

بهبود مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از مقادیر بازه اطمینان

پویا نصراللهیان^۱، علیرضا امیر تیموری^۱، سهراب کردرستمی^{۲*}، محسن واعظ قاسمی^۱

^(۱) گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

^(۲) گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۷

چکیده

ساخت مجموعه امکان تولید و استفاده از آن برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده DMU یک روش مرسوم در علم تحلیل پوششی داده‌ها DEA می‌باشد. اما از آنجا که مجموعه امکان تولید تخمینی از مجموعه تکنولوژی واقعی T می‌باشد، در بسیاری از مواقع فاصله زیادی از آن می‌گیرد و این سبب ایجاد مشکلاتی در رتبه‌بندی می‌شود. در این مقاله سعی شده تا با افزون DMU های مجازی با استفاده از فاصله اطمینان، مرز مجموعه امکان تولید را بهبود داد تا بتوان رتبه‌بندی بهتری نسبت به رتبه‌بندی مرسوم ارائه کرد. در نهایت یک مثال با داده‌های واقعی برای روشن شدن مطالب ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه امکان تولید، بازه اطمینان، رتبه‌بندی.

۱. مقدمه

بهترین روش برای بررسی کارایی واحدها، بررسی آن‌ها با مجموعه تکنولوژی واقعی می‌باشد، ولی از آنجایی که در اکثر موارد مجموعه تکنولوژی واقعی در دسترس نیست و ما هیچ مبنا یا ایده‌آلی برای مقایسه واحدها با آنها را نداریم، بنابراین برای حل این مشکل روش غیرپارامتریک برای اندازه‌گیری کارایی با بازده به مقیاس ثابت و متغیر توسط مقاله چارنز و همکاران [۴] و بنکر و همکاران [۳] معرفی گردید. از آنجایی که این روش‌ها به راحتی می‌تواند چندین ورودی و چندین خروجی داشته باشد و همچنین احتیاجی به قیمت داده‌های ورودی و خروجی ندارد، به سرعت مورد محبوبیت برای محاسبه کارایی قرار گرفتند. برای بررسی کارایی ابتدا باید مجموعه امکان تولید (PPS) را ساخت. طریقه ساخت مجموعه امکان تولید، به جز اصل بازده به مقیاس، برای هر دو مدل CCR و BCC یکسان می‌باشد. اما این مجموعه امکان تولید با تمام خوبی‌هایی که دارد، در رتبه‌بندی واحدها دارای مشکلاتی می‌باشد. علت این امر مماس بودن واحدهای کارا با مرز کارایی می‌باشد، که این باعث می‌شود میزان کارایی آنها یک شود و نتوان تمایزی را برای رتبه‌بندی آنها اتخاذ کرد. برای رفع این مشکل روش‌های مختلفی ارائه شده از جمله روش ابرکارایی که در آن واحد تحت ارزیابی از مجموعه امکان تولید حذف می‌گردد و این سبب می‌شود تا میزان کارایی فراتر از یک شود. اما این روش نیز دارای مشکلاتی از جمله نشدنی بودن و عدم هماهنگی با واقعیت بود. در بسیاری از مدل‌های که بعد از روش ابرکارایی ارائه شده نیز از همین روش، یعنی حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه امکان تولید استفاده شده است و در تمامی آنها سعی شده تا به طریقی مشکل نشدنی بودن مدل را حل نمایند که البته بسیاری از آن مدل‌ها مشکلات جدیدی مانند انتخاب جهت برای واحد تحت ارزیابی برای رسیدن به مجموعه امکان تولید داشتند. دیگر روش‌هایی که برای رتبه‌بندی واحدهای کارا استفاده می‌شود، انتقال مجموعه امکان تولید می‌باشد. این کار باعث جدا شدن واحدهای کارا از روی ابرصفحه‌های کارا مجموعه امکان تولید شده و کارایی به راحتی با مدل BCC, CCR قابل ارزیابی می‌گردد ولی با توجه به عدم وجود جهتی دقیق برای انتقال، در بسیاری از روش‌ها ارائه شده نتایج به دست آمده بسیار به دور از واقعیت می‌باشد. در حالت کلی بهترین روش برای ارزیابی عملکرد DMU ها استفاده از مرز تکنولوژی واقعی می‌باشد که سبب می‌شود کارایی واقعی واحدها مشخص گردد که به وسیله آن می‌توان به راحتی واحدها را رتبه‌بندی کرد ولی با توجه به عدم دست بودن تکنولوژی واقعی این امر امکان‌پذیر نمی‌باشد.

از طرفی روش‌های فراوانی در علم آمار برای رتبه‌بندی وجود دارد ولی با توجه به اینکه اکثر آن روش‌ها تک مولفه و یا از یک ورودی و خروجی استفاده می‌کنند، استفاده از آنها برای DMU ها، که اکثراً چندین ورودی و چندین خروجی دارند، امکان‌پذیر نمی‌باشد. برای حل این مشکل روش‌های جدیدی در علم آمار با استفاده از تخمین تابع تولید به وجود آمد که در آن DMU ها با این تابع سنجیده می‌شود ولی در این روش نیز گاهی اوقات این تابع بشدت از تکنولوژی واقعی دور می‌گردد.

حال با توجه به مطالب گفته شده، این مقاله با استفاده از روش آماری بازه اطمینان CI و ترکیب آن با علم DEA سعی بر آن دارد که مجموعه امکان تولید را بهبود دهد تا بتوان تخمین بهتری نسبت به مجموعه تکنولوژی واقعی داشته باشیم. برای این منظور با افزون DMU های مجازی با مقدار بازه اطمینان، خروجی را تا حد ممکن افزایش داده و این امر سبب تغییر در مرز کارایی و نزدیک شدن آن به مجموعه تکنولوژی واقعی می‌گردد و همچنین بسیاری از واحدهای کارا از مرز کارایی جدا گردیده و با این روش می‌توان رتبه‌بندی بهتری نسبت به مدل معمولی CCR و BCC داشته باشیم. از آنجایی که در این روش DMU تحت ارزیابی از PPS حذف نمی‌شود، با مشکل نشدنی بودن مواجه نخواهیم شد.

این مقاله به این گونه مرتب گردیده است. در بخش ۲ و ۳ مطالبی در مورد بازه اطمینان و روشی برای بهبود مجموعه امکان تولید به وسیله آن ارائه شده است. بر اساس این مجموعه امکان تولید، مدل تغییر یافته جهت رتبه‌بندی در بخش ۴ و مدل دیگر جهت رتبه‌بندی کامل در بخش ۵ پیشنهاد شده و در بخش ۶ یک برنامه کاربردی برای روشن شدن مطلب بیان گردیده است. نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای تحقیقات آینده در بخش انتهایی آمده است.

۲. فاصله اطمینان

در علم آمار یکی از روش‌هایی که تخمین زده می‌شود برای این که داده‌ها در یک بازه مشخص قرار گیرند، استفاده از فاصله اطمینان (CI) است.

فرض کنیم n داده به صورت $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ داریم. برای محاسبه فاصله اطمینان، ابتدا باید میانگین نمونه (\bar{X})، انحراف از معیار نمونه (δ) و خطای استاندارد (S_M) را محاسبه کرد که روش محاسبه آن در زیر آمده است.

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) / n$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$S_M = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

بنابراین محاسبه فاصله اطمینان از فرمول زیر استفاده می‌شود که در آن (t_{CL}) با توجه به تعداد داده‌ها و دقت تخمین در جدول (۱) مشخص شده است.

$$\text{Lower limit} = \bar{X} - (t_{CL})(S_M)$$

$$\text{Upper limit} = \bar{X} + (t_{CL})(S_M)$$

حال با توجه به مطالب بیان شده می‌خواهیم از فاصله اطمینان برای بهبود مجموعه امکان تولید در ماهیت خروجی استفاده کنیم. در واقع می‌خواهیم مرز بالایی خروجی‌ها را محاسبه و به مجموعه امکان تولید اضافه کنیم. اما از آنجایی که DMUها معمولاً دارای چند خروجی هستند، اضافه کردن یک مجموعه از کران بالا کارساز نمی‌باشد. بنابراین در بخش بعد روشی برای حل مشکل ارائه شده است.

۳. بهبود PPS با استفاده از فاصله اطمینان

تعداد n واحد به صورت

$$\left\{ DMU_j = (x_{ij}, y_{rj}) : j = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

با m ورودی x_{ij} ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) و s خروجی y_{rj} ($r = 1, 2, 3, \dots, s$) در نظر بگیرید.

جدول (۱). ضریب بازه اطمینان بر اساس تعداد نمونه.

df	۲	۳	۴	۵	۸	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰۰
۰,۹۵	۴,۳۰۳	۳,۱۸۲	۲,۷۷۶	۲,۵۷۱	۲,۳۰۶	۲,۲۲۸	۲,۰۸۶	۲,۰۰۹	۱,۹۸۴
۰,۹۹	۹,۹۲۵	۵,۸۴۱	۴,۶۰۴	۴,۰۳۲	۳,۳۵۵	۳,۱۶۸	۲,۸۴۵	۲,۶۷۸	۲,۶۲۶

به طور کلی PPS با بازده به مقیاس ثابت و متغیر به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$T_c = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}_+^m * \mathbb{R}_+^s \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \\ y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right\}, T_v = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}_+^m * \mathbb{R}_+^s \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right\}.$$

با توجه به مطالب گفته شده در بخش قبل z_r ($r = 1, 2, 3, \dots, s$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_r = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} y_{rj} (j = 1, 2, 3, \dots, n), \\ \text{Upper CI for } r \text{th output} \end{array} \right\}$$

For $r = 1, 2, 3, \dots, s$.

در واقع Z_r بیشترین کران بالا برای خروجی r ام محسوب می‌شود.

حال با استفاده از Z_r برای هر $o \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، DMU_o واحد مجازی به PPS به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$DMU_{or}^* = \left(\begin{array}{l} x_{1o}, x_{2o}, x_{3o}, \dots, x_{mo}, \\ y_{1o}, \dots, y_{r-1o}, z_r, y_{r+1o}, \dots, y_{so} \end{array} \right),$$

$r = 1, 2, 3, \dots, s$.

در نتیجه با در نظر گرفتن

$$X_{jr}^+ = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, \dots, x_{mj}),$$

$j = 1, 2, 3, \dots, n, r = 1, 2, 3, \dots, s$,

$$Y_{jr}^+ = (y_{1j}, \dots, y_{r-1j}, z_r, y_{r+1j}, \dots, y_{sj}),$$

$j = 1, 2, 3, \dots, n, r = 1, 2, 3, \dots, s$

$$DMU_{jr}^* = (X_{jr}^+, Y_{jr}^+), j = 1, 2, 3, \dots, n, \text{ آنگاه}$$

$r = 1, 2, 3, \dots, s$

و مجموعه امکان تولید پس از اضافه شدن واحدهای مجازی به صورت زیر خواهد بود:

$$T_c^+ = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ X_{jr}^+, \\ y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ Y_{jr}^+, \\ \lambda_{jr}^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0 \text{ for } j = 1, \dots, n, \\ r = 1, 2, 3, \dots, s \end{array} \right\}$$

$$T_v^+ = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ X_{jr}^+ , \\ y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ Y_{jr}^+ , \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ = 1 , \\ \lambda_{jr}^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0 \\ \text{for } j = 1, \dots, n, r = 1, \dots, s \end{array} \right\}$$

بر اساس مجموعه‌های T_c^+ و T_v^+ محاسبه کارایی در بخش بعدی بررسی می‌گردد.

۴. بررسی کارایی با استفاده از مقادیر فاصله اطمینان

مدل‌های CCR و BCC زیر را در نظر بگیرید.

CCR:

$Min \theta$

$$s.t. \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_o \quad (۱)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_o$$

$$\lambda_j \geq 0 \text{ for } j = 1, \dots, n$$

BCC:

$Min \theta$

$$s.t. \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_o$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_o \quad (۲)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \text{ for } j = 1, \dots, n$$

بعد از اضافه شدن DMU های مجازی و تغییر PPS برای مدل بازده به مقیاس ثابت خواهیم داشت:

Min θ

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ X_{jr}^+ \leq \theta x_o \\ \text{st. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ Y_{jr}^+ \geq y_o \quad (۳) \\ & \lambda_{jr}^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0 \\ & \text{for } j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, s \end{aligned}$$

و برای مدل بازده به مقیاس متغیر خواهیم داشت:

Min θ

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ X_{jr}^+ \leq \theta x_o \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ Y_{jr}^+ \geq y_o \quad (۴) \\ \text{st. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ = 1 \\ & \lambda_{jr}^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0 \\ & \text{for } j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, s \end{aligned}$$

در حقیقت بعد از اضافه شدن DMU های مجازی به PPS، واحدها علاوه بر ارزیابی‌ها با مرز پارتوکارا، با حد بالای فاصله اطمینان نیز سنجیده می‌شوند.

قضیه ۴-۱: اگر θ_o^* و θ_o^{**} به ترتیب جواب بهینه مدل (۱) و (۳) باشد آنگاه $\theta_o^* \geq \theta_o^{**}$ خواهد بود.

اثبات: فرض کنیم $(\lambda_j^*, \theta_o^*)$ جواب بهینه مدل (۱) باشد، به وضوح $(\lambda_j^*, \lambda_{jr}^+ = 0)$ یک جواب شدنی برای مدل (۳) است که این امر $\theta_o^* \geq \theta_o^{**}$ را تضمین می‌کند.

قضیه ۴-۲: مدل (۴) همواره شدنی و اگر θ^* جواب بهینه این مدل باشد آنگاه داریم $0 < \theta^* \leq 1$ (با فرض آنکه حداقل یک ورودی مخالف صفر برابر هر DMU وجود داشته باشد).

اثبات: به وضوح $\lambda_o = 1, \lambda_j = 0, j \neq o, \lambda_{jr}^+ = 0, \forall j \forall r$ یک جواب شدنی برای مدل (۴) می‌باشد، بنابراین $\theta^* \leq 1$. از طرفی دیگر قیود $\lambda_j \geq 0, \lambda_{jr}^+ \geq 0, \forall j \forall r$ نامنفی بودن θ را تضمین می‌کنند.

فرض کنیم $\theta^* = 0$ ، خواهیم داشت

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ X_{jr}^+ \leq 0$$

بنابراین $\lambda_j = \lambda_{jr}^+ = 0, \forall j \forall r$ (با توجه به اینکه حداقل یک ورودی مخالف صفر برابری هر DMU وجود دارد)

و $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ Y_{jr}^+ = 0$ که این با قید $\sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ = 1$ در تناقض است، بنابراین برای هر جواب شدنی به خصوص در جواب بهینه خواهیم داشت $\theta^* > 0$.

مثال ۴-۱: چهار DMU با یک ورودی و دو خروجی به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$DMU_1 = (10, 100, 100), DMU_2 = (10, 105, 50)$$

$$DMU_3 = (10, 90, 80), DMU_4 = (10, 75, 75)$$

پس از محاسبه کارایی CCR برای DMU_2 و DMU_1 (همان‌گونه که در شکل (a) دیده می‌شود) هر دو دارای کارایی یک می‌باشد. بنابراین در رتبه‌بندی نمی‌توان برای آن‌ها تمایزی قائل شد. حال برای محاسبه کران بالا Z_1 و Z_2 ابتدا بازه اطمینان برای دو خروجی را به دست می‌آوریم که محاسبه آن در زیر آمده است. برای خروجی اول:

$$\bar{X} = (100 + 105 + 90 + 75) / 4 = 92.5$$

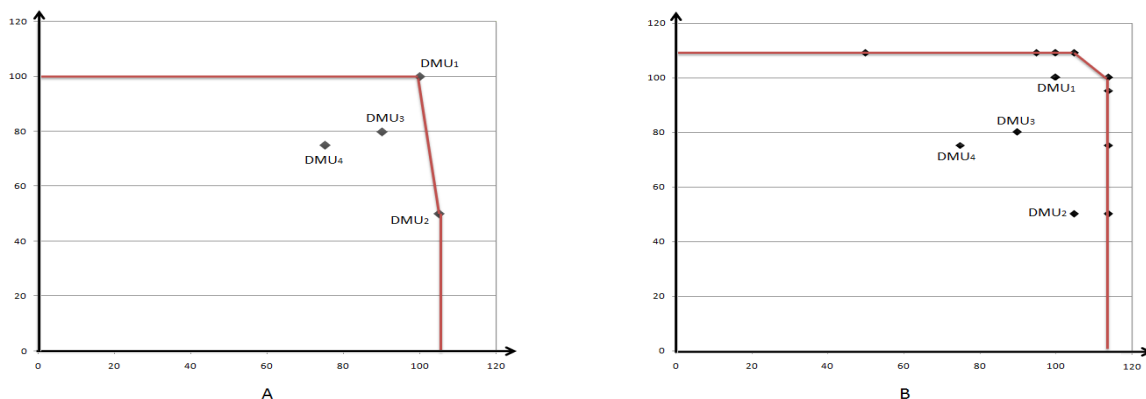
$$\delta = \sqrt{\frac{1}{4-1} \left((100-92.5)^2 + (105-92.5)^2 + (90-92.5)^2 + (75-92.5)^2 \right)} = 13.23$$

$$S_M = \frac{13.23}{\sqrt{4}} = 6.62$$

با توجه به وجود چهار عدد DMU درجه آزادی برابر ۳ و با دقت ۹۵ میزان $t_{CL} = 3.182$ می‌باشد در نتیجه داریم:

$$Upper\ limit = 92.5 + (3.182)(6.62) = 113.56 \approx 114 \quad z_1 = Max \{100, 105, 90, 75, 114\} = 114$$

شکل (۱). مرز کارایی CCR قبل و بعد از اضافه کردن DMU های مجازی ($x_1 = 10$)



برای خروجی دوم:

$$\bar{X} = (100 + 50 + 80 + 75) / 4 = 76.25$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{4-1} \left((100-76.25)^2 + (50-76.25)^2 + (80-76.25)^2 + (75-76.25)^2 \right)} = 20.56$$

$$S_M = \frac{20.56}{\sqrt{4}} = 10.28$$

$$\text{Upper limit} = 76.25 + (3.182)(10.28) = 108.96 \approx 109$$

$$z_2 = \text{Max} \{100, 50, 80, 75, 109\} = 109$$

با استفاده از مقادیر $z_1 = 114$ و $z_2 = 109$ هشت DMU مجازی به PPS اضافه می‌شود که در زیر مقادیر آن محاسبه شده است.

$$DMU_{11}^* = (10, 114, 100), DMU_{21}^* = (10, 114, 50), DMU_{31}^* = (10, 114, 80), DMU_{41}^* = (10, 114, 75)$$

$$DMU_{12}^* = (10, 100, 109), DMU_{22}^* = (10, 105, 109)$$

$$DMU_{32}^* = (10, 90, 109), DMU_{42}^* = (10, 75, 109)$$

نتایج حل مدل (۳) برای این DMU ها در جدول ۲ نمایش داده شده است. همانگونه که در شکل (b) مشاهده می‌شود با اضافه شدن این DMU های مجازی مرکز کارایی تا حد ممکن به جلو رفته است و این امر سبب جدا شدن DMU ۱ و DMU ۲ از مرز کارایی قدیم می‌شود. بنابراین با توجه به نتایج بدست آمده از جدول (۲) به راحتی می‌توان این چهار DMU را رتبه‌بندی نمود.

۵. رتبه‌بندی کامل (روش رتبه‌بندی کامل)

همانگونه که در بخش قبل در مثال (۱) مشاهده شده پس از اضافه کردن واحدهای مجازی با فاصله اطمینان مشکل رتبه‌بندی حل گردید، اما در بعضی از موارد این عمل کارساز نیست. یعنی بعد از اضافه کردن واحد مجازی همچنان دو یا چند DMU دارای کارایی یک می‌باشند که باز هم نمی‌توان آن‌ها را رتبه‌بندی کرد. برای حل این مشکل می‌توان سایر DMU هایی که دارای کارایی کمتر از یک هستند را از مجموعه امکان تولید حذف کرد و بار دیگر این عمل را تکرار نمود. این روش را می‌توان تا حصول رتبه‌بندی برای تمام واحدها ادامه داد. (البته این نکته را باید در نظر داشت اگر دو یا چند DMU کارا دارای ورودی و خروجی یکسان باشند نمی‌توان تمایزی در رتبه‌بندی برای آنها قائل شد پس باید فرآیند را در مرحله‌ای که DMU متمایزی نداریم، پایان دهیم)

فرض کنیم $E \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$ مجموعه اندیس DMU های کارا در مدل (۳) و (۴) باشد، در اینصورت مدل به صورت زیر تغییر می‌یابد.

جدول (۲). میزان کارایی CCR برای چهار DMU

Models	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4
CCR	۱,۰۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰۰	۰,۸۹۰۹۰۹	۰,۷۵۰۰۰۰
CCR with CI	۰,۹۳۴۵۷۹	۰,۹۲۱۰۵۳	۰,۷۹۴۳۹۳	۰,۷۰۰۹۳۵
Rank	۱	۲	۳	۴

به ازای مدل بازده به مقیاس ثابت:

Min θ

$$\sum_{j \in E} \lambda_j x_j + \sum_{j \in E} \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ X_{jr}^+ \leq \theta x_o$$

$$\text{st. } \sum_{j \in E} \lambda_j y_j + \sum_{j \in E} \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ Y_{jr}^+ \geq y_o \quad (5)$$

$$\lambda_{jr}^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0$$

$$\text{for } j \in E, r = 1, \dots, s$$

به ازای مدل بازده به مقیاس متغیر داریم:

Min θ

$$\sum_{j \in E} \lambda_j x_j + \sum_{j \in E} \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ X_{jr}^+ \leq \theta x_o$$

$$\sum_{j \in E} \lambda_j y_j + \sum_{j \in E} \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ Y_{jr}^+ \geq y_o \quad (6)$$

$$\text{st. } \sum_{j \in E} \lambda_j + \sum_{j \in E} \sum_{r=1}^s \lambda_{jr}^+ = 1$$

$$\lambda_{jr}^+ \geq 0, \lambda_j \geq 0$$

$$\text{for } j \in E, r = 1, \dots, s$$

نکته ۵-۱: البته در هر مرحله بازه اطمینان باید دوباره محاسبه شود. در واقع با حذف واحدهای ناکارا، ضریب بازه اطمینان افزایش می‌یابد و واحدهای کار را با حساسیت بیشتری مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. فرآیند رتبه‌بندی کاملی که در فوق ارائه شد در بخش بعد با داده‌های حقیقی به امتحان گذاشته می‌شود.

۶. برنامه کاربردی

روش ارائه‌شده بر روی داده‌های بدست آمده از ۱۵ شهر آمریکا (که در مقاله چن ارائه شده) اجرا شده است که در آن قیمت مسکن (۱۰۰۰ دلار آمریکا)، اجاره ماهانه مسکن (دلار آمریکا) و تعداد جرایم خشونت‌آمیز سه ورودی و درآمد خانوار (دلار آمریکا)، مدرک لیسانس (میلیون دلار) و پزشکان (هزار) سه خروجی در نظر گرفته شده‌اند. نتایج حل مدل BCC در ستون ۸ جدول ۳ نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد میزان کارایی ۱۰ شهر برابر یک است که این سبب می‌شود رتبه همه آنها یک باشد. حال برای محاسبه کارایی با مدل (۴) و با توجه به وجود سه خروجی ابتدا بازه اطمینان را برای آنها به دست می‌آوریم. کران بالای بازه اطمینان با دقت ۹۹ درصد برای این سه خروجی به ترتیب برابر ۴۶۳۵۸,۰۷، ۱,۰۳ و ۱۲,۷۱ می‌باشد. با استفاده از این مقادیر به راحتی می‌توان Z_1 ، Z_2 و Z_3 را برای هر شهر محاسبه نمود. با توجه به اینکه ۱۵ شهر وجود دارد ۴۵ عدد DMU مجازی به مجموعه امکان تولید اضافه می‌گردد. نتایج حل مدل (۴) در ستون ۹ جدول ۳ قرار گرفته است. همان گونه که مشخص است میزان کارایی واحدها تقلیل مشهودی داشته و تعداد واحدهای پارتو کارا از ۱۰

به ۳ رسیده است. اما از آنجا که کارایی شهر بوستون، واشنگتن، فیلادلفیا همچنان یک می‌باشد، این روش را ادامه می‌دهیم. برای این منظور شهرهای که دارای کارایی کمتر از یک می‌باشند را از مجموعه امکان تولید حذف کرده و دوباره بازه اطمینان را برای آنها محاسبه می‌کنیم. کران بالای بازه اطمینان برای این سه خروجی به ترتیب ۷۹۸۸۸،۳۲، ۳،۳۹ و ۲۶،۵۲ می‌شود. پس از محاسبه Z_1 ، Z_2 و Z_3 برای این سه شهر ۹ عدد DMU مجازی به مجموعه امکان تولید اضافه می‌گردد. نتایج حل مدل (۶) به ترتیب برای بوستون، واشنگتن، فیلادلفیا برابر ۰،۸۰۱، ۰،۸۱۹، ۰،۷۹۶ می‌باشد که در ستون آخر جدول ۳ مشخص گردیده است. با توجه به کارایی بدست آمده می‌توان به راحتی کلیه شهرها را رتبه‌بندی کرد. براین اساس رتبه این شهرها به ترتیب زیر می‌باشد:

جدول (۳). داده‌ها و میزان کارایی برای ۱۵ شهر ایالات متحده

City	قیمت	کرایه	خشونت	درآمد	مدرک	پزشک	BCC	BCC-CI مدل (۴)	BCC-CI مدل (۶)
Seattle	۵۸۶	۵۸۱	۱۱۹۳،۰۶	۴۶۹۲۸	۰،۶۵۳۴	۹،۸۷۸	۱،۰۰۰	۰،۹۸۱	
Denver	۴۷۵	۵۵۸	۱۱۳۱،۶۴	۴۲۸۷۹	۰،۵۵۲۹	۵،۳۰۱	۱،۰۰۰	۰،۹۰۵	
Philadelphia	۲۰۱	۶۰۰	۳۴۶۸،۰۰	۴۳۵۷۶	۱،۱۳۵۰	۱۸،۲۰۰	۱،۰۰۰	۱،۰۰۰	۰،۷۹۶
Minneapolis	۲۹۹	۶۰۹	۱۳۴۰،۵۵	۴۵۶۷۳	۰،۷۲۹۰	۷،۲۰۹	۱،۰۰۰	۰،۹۶۶	
Raleigh	۳۱۸	۶۱۳	۶۳۴،۷۰	۴۰۹۹۰	۰،۳۱۹۰	۴،۹۴۰	۱،۰۰۰	۰،۸۹۹	
St Louis	۲۶۵	۵۵۸	۶۵۷،۵۰	۳۹۰۷۹	۰،۵۱۵۰	۸،۵۰۰	۱،۰۰۰	۰،۸۹۵	
Cincinnati	۴۶۷	۵۸۰	۸۸۲،۴۰	۳۸۴۵۵	۰،۳۱۸۴	۴،۴۸۰	۰،۸۹۷	۰،۸۱۹	
Washington	۵۸۳	۶۲۵	۳۲۸۶،۷۰	۵۴۲۹۱	۱،۷۱۵۸	۱۵،۴۱۰	۱،۰۰۰	۱،۰۰۰	۰،۸۱۹
Pittsburgh	۳۴۷	۵۳۵	۹۱۷،۰۴	۳۴۵۳۴	۰،۴۵۱۲	۸،۷۸۴	۱،۰۰۰	۰،۸۵۸	
Dallas	۲۹۶	۶۵۰	۳۷۱۴،۳۰	۴۱۹۸۴	۱،۲۱۹۵	۸،۸۲۰	۰،۹۵۳	۰،۹۵۳	
Atlanta	۶۰۰	۷۴۰	۲۹۶۳،۱۰	۴۳۲۴۹	۰،۹۲۰۵	۷،۸۰۵	۰،۸۱۴	۰،۸۱۱	
Baltimore	۵۷۵	۷۷۵	۳۲۴۰،۷۵	۴۳۲۹۱	۰،۵۸۲۵	۱۰،۰۵۰	۰،۸۰۱	۰،۸۰۰	
Boston	۳۵۱	۸۸۸	۲۱۹۷،۱۲	۴۶۴۴۴	۱،۰۴۰۰	۱۸،۲۰۸	۱،۰۰۰	۱،۰۰۰	۰،۸۰۱
Milwaukee	۲۸۳	۷۲۷	۷۷۸،۳۵	۴۱۸۴۱	۰،۳۲۱۰	۴،۶۶۵	۱،۰۰۰	۰،۸۹۷	
Nashville	۴۳۱	۶۹۵	۱۲۴۵،۷۵	۴۰۲۲۱	۰،۲۳۶۵	۳،۵۷۵	۰،۸۷۳	۰،۸۳۶	

۷. جمع‌بندی و پیشنهادات آینده

همانگونه که مشاهده شد، تولید مجموعه امکان تولید به روش متداول و استفاده از آن برای رتبه‌بندی دارای مشکلاتی است. در این مقاله به کمک بازه اطمینان سعی گردید مجموعه امکان تولید را بهبود داد، تا تخمین بهتری از مجموعه تکنولوژی واقعی ایجاد گردد. همچنین با استفاده از این مجموعه امکان تولید جدید مدل‌های رتبه‌بندی را ارتقا داده تا تمایز بیشتری در رتبه‌بندی ایجاد شود. در بخش ۵ این روش توسعه داده شد و روشی برای رتبه‌بندی کامل ارائه گردید. و در انتها با استفاده از این روش به رتبه‌بندی ۱۵ شهر آمریکا پرداخته شد. این مقاله راه را برای مطالعه استفاده از بازه اطمینان در سایر مدل‌هایی تحلیل پوششی داده‌ها که در آن‌ها از مجموعه امکان تولید استفاده می‌شود، باز می‌کند. بدین گونه که با کمک PPS ارائه شده و جایگزین کردن آن با مجموعه امکان تولید معمولی، می‌توان مدل‌های جدیدی ارائه داد که معمولاً دارای حساسیت بیشتر نسبت به مدل‌های اولیه است. موضوع دیگری که برای تحقیق باز می‌شود، استفاده همزمان بازه اطمینان در ورودی و خروجی DMU ها می‌باشد.

فهرست منابع

- [۱] Amirteimoori, A., Kordrostami, S., Nasrollahian, P. A Method for Solving Super-Efficiency Infeasibility by Adding virtual DMUs with Mean Values. Iranian Journal of Management Studies, ۱۰(۴), ۹۰۵-۹۱۶ (۲۰۱۷)
- [۲] Andersen, P., Petersen, N. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science, ۳۹(۱۰), ۱۲۶۱-۱۲۶۴ (۱۹۹۳)
- [۳] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, ۳۰(۹), ۱۰۷۸-۱۰۹۲ (۱۹۸۴)
- [۴] Charnes, A., Cooper, W., Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision-making units. European Journal of Operational Research, ۳(۴), ۳۳۹ (۱۹۷۹)
- [۵] Charnes, A., Haag, S., Jaska, P., Semple, J. Sensitivity of efficiency classifications in the additive model of data envelopment analysis. International Journal of Systems Science, ۲۳(۵), ۷۸۹-۷۹۸ (۱۹۹۲)
- [۶] Charnes, A., Cooper, WW., Golany, B., Seiford, LM., Stutz, J. Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions. Journal of Econometrics, ۳۰(۱-۲), ۹۱-۱۰۷ (۱۹۸۵)
- [۷] Chen, Y. Ranking efficient units in DEA. OMEGA, ۳۲, ۲۱۳-۲۱۹ (۲۰۰۴)
- [۸] Mehrabian S., Alirezaee M. R., Jahanshahloo G. R. A complete efficiency ranking of decision making units in data envelopment analysis. Computer Optimization Apply, ۱۴, ۲۶۱-۲۶۶ (۱۹۹۹)
- [۹] Seiford L. M., Thrall R. M. Recent developments in DEA: The mathematical programming approach to frontier analysis. Journal of Econometrics, ۴۶, ۷-۳۸ (۱۹۹۰)
- [۱۰] Seiford, L. M., Zhu, J. Stability regions for maintaining efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, ۱۰۸(۱), ۱۲۷-۱۳۹ (۱۹۹۸)
- [۱۱] Seiford, L. M., Zhu, J. Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models. INFOR: Information Systems and Operational Research, ۳۷(۲), ۱۷۴-۱۸۷ (۱۹۹۹)
- [۱۲] Sexton, T. R., Silkman, R. H. and Hogan, A. J. Data envelopment analysis: Critique and extensions. New Directions for Program Evaluation, ۱۹۸۶: ۷۳-۱۰۵ (۱۹۸۶)
- [۱۳] Thrall R. M. Duality, classification and slack in data envelopment analysis. The Annals of Operational Research, ۶۶, ۱۰۹-۱۳۸ (۱۹۹۶)
- [۱۴] Tone K. Variations on the theme of slacks-based measure of efficiency in DEA, European Journal of Operational Research ۲۰۰, ۹۰۱-۹۰۷ (۲۰۱۰)
- [۱۵] Tone K, Tsutsui M. Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach, Omega ۴۲, ۱۲۴-۱۳۱ (۲۰۱۴)

