی: $۰ \notin [y]$.

با توجه به نکته‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$[x] + [y] = \left[\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}\right],$$

$$[x] - [y] = \left[\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}\right],$$

و برای عمل ضرب داریم

$$[x] \cdot [y] = [\min\left\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\right\}, \max\left\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\right\}],$$

و برای عمل تقسیم

$$\frac{[x]}{[y]} = [\min\left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\}, \max\left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\}],$$

که در آن $۰ \notin [y]$.

نکته ۲-۲. با توجه به نکته ۲-۱، هرگاه $[x] \in \mathbb{IR}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آنگاه ضرب اسکالر را می‌توان به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\lambda \cdot [x] = \{\lambda x \ : \ x \in [x]\} = \begin{cases} [\lambda \underline{x}, \lambda \overline{x}], & \text{اگر } \lambda \geq ۰, \\ [\lambda \overline{x}, \lambda \underline{x}], & \text{اگر } \lambda < ۰. \end{cases}$$

نکته ۲-۳. با توجه به تعریف ۲-۱۰ نتیجه می گیریم که عضو خنثی جمعی برابر است با $[۰,۰] = [۰]$ و عضو خنثی ضربی برابر است با $[۱,۱] = [۱]$.

نکته ۲-۴. دستگاه‌های $(\mathbb{IR}, +)$ و $(\mathbb{IR}, \cdot)$ تشکیل گروه نمی دهند، زیرا هر عدد بازه‌ای دلخواه دارای عضو معکوس نسبت به اعمال جمع و ضرب نیست. همچنین این دستگاه‌ها تشکیل یک فضای برداری و میدان را نیز نمی‌دهند.

نکته ۲-۵. با استفاده از تعاریف۲-۶، ۲-۸ و ۲-۱۰ نتیجه می گیریم که:

$$[x] = x^c + x^r \cdot [-1, 1] = [x^c - x^r, x^c + x^r].$$

در ادامه توجه خود را به ماتریس های بازه‌ایی معطوف می کنیم.

تعریف ۲-۱۱. ماتریس $[\boldsymbol{X}] = \left([x_{ij}]\right)_{m \times n}$ را یک ماتریس عدد بازه‌ایی (یا به طور مختصر، ماتریس بازه‌ایی) می‌نامیم هرگاه به ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, m$ و $j = ۱, ۲, \dots, n$، درایه ی $[x_{ij}]$ یک عدد بازه‌ایی باشد، یعنی

$$\left[x_{ij}\right] = \left[\overline{x_{ij}}, \underline{x_{ij}}\right] \in \mathbb{IR}.$$

هرگاه $[\boldsymbol{X}] = \left([x_{ij}]\right)_{m \times n}$ یک ماتریس بازه‌ایی باشد، آن گاه می توان به صورت خلاصه آن را به فرم $[\boldsymbol{X}] = [\underline{\boldsymbol{X}}, \overline{\boldsymbol{X}}]$ نوشت که در آن

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \left(\overline{x_{ij}}\right)_{m \times n}, \quad \underline{\boldsymbol{X}} = \left(\underline{x_{ij}}\right)_{m \times n}.$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$[\boldsymbol{X}] = \left\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m \times n} \ : \ \underline{\boldsymbol{X}} \leq \boldsymbol{X} \leq \overline{\boldsymbol{X}}\right\}.$$

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های بازه‌ایی از اندازه‌ی $m \times n$ را با نماد $\mathbb{IR}^{m \times n}$ نشان می‌دهیم. همانند قبل، واضح است که

$$\mathbb{R}^{m \times n} \subset \mathbb{IR}^{\mathrm{m} \times \mathrm{n}},$$

زیرا

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \left\{[\boldsymbol{X}] \in \mathbb{IR}^{m \times n} \ : \ \underline{\boldsymbol{X}} = \overline{\boldsymbol{X}}\right\}.$$

مشابه تعاریف مرکز، پهنا و شعاع برای یک عدد بازه‌ایی، می توان همین تعاریف را برای یک ماتریس بازه‌ایی نیز ارائه داد.

تعریف ۲-۱۲. مرکز ماتریس بازه‌ایی

$$[\boldsymbol{X}] = \left[\underline{\boldsymbol{X}}, \overline{\boldsymbol{X}}\right] = \left([x_{ij}]\right)_{m \times n},$$

را با نماد $\boldsymbol{X}^c$ نشان می‌دهیم و برابر است با $\boldsymbol{X}^c = \frac{\underline{\boldsymbol{X}} + \overline{\boldsymbol{X}}}{۲}$، یا به عبارتی دیگر $\boldsymbol{X^c} = \left({x_{ij}}^c\right)_{m \times n}$.

تعریف ۲-۱۳. پهنای ماتریس بازه‌ایی

$$[X] = [\underline{X}, \overline{X}] = ([x_{ij}])_{m\times n},$$

را با نماد X^w نشان می‌دهیم و برابر است با $X^w = \overline{X} - \underline{X}$، یا به عبارتی دیگر $X^w = (x_{ij}{}^w)_{m\times n}$.

تعریف ۲-۱۴. شعاع ماتریس بازه‌ایی

$$[X] = [\underline{X}, \overline{X}] = ([x_{ij}])_{m\times n},$$

را با نماد X^r نشان می‌دهیم و برابر است با $X^r = \frac{\overline{X}-\underline{X}}{۲} = \frac{۱}{۲}X^w$، یا به عبارتی دیگر $X^r = (x_{ij}{}^r)_{m\times n}$.

در ذیل، فرمی از معادلات ماتریسی بازه‌ایی که مورد هدف این تحقیق است را تعریف می نماییم.

تعریف ۲-۱۵. معادله ی

$$A[X] = [B], \qquad (۲)$$

که در آن $A = (a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و

$$[X] = ([x_{ij}])_{n\times p}, \quad [B] = ([b_{ij}])_{m\times p},$$

ماتریس های بازه‌ایی هستند را یک معادله ی ماتریسی بازه‌ایی می نامند.

تعریف ۲-۱۶. ماتریس بازه‌ایی $[X] = ([x_{ij}])_{n\times p}$ را یک جواب جبری برای معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) می‌نامیم هرگاه با توجه به اعمال حسابی ارائه شده در نکات ۲-۱ و ۲-۲، دقیقاً در آن صدق کند. یعنی برای هر $i = ۱,۲,\dots,m$ و $j = ۱,۲,\dots,p$ داشته باشیم

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot[x_{kj}] = [b_{ij}].$$

نکته ۲-۶. هرگاه در معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲)، ماتریس ضرایب مربعی و معکوس پذیر باشد، در این صورت ماتریس بازه‌ایی

$$[X] = A^{-۱}[B],$$

لزوماً یک جواب جبری نخواهد بود. این موضوع را می توان به کمک یک مثال عددی ساده نشان داد.

هدف از این مقاله ارائه ی دو روش ساده با دیدگاه های متفاوت، برای به دست آوردن جواب جبری (یا همان حل جبری) معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) است، که در بخش بعدی مطرح خواهد شد.

۳. ارائه ی روش اول

می دانیم دو عدد بازه‌ایی با هم برابرند هرگاه کران های بالا و پایین آنها با هم برابر باشند. براساس این واقعیت و همچنین با تکیه بر حساب اعداد بازه‌ایی می توان معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) را به یک معادله ی ماتریسی قطعی (غیر بازه‌ایی) تبدیل نمود. برای این کار می دانیم که برای هر $i = ۱,۲,\dots,m$ و $j = ۱,۲,\dots,p$، معادله ی ij-ام رابطه ی (۲) به صورت زیر می باشد

$$\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\cdot[x_{kj}] = [b_{ij}]. \qquad (۳)$$

ابتدا برای هر $i = ۱,۲,\dots,m$، دو مجموعه اندیس زیر را تعریف می کنیم:

$$\Omega_i^+ = \{k : ۱ \le k \le n,\ a_{ik} \ge ۰\}, \qquad (۴)$$

$$\Omega_i^- = \{k : ۱ \le k \le n,\ a_{ik} < ۰\}. \qquad (۵)$$

حال با توجه به اعمال حساب بازه‌ایی ارائه شده در نکات ۲-۱ و ۲-۲، و همچنین برابر قرار دادن کران های بالا و پایین معادله ی (۳)، برای هر $i = ۱,۲,\dots,m$ و $j = ۱,۲,\dots,p$، نتیجه خواهیم گرفت

$$\sum_{k\in\Omega_i^+} a_{ik}\,\underline{x_{kj}} + \sum_{k\in\Omega_i^-} a_{ik}\,\overline{x_{kj}} = \underline{b_{ij}},$$

$$\sum_{k\in\Omega_i^-} a_{ik}\,\underline{x_{kj}} + \sum_{k\in\Omega_i^+} a_{ik}\,\overline{x_{kj}} = \overline{b_{ij}}.$$

فرم ماتریسی دو معادله ی فوق را می توان به صورت زیر ارائه داد

$$\boldsymbol{A}^+\,\underline{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{A}^-\,\overline{\boldsymbol{X}} = \underline{\boldsymbol{B}}, \qquad (۶)$$

$$\boldsymbol{A}^-\,\underline{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{A}^+\,\overline{\boldsymbol{X}} = \overline{\boldsymbol{B}}. \qquad (۷)$$

که در آن منظور از ماتریس $\boldsymbol{A}^+$، ماتریسی است که فقط شامل درایه های مثبت $\boldsymbol{A}$ می شود و منظور از $\boldsymbol{A}^-$، ماتریسی است که فقط شامل درایه های منفی $\boldsymbol{A}$ می شود. یا به عبارتی دیگر

$$(\boldsymbol{A}^+)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & if\ a_{ij} \ge ۰, \\ ۰, & if\ a_{ij} < ۰, \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{A}^-)_{ij} = \begin{cases} ۰, & if\ a_{ij} \ge ۰, \\ a_{ij}, & if\ a_{ij} < ۰, \end{cases}$$

با ارائه ی بلوکی معادلات (۶) و (۷) خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^+ & \boldsymbol{A}^- \\ \boldsymbol{A}^- & \boldsymbol{A}^+ \end{pmatrix}_{۲m\times ۲n} \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{X}} \\ \overline{\boldsymbol{X}} \end{pmatrix}_{۲n\times ۲p} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{B}} \\ \overline{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix}_{۲m\times ۲p}, \qquad (۸)$$

معادله ی فوق، یک معادله ی ماتریسی قطعی (غیر بازه‌ایی) با اندازه ی دو برابر اندازه ی معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) است و می توان آن را با استفاده از روش های موجود حل نمود. در این مقاله با استفاده از روش حذفی گأوس اقدام به حل معادله ی ماتریسی (۸) می کنیم و ماتریس های $\underline{\boldsymbol{X}}$ و $\overline{\boldsymbol{X}}$ را به دست می آوریم و در نهایت جواب معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) را به صورت $[\boldsymbol{X}] = [\underline{\boldsymbol{X}}, \overline{\boldsymbol{X}}]$ ارائه می دهیم. در این حالت برای آنکه جواب به دست آمده قابل قبول باشد حتما می بایستی

$$\underline{\boldsymbol{X}} \le \overline{\boldsymbol{X}}, \qquad (۹)$$

و یا به عبارتی دیگر

$$\underline{x_{ij}} \le \overline{x_{ij}}, \qquad ۱ \le i \le n, \qquad ۱ \le j \le p.$$

هرگاه معادله ی (۸) فاقد جواب باشد و یا برای جواب معادله ی (۸)، شرط (۹) برقرار نباشد، می گوییم معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) فاقد جواب جبری هست.

در ادامه چند مثال عددی برای درک شهودی از روش پیشنهادی، ارائه می دهیم.

مثال ۳-۱. معادله ی ماتریسی بازه‌ایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \\ ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x_{۱۱}] & [x_{۱۲}] \\ [x_{۲۱}] & [x_{۲۲}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-۲, ۹] & [-۹, ۰] \\ [۰, ۱۲] & [-۹, ۳] \\ [-۱, ۱۸] & [-۱۰, ۷] \\ [-۱, ۶] & [-۱, ۴] \end{pmatrix},$$

براساس روش پیشنهادی فوق و با توجه به معادله ی (۸)، می توان معادله ی ماتریسی بازه‌ایی فوق را به صورت معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) ذیل بازنویسی کرد:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x_{۱۱}} & \underline{x_{۱۲}} \\ \underline{x_{۲۱}} & \underline{x_{۲۲}} \\ \overline{x_{۱۱}} & \overline{x_{۱۲}} \\ \overline{x_{۲۱}} & \overline{x_{۲۲}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ & -۹ \\ ۰ & -۹ \\ -۱ & -۱۰ \\ -۱ & -۱ \\ ۹ & ۰ \\ ۱۲ & ۳ \\ ۱۸ & ۷ \\ ۶ & ۴ \end{pmatrix}.$$

حال در ادامه برای حل معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) فوق، از روش حذفی گأوس استفاده می کنیم. براساس این روش، ابتدا ماتریس افزوده ی زیر را تشکیل می دهیم:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{+} & \boldsymbol{A}^{+} \\ \boldsymbol{A}^{+} & \boldsymbol{A}^{+} \end{pmatrix}\left|\begin{matrix} \underline{\boldsymbol{B}} \\ \overline{\boldsymbol{B}} \end{matrix}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cc} ۰ & ۲ & −۱ & ۰ & −۲ & −۹ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & −۹ \\ ۱ & ۴ & ۰ & ۰ & −۱ & −۱۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & −۱ & −۱ \\ −۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۱۸ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۶ & ۴ \end{array}\right),$$

حال با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، نتیجه می گیریم

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} ۱ & ۴ & ۰ & ۰ & −۱ & −۱۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & −۹ \\ ۰ & ۰ & −۱ & ۰ & −۲ & −۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۸ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۱۶ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right).$$

همانطور که از ماتریس افزوده ی فوق مشاهده می شود، معادلات با هم سازگار هستند و معادله دارای جواب یکتاست. حال با استفاده از عملیات پسرو، برای ستون اول ماتریس مجهولات داریم:

$$\begin{cases} ۱(\overline{x_{۲۱}}) = ۴ \\ ۴(\overline{x_{۲۱}}) = ۱۶ \\ ۳(\overline{x_{۲۱}}) = ۱۲ \\ ۲(\overline{x_{۲۱}}) = ۸ \end{cases} \implies \boxed{\overline{x_{۲۱}} = ۴},$$

$$(−۱)(\overline{x_{۱۱}}) + ۰(\overline{x_{۲۱}}) = −۲ \implies \boxed{\overline{x_{۱۱}} = ۲},$$

$$۳\left(\underline{x_{۲۱}}\right) + ۰(\overline{x_{۱۱}}) + ۰(\overline{x_{۲۱}}) = ۰ \\ \implies \boxed{\underline{x_{۲۱}} = ۰},$$

$$۱\left(\underline{x_{۱۱}}\right) + ۴\left(\underline{x_{۲۱}}\right) + ۰(\overline{x_{۱۱}}) + ۰(\overline{x_{۲۱}}) = −۱ \\ \implies \boxed{\underline{x_{۱۱}} = −۱}.$$

همچنین برای ستون دوم ماتریس مجهولات داریم:

$$\begin{cases} ۱(\overline{x_{۲۲}}) = ۱ \\ ۴(\overline{x_{۲۲}}) = ۴ \\ ۳(\overline{x_{۲۲}}) = ۳ \\ ۲(\overline{x_{۲۲}}) = ۲ \end{cases} \implies \boxed{\overline{x_{۲۲}} = ۱},$$

$$(−۱)(\overline{x_{۱۲}}) + ۰(\overline{x_{۲۲}}) = −۳ \implies \boxed{\overline{x_{۱۲}} = ۳},$$

$$۳\left(\underline{x_{۲۲}}\right) + ۰(\overline{x_{۱۲}}) + ۰(\overline{x_{۲۲}}) = −۹ \\ \implies \boxed{\underline{x_{۲۲}} = −۳},$$

$$۱\left(\underline{x_{۱۲}}\right) + ۴\left(\underline{x_{۲۲}}\right) + ۰(\overline{x_{۱۲}}) + ۰(\overline{x_{۲۲}}) \\ = −۱۰ \\ \implies \boxed{\underline{x_{۱۱}} = ۲}.$$

بنابراین می توان ماتریس مجهولات را به صورت زیر ارائه داد:

$$[\boldsymbol{X}] = \begin{pmatrix} [x_{11}] & [x_{12}] \\ [x_{21}] & [x_{22}] \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} [−۱, ۲] & [۲, ۳] \\ [۰, ۴] & [−۳, ۱] \end{pmatrix},$$

همانطور که واضح است شرط (۹) برای جواب به دست آمده ی فوق برقرار است و لذا ماتریس جواب به دست آمده قابل قبول می باشد. ضمناً می توان براحتی نشان داد که جواب به دست آمده ی فوق در معادله ی ماتریسی بازه‌ایی موردنظر صدق می کند.

مثال ۳-۲. معادله ی ماتریسی بازه‌ایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & −۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [x_{۱۱}] & [x_{۱۲}] \\ [x_{۲۱}] & [x_{۲۲}] \\ [x_{۳۱}] & [x_{۳۲}] \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} [−۴, ۶] & [−۲, ۶] \\ [−۱, ۱۴] & [۱۱, ۲۳] \end{pmatrix},$$

براساس روش پیشنهادی فوق و با توجه به معادله ی (۸)، می توان معادله ی ماتریسی بازه‌ایی فوق را به صورت معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) ذیل بازنویسی کرد:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x_{۱۱}} & \underline{x_{۱۲}} \\ \underline{x_{۲۱}} & \underline{x_{۲۲}} \\ \underline{x_{۳۱}} & \underline{x_{۳۲}} \\ \overline{x_{۱۱}} & \overline{x_{۱۲}} \\ \overline{x_{۲۱}} & \overline{x_{۲۲}} \\ \overline{x_{۳۱}} & \overline{x_{۳۲}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۴ & -۲ \\ -۱ & ۱۱ \\ ۶ & ۶ \\ ۱۴ & ۲۳ \end{pmatrix}.$$

حال در ادامه برای حل معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) فوق، از روش حذفی گاوس استفاده می کنیم. براساس این روش، ابتدا ماتریس افزوده ی زیر را تشکیل می دهیم:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{A^+} & \boldsymbol{A^+} & \underline{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{A^+} & \boldsymbol{A^+} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|cc} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۴ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۲ & ۱۴ & ۲۳ \end{array}\right),$$

حال با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، نتیجه می گیریم

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۴ & -۲ \\ ۰ & -۰.۵ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱.۵ & ۵ & ۱۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۲ & ۱۴ & ۲۳ \end{array}\right),$$

همانطور که از ماتریس افزوده ی فوق مشاهده می شود، معادله دارای بی شمار جواب جبری است. حال با استفاده از عملیات پسرو، برای ستون اول ماتریس مجهولات و با فرض آن که

$$\overline{x_{۳۱}} = \alpha,$$

$$\overline{x_{۲۱}} = \beta,$$

خواهیم داشت:

$$\overline{x_{۱۱}} = \frac{۱۴ - ۲\alpha - \beta}{۳},$$

$$\underline{x_{۳۱}} = \frac{۱۰ - ۴\alpha + \beta}{۳},$$

$$\underline{x_{۲۱}} = \frac{۱۰ - ۷\alpha + ۴\beta}{۳},$$

$$\underline{x_{۱۱}} = \frac{-۱۱ + ۵\alpha - ۲\beta}{۳}.$$

همچنین برای ستون دوم ماتریس مجهولات و با فرض آن که

$$\overline{x_{۳۲}} = \gamma,$$

$$\overline{x_{۲۲}} = \delta,$$

خواهیم داشت:

$$\overline{x_{۱۲}} = \frac{۲۳ - \delta - ۲\gamma}{۳},$$

$$\underline{x_{۳۲}} = \frac{۲۸ + \delta - ۴\gamma}{۳},$$

$$\underline{x_{۲۲}} = \frac{۲۸ + ۴\delta - ۷\gamma}{۳},$$

$$\underline{x_{۱۲}} = \frac{-۱۷ - ۲\delta + ۵\gamma}{۳}.$$

حال براساس شرط (۹)، برای آن که جواب های به دست آمده ی فوق، قابل قبول باشند یا به عبارتی دیگر تشکیل بازه دهند، آن است که مقادیر α، β، γ و δ را به گونه ایی انتخاب نماییم که

$$۱۰ \le ۷\alpha - \beta \le ۲۵,$$

و همچنین

$$۲۸ \le ۷\gamma - \delta \le ۴۰.$$

این یعنی آن که به ازای هر مقدار از α، β، γ و δ و به شرط آن که نامساوی های فوق برقرار باشند، برای معادله ی ماتریسی بازه‌ایی مثال ۳-۲، یک جواب جبری به دست می آوریم. به عنوان مثال هرگاه قرار دهیم:

$$\alpha = ۲, \qquad \beta = ۱, \qquad \gamma = ۵, \qquad \delta = ۱,$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$۱۰ \le ۷\alpha - \beta = ۱۳ \le ۲۵,$$

$$۲۸ \le ۷\gamma - \delta = ۳۴ \le ۴۰.$$

لذا شرایط قابل قبول بودن جواب برقرار است و می توان یکی از این بی نهایت جواب جبری را به صورت زیر ارائه داد:

$$[\boldsymbol{X}] = \begin{pmatrix} [x_{11}] & [x_{12}] \\ [x_{21}] & [x_{22}] \\ [x_{31}] & [x_{32}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-۱, ۳] & [۲, ۴] \\ [۰, ۱] & [-۱, ۱] \\ [۱, ۲] & [۳, ۵] \end{pmatrix}.$$

در ادامه، روش ساده ی دیگری را برای حل یک معادله ی ماتریسی بازه‌ایی ارائه می دهیم.

۴. ارائه ی روش دوم

قبل از مطرح نمودن روش دوم، لازم است مقدماتی را در این خصوص ارائه دهیم. در این قسمت کار را با ارائه ی قضیه ی مهم زیر شروع می کنیم که پایه و اساس روش پیشنهادی است.

قضیه ۴-۱. هرگاه $a_۱$، $a_۲$، ... ، a_n اعداد حقیقی دلخواه و $[x_۱]$، $[x_۲]$، ... ، $[x_n]$، اعداد بازه‌ایی دلخواه باشند و همچنین

$$[b] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot [x_i],$$

آنگاه:

$$۱)\ b^w = \sum_{i=۱}^{n} |a_i| \cdot {x_i}^w,$$
$$۲)\ b^c = \sum_{i=۱}^{n} a_i \cdot {x_i}^c,$$
$$۳)\ b^r = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot {x_i}^r.$$

اثبات. تعریف می‌کنیم:

$$\Omega^+ = \{i \ :\ a_i \ge ۰, i = ۱,۲,\cdots,n\},$$
$$\Omega^- = \{i \ :\ a_i < ۰, i = ۱,۲,\cdots,n\}.$$

در این صورت براساس نکات ۲-۱ و ۲-۲، نتیجه می گیریم:

$$[b] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot [x_i] =$$

$$\left[\sum_{i\in\Omega^+} a_i\, \underline{x_i} + \sum_{i\in\Omega^-} a_i\, \overline{x_i}, \sum_{i\in\Omega^+} a_i\, \overline{x_i} + \sum_{i\in\Omega^-} a_i\, \underline{x_i}\right].$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} b^w &= \left(\textstyle\sum_{i\in\Omega^+} a_i\, \overline{x_i} + \sum_{i\in\Omega^-} a_i\, \underline{x_i}\right) \\ &\quad - \left(\textstyle\sum_{i\in\Omega^+} a_i\, \underline{x_i} + \sum_{i\in\Omega^-} a_i\, \overline{x_i}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i\in\Omega^+} a_i\, \left(\overline{x_i} - \underline{x_i}\right) - \sum_{i\in\Omega^-} a_i\, \left(\overline{x_i} - \underline{x_i}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|\, \left(\overline{x_i} - \underline{x_i}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot {x_i}^w. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات قسمت (۱) تمام است. قسمت (۲) نیز کاملا مشابه فوق ثابت می شود. همچنین با توجه به تعریف ۲-۸ اثبات قسمت (۳) نیز با استفاده از قسمت (۱) واضح است. ■

نکته ۴-۱. قضیه ی ۴-۱ را می توان به این صورت بیان کرد که:

۱) پهنای یک ترکیب خطی از بازه‌ها برابر است با ترکیب خطی پهناها، با قدرمطلق ضرایب.
۲) مرکز یک ترکیب خطی از بازه‌ها برابر است با ترکیب خطی مرکزها، با همان ضرایب.
۳) شعاع یک ترکیب خطی از بازه‌ها برابر است با ترکیب خطی شعاع ها، با قدرمطلق ضرایب.

حال قضیه ی زیر، که در حقیقت تعمیمی از قضیه ی ۴-۱ است، را ارائه می دهیم.

قضیه ۴-۲. هرگاه $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و $[\boldsymbol{X}] = \left([x_{ij}]\right)_{n\times p}$ یک ماتریس بازه‌ایی باشد و

$$[\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{X}],$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$۱)\ \boldsymbol{B}^w = |\boldsymbol{A}| \cdot \boldsymbol{X}^w,$$
$$۲)\ \boldsymbol{B}^c = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}^c,$$

۳) $\boldsymbol{B}^r = |\boldsymbol{A}| \cdot \boldsymbol{X}^r.$

اثبات. می دانیم درایه ی ij-ام ماتریس بازه‌ایی $[\boldsymbol{B}]$ به صورت زیر به دست می آید:

$$[b_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot [x_{kj}],$$

که در آن $i = ۱, ۲, \ldots, m$ و $j = ۱, ۲, \ldots, p$. حال براساس قضیه ی ۴-۱ نتیجه خواهیم گرفت:

$${b_{ij}}^w = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \cdot x_{ki}^w,$$

$${b_{ij}}^c = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{ki}^c,$$

$${b_{ij}}^r = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \cdot x_{ki}^r,$$

اکنون براساس تعاریف ۲-۱۲ الی ۲-۱۴ قضیه براحتی ثابت می شود. ■

حال با توجه به مطالبی که بیان کردیم روش پیشنهادی دوم را مطرح می نماییم. می دانیم دو عدد بازه‌ایی با هم برابرند هرگاه مرکز و شعاع آن ها با هم برابر باشند. براساس این حقیقت و با استفاده از مفهوم مرکز و شعاع یک ماتریس بازه‌ایی، می توان معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) را تبدیل به دو معادله ی ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) مجزا با اندازه‌ایی مشابه اندازه‌ی معادله‌ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) نمود. پایه و اساس روش پیشنهادی، استفاده از قضیه ی ۴-۲ است. با توجه به روابط (۲) و (۳) ارائه شده در این قضیه می توان معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) را به صورت دو معادله ی ماتریسی قطعی (غیر بازه‌ایی) زیر تبدیل نمود:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}^c = \boldsymbol{B}^c, \qquad (۱۰)$$

$$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{B}^r. \qquad (۱۱)$$

همانطور که واضح است، معادلات فوق، دو معادله ی ماتریسی قطعی (غیر بازه‌ایی) مجزا با اندازه‌ایی مشابه اندازه‌ی معادله‌ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) هستند که می توان آنها را با استفاده از روش های موجود حل نمود. در این قسمت نیز مشابه قسمت قبل با استفاده از روش حذفی گاوس اقدام به حل معادلات ماتریسی (۱۰) و (۱۱) می کنیم و ماتریس های $\boldsymbol{X}^c$ و $\boldsymbol{X}^r$ را به دست می آوریم و در نهایت جواب معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) را به صورت

$$[\boldsymbol{X}] = [\boldsymbol{X}^c - \boldsymbol{X}^r, \boldsymbol{X}^c + \boldsymbol{X}^r], \qquad (۱۲)$$

ارائه می دهیم. در این حالت برای آنکه جواب به دست آمده قابل قبول باشد حتما می بایستی

$$\boldsymbol{X}^c - \boldsymbol{X}^r \leq \boldsymbol{X}^c + \boldsymbol{X}^r,$$

و یا بعبارتی دیگر

$$\boldsymbol{X}^r \geq \boldsymbol{0}. \qquad (۱۳)$$

که در آن منظور از $\boldsymbol{0}$، ماتریس صفر از اندازه ی $n \times p$ است.

بنابراین هرگاه حداقل یکی از معادلات ماتریسی (۱۰) و (۱۱) فاقد جواب باشند و یا برای جواب معادله ی (۱۱)، شرط (۱۳) برقرار نباشد، می گوییم معادله ی ماتریسی بازه‌ایی (۲) فاقد جواب جبری هست.

قضیه ی زیر یک شرط لازم و کافی را برای وجود جواب جبری یکتا برای معادله ی (۲) در حالتی که ماتریس ضرایب مربعی باشد، ارائه می دهد.

قضیه ۴-۳. فرض کنید ماتریس ضرایب معادله ی ماتریسی (۲) مربعی است. در این صورت، معادله ی ماتریسی مربعی (۲) دارای جواب جبری یکتاست اگر و تنها اگر ماتریس های $\boldsymbol{A}$ و $|\boldsymbol{A}|$ نامنفرد باشند و

$$|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{B}^r \geq \boldsymbol{0}.$$

اثبات. با توجه به نکات ذکر شده ی فوق، اثبات بدیهی است.■

در ادامه نیز، یک شرط کافی را برای وجود جواب جبری یکتا برای معادله ی (۲) در حالتی که ماتریس ضرایب مربعی باشد، ارائه می دهیم.

قضیه۴-۴. فرض کنید ماتریس ضرایب معادله ی ماتریسی (۲) مربعی است. در این صورت، هرگاه ماتریس های $\boldsymbol{A}$ و $|\boldsymbol{A}|$ نامنفرد باشند و $|\boldsymbol{A}|^{-1} \geq \boldsymbol{0}$ آن گاه معادله ی ماتریسی (۲) دارای جواب جبری یکتا خواهد بود.

اثبات. با توجه به این که همواره داریم $\boldsymbol{B}^r \geq \boldsymbol{0}$، لذا با توجه به قضیه ی ۴-۳، اثبات بدیهی است.■

در ادامه چند مثال عددی برای درک شهودی از روش پیشنهادی، ارائه می دهیم.

مثال ۴-۱. معادله ی ماتریسی بازه‌ایی مطرح شده در مثال ۱-۳ را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \\ ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x_{۱۱}] & [x_{۱۲}] \\ [x_{۲۱}] & [x_{۲۲}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-۲, ۹] & [-۹, ۰] \\ [۰, ۱۲] & [-۹, ۳] \\ [-۱, ۱۸] & [-۱۰, ۷] \\ [-۱, ۶] & [-۱, ۴] \end{pmatrix}.$$

براساس روش پیشنهادی فوق و با توجه به معادلات (۱۰) و (۱۱)، می توان معادلات ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) ذیل را ارائه داد:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}^c = \boldsymbol{B}^c,$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \\ ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_{۱۱}}^c & {x_{۱۲}}^c \\ {x_{۲۱}}^c & {x_{۲۲}}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳.۵ & -۴.۵ \\ ۶ & -۳ \\ ۸.۵ & -۱.۵ \\ ۲.۵ & ۱.۵ \end{pmatrix},$$

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{B}^r,$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \\ ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_{۱۱}}^r & {x_{۱۲}}^r \\ {x_{۲۱}}^r & {x_{۲۲}}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۵.۵ & ۴.۵ \\ ۶ & ۶ \\ ۹.۵ & ۸.۵ \\ ۳.۵ & ۲.۵ \end{pmatrix},$$

حال در ادامه برای حل معادلات ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) فوق، از روش حذفی گأوس استفاده می کنیم. براساس این روش، ابتدا ماتریسهای افزوده ی زیر را تشکیل می دهیم:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^c) = \left(\begin{array}{cc|cc} -۱ & ۲ & ۳.۵ & -۴.۵ \\ ۰ & ۳ & ۶ & -۳ \\ ۱ & ۴ & ۸.۵ & -۱.۵ \\ ۱ & ۱ & ۲.۵ & ۱.۵ \end{array}\right),$$

$$(|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}^r) = \left(\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۵.۵ & ۴.۵ \\ ۰ & ۳ & ۶ & ۶ \\ ۱ & ۴ & ۹.۵ & ۸.۵ \\ ۱ & ۱ & ۳.۵ & ۲.۵ \end{array}\right),$$

حال با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، نتیجه می گیریم

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -۱ & ۲ & ۳.۵ & -۴.۵ \\ ۰ & ۳ & ۶ & -۳ \\ ۰ & ۶ & ۱۲ & -۶ \\ ۰ & ۳ & ۶ & -۳ \end{array}\right),$$

و نیز

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۵.۵ & ۴.۵ \\ ۰ & ۳ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & -۲ & -۲ \end{array}\right),$$

با توجه به سازگاری معادلات در هر دو معادله ی فوق، جواب یکتای این معادله ها را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -۱ & ۲ & ۳.۵ & -۴.۵ \\ ۰ & ۳ & ۶ & -۳ \\ ۰ & ۶ & ۱۲ & -۶ \\ ۰ & ۳ & ۶ & -۳ \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} {x_{۲۱}}^c = ۲, \\ {x_{۱۱}}^c = ۰.۵, \\ {x_{۲۲}}^c = -۱, \\ {x_{۱۲}}^c = ۲.۵, \end{cases}$$

و همچنین

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۵.۵ & ۴.۵ \\ ۰ & ۳ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & -۲ & -۲ \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} {x_{۲۱}}^r = ۲, \\ {x_{۱۱}}^r = ۱.۵, \\ {x_{۲۲}}^r = ۲, \\ {x_{۱۲}}^r = ۰.۵, \end{cases}$$

اولاً همان طور که واضح است شرط (۱۳) برقرار است و لذا می توان جواب جبری معادله ی ماتریسی مربوطه را به صورت زیر و با استفاده از رابطه ی (۱۲) ارائه داد:

$$[\boldsymbol{X}] = \begin{pmatrix} [x_{۱۱}] & [x_{۱۲}] \\ [x_{۲۱}] & [x_{۲۲}] \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} [{x_{۱۱}}^c - {x_{۱۱}}^r, {x_{۱۱}}^c + {x_{۱۱}}^r] & [{x_{۱۲}}^c - {x_{۱۲}}^r, {x_{۱۲}}^c + {x_{۱۲}}^r] \\ [{x_{۲۱}}^c - {x_{۲۱}}^r, {x_{۲۱}}^c + {x_{۲۱}}^r] & [{x_{۲۲}}^c - {x_{۲۲}}^r, {x_{۲۲}}^c + {x_{۲۲}}^r] \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} [-۱, ۲] & [۲, ۳] \\ [۰, ۴] & [-۳, ۱] \end{pmatrix}.$$

که دقیقاً همان جوابی است که با استفاده از روش اول پیشنهادی به دست آمده بود.

مثال ۴-۲. معادله ی ماتریسی بازه‌ایی مطرح شده در مثال ۲-۳ را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x_{۱۱}] & [x_{۱۲}] \\ [x_{۲۱}] & [x_{۲۲}] \\ [x_{۳۱}] & [x_{۳۲}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-۴, ۶] & [-۲, ۶] \\ [-۱, ۱۴] & [۱۱, ۲۳] \end{pmatrix},$$

براساس روش پیشنهادی دوم و با توجه به معادلات (۱۰) و (۱۱)، می توان معادلات ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) ذیل را ارائه داد:

$$\boldsymbol{A}\, \boldsymbol{X}^c = \boldsymbol{B}^c,$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_{۱۱}}^c & {x_{۱۲}}^c \\ {x_{۲۱}}^c & {x_{۲۲}}^c \\ {x_{۳۱}}^c & {x_{۳۲}}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۶.۵ & ۱۷ \end{pmatrix},$$

$$|\boldsymbol{A}| \boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{B}^r,$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_{۱۱}}^r & {x_{۱۲}}^r \\ {x_{۲۱}}^r & {x_{۲۲}}^r \\ {x_{۳۱}}^r & {x_{۳۲}}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۵ & ۴ \\ ۷.۵ & ۶ \end{pmatrix},$$

حال در ادامه برای حل معادلات ماتریسی قطعی (غیربازه‌ایی) فوق، از روش حذفی گاوس استفاده می کنیم. براساس این روش، ابتدا ماتریسهای افزوده ی زیر را تشکیل می دهیم:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^c) = \left(\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۱ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۶.۵ & ۱۷ \end{array}\right),$$

$$(|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}^r) = \left(\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۱ & ۱ & ۵ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۷.۵ & ۶ \end{array}\right),$$

حال با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، نتیجه می گیریم

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۱ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۰.۵ & ۳.۵ & ۵ & ۱۴ \end{array}\right),$$

و نیز

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۱ & ۱ & ۵ & ۴ \\ ۰ & -۰.۵ & ۰.۵ & ۰ & ۰ \end{array}\right),$$

همانطور که از ماتریس های افزوده ی فوق مشاهده می شود، هر دو معادله دارای بی شمار جواب جبری است. حال با استفاده از عملیات پسرو، برای ماتریس افزوده ی اول و با فرض آن که

$${x_{۳۱}}^c = \alpha,$$

$${x_{۳۲}}^c = \beta,$$

به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} {x_{۲۱}}^c &= ۷\alpha - ۱۰, \\ {x_{۱۱}}^c &= \frac{۱۱}{۲} - ۳\alpha, \\ {x_{۲۲}}^c &= ۷\beta - ۲۸, \\ {x_{۱۲}}^c &= ۱۵ - ۳\beta. \end{aligned}$$

همچنین برای ماتریس افزوده ی دوم و با فرض آن که

$${x_{۳۱}}^r = \gamma,$$

$${x_{۳۲}}^r = \delta,$$

به دست خواهیم آورد:

$${x_{۲۱}}^r = \gamma,$$

$${x_{۱۱}}^r = \frac{۵}{۲} - \gamma,$$

$$x_{۲۲}{}^{r} = \delta,$$

$$x_{۱۲}{}^{r} = ۲ - \delta.$$

حال براساس شرط (۱۳)، برای آن که جواب های به دست آمده ی فوق، قابل قبول باشند یا به عبارتی دیگر تشکیل بازه دهند، آن است که مقادیر γ و δ را به گونه ایی انتخاب نماییم که

$$۰ \leq \gamma \leq \frac{۵}{۲},$$

و همچنین

$$۰ \leq \delta \leq ۲.$$

در حقیقت برای انتخاب α و β محدودیت خاصی نداریم ولی برای γ و δ می بایستی نامساوی های فوق رعایت گردد. حال با استفاده از معادله ی (۱۴) می توان فرم کلی جواب جبری را به صورت زیر ارائه داد:

$$[\boldsymbol{X}] = \begin{pmatrix} [x_{۱۱}] & [x_{۱۲}] \\ [x_{۲۱}] & [x_{۲۲}] \\ [x_{۳۱}] & [x_{۳۲}] \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} [x_{۱۱}{}^{c} - x_{۱۱}{}^{r}, x_{۱۱}{}^{c} + x_{۱۱}{}^{r}] & [x_{۱۲}{}^{c} - x_{۱۲}{}^{r}, x_{۱۲}{}^{c} + x_{۱۲}{}^{r}] \\ [x_{۲۱}{}^{c} - x_{۲۱}{}^{r}, x_{۲۱}{}^{c} + x_{۲۱}{}^{r}] & [x_{۲۲}{}^{c} - x_{۲۲}{}^{r}, x_{۲۲}{}^{c} + x_{۲۲}{}^{r}] \\ [x_{۳۱}{}^{c} - x_{۳۱}{}^{r}, x_{۳۱}{}^{c} + x_{۳۱}{}^{r}] & [x_{۳۲}{}^{c} - x_{۳۲}{}^{r}, x_{۳۲}{}^{c} + x_{۳۲}{}^{r}] \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left[۳ - ۳\alpha + \gamma, \frac{۱}{۲} - ۳\alpha - \gamma\right] & [۱۳ - ۳\beta + \delta, ۱۷ - ۳\beta - \delta] \\ [-۱۰ + ۷\alpha - \gamma, -۱۰ + \alpha + \gamma] & [-۲۸ + ۷\beta - \delta, -۲۸ + ۷\beta + \delta] \\ [\alpha - \gamma, \alpha + \gamma] & [\beta - \delta, \beta + \delta] \end{pmatrix},$$

که در آن α و β اعداد دلخواهی هستند و همچنین $۰ \leq \gamma \leq \frac{۵}{۲}$ و $۰ \leq \delta \leq ۲$. بنابراین به ازای هر مقدار از α، β، γ و δ، برای معادله ی ماتریسی بازه‌ایی مثال ۴-۲، یک جواب جبری به دست می آوریم. به عنوان مثال هرگاه قرار دهیم:

$$\alpha = \frac{۳}{۲}, \qquad \beta = ۴, \qquad \gamma = \frac{۱}{۲}, \qquad \delta = ۱,$$

آنگاه می توان یکی از این بی نهایت جواب جبری را به صورت زیر ارائه داد:

$$[\boldsymbol{X}] = \begin{pmatrix} [x_{11}] & [x_{12}] \\ [x_{21}] & [x_{22}] \\ [x_{31}] & [x_{32}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-۱, ۳] & [۲, ۴] \\ [۰, ۱] & [-۱, ۱] \\ [۱, ۲] & [۳, ۵] \end{pmatrix}.$$

۶. نتیجه گیری

در این مقاله، حل جبری معادلات ماتریسی بازه‌ایی در حالت کلی (مربعی و غیرمربعی) مورد مطالعه قرار گرفته است. دو روش مختلف که دارای دو دیدگاه متفاوت بودند، برای به دست آوردن جواب جبری یک معادله ماتریسی بازه‌ایی (در صورت وجود) مطرح گردیدند. روش پیشنهادی اول مبتنی بر حساب بازه‌ایی بوده، در حال که روش دوم بر پایه ی مفاهیمی چون مرکز، پهنا و شعاع یک عدد بازه‌ایی مطرح گردید. همان طور که از نتایج پیداست، حجم محاسبات در روش اول، به دلیل آن که اندازه ی معادله دو برابر می شود بالاتر از حجم محاسبات روش دوم است که در آن معادله ی اصلی تبدیل به دو معادله ی مجزا ولی با همان ابعاد و اندازه می شود.

برای انجام پژوهش های آینده برآنیم که روش های فوق را برای انواع مختلف معادلات ماتریسی بازه‌ایی (معادلات سیلوستر و لیاپانوف)، معادلات ماتریسی دوگان بازه‌ایی و همچنین معادلات ماتریسی فازی گسترش دهیم.

فهرست منابع:

[١] B. Kearfott, V. Kreinovich (Eds.). Applications of Interval Computations. Kluwer Academic Publishers (١٩٩٦)

[٢] J. Kuttler. A fourth-order finite-difference approximation for the fixed membrane eigenproblem. Math. Comp. ۲۵:۲۳۷-۲۵۶(۱۹۷۱)

[٣] A. Rivaz, M. Mohseni Moghadam, S. Zangoei Zadeh. Interval system of matrix equations with two unknown matrices. Electronic Journal of Linear Algebra ۲۷:۴۷۸-۴۸۸(۲۰۱۴)

[٤] N.P. Seif, S.A. Hussein, A.S. Deif. The interval Sylvester equation. Computing ۵۲:۲۳۳-۲۴۴(۱۹۹۴)

[٥] B. Hashemi, M. Dehghan. Results concerning interval linear systems with multiple right-hand sides and the interval matrix equation AX = B. Journal of Computational and Applied Mathematics ۲۳۵:۲۹۶۹-۲۹۷۸(۲۰۱۱)

[٦] B. Hashemi, M. Dehghan. The interval Lyapunov matrix equation: Analytical results and an efficient numerical technique for outer estimation of the united solution set. Mathematical and Computer Modelling ۵۵:۶۲۲-۶۳۳(۲۰۱۲)

[٧] M. D. Madiseh, M. Dehghan. Generalized solution sets of the interval generalized Sylvester matrix equation $\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{Y}_j\boldsymbol{B}_j = \boldsymbol{C}$ and some approaches for inner and outer estimations. Computers and Mathematics with Applications ٦٨:١٧٥٨-١٧٧٤(٢٠١٤)

[٨] S. Zangoei Zadeh. The interval matrix equation AXB=C. ٤٦th Annual Iranian Mathematics Conference. Yazd University. Iran (٢٠١٥)

[٩][١٢] H. Mysková. Interval max-plus matrix equations. Linear Algebra and its Applications ٤٩٢:١١١-١٢٧(٢٠١٦)

[١٠] E. Drazenská, H. Mysková. Interval fuzzy matrix equations. Kybernetika ۵۳(۱):۹۹-۱۱۲(۲۰۱۷)

[١١] M. D. Madiseh, M. Hladik. Efficient approaches for enclosing the united solution set of the interval generalized Sylvester matrix equations. Appl. Numer. Math. ١٢٦:١٨-٣٣(٢٠١٨)

[١٢] D. E. Popova. Enclosing the solution set of parametric interval matrix equation $A(p)X = B(p)$. Numerical Algorithms ٧٨:٤٢٣-٤٤٧(٢٠١٨)

[١٣] H. Mysková. Universal solvability of interval max-plus matrix equations. Discrete Applied Mathematics ٢٣٩:١٦٥-١٧٣(٢٠١٨)

[١٤] H. Mysková, J. Plavka. On the solvability of interval max-min matrix equations. Linear Algebra and its Applications ٥٩٠:٨٥-٩٦(٢٠٢٠)

[١٥] L.M. Wang, C.X. Li. New sufficient conditions for the unique solution of a square Sylvester-like absolute value equation. Applied Mathematics Letters ١١٦:١٠٦٩٦٦(٢٠٢١)

[١٦] R.E. Moore. Interval Analysis. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ (١٩٦٦)

[١٧] G. Alefeld,G. Mayer. The Cholesky method for interval data. Linear Algebra Appl. ١٩٤:١٦١-١٨٢(١٩٩٣)

[١٨] G. Alefeld, G. Mayer. On the symmetric and unsymmetric solution set of interval systems. SIAM J. Matrix Anal. Appl. ١٦:١٢٢٣-١٢٤٠(١٩٩٥)