

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک اصلاح کاهشی مقیاس‌بندی شده از روش گرادیان مزدوج هستنس-اشتيفل با نگاه کاربردی در حسگری فشرده

علی ابراهیم‌نژاد^۱، زهره امینی‌فرد^{۲*}، سامان بابایی کفاکی^۲

^(۱) گروه ریاضی، واحد قائم‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائم‌شهر، ایران

^(۲) دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۲/۱۱

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۰۲

چکیده

به منظور بهبود روش گرادیان مزدوج کلاسیک هستنس-اشتيفل، شنگوی و همکاران یک روش گرادیان مزدوج موثر را پیشنهاد کردند که با استفاده از جستجوی خطی ولف قوی (با محدود کردن پارامترهای جستجوی خطی) در خاصیت کافی کاهشی صدق می‌کند. با الهام از توسعه مقیاس‌بندی شده‌ی روش هستنس-اشتيفل که اخیراً توسط دانگ و همکاران مطرح شده است، یک اصلاح مقیاس‌بندی شده از روش گرادیان مزدوج شنگوی و همکاران پیشنهاد می‌شود که قادر است شرط کافی کاهشی را مستقل از تکنیک جستجوی خطی و بدون فرض تحدب تابع هدف برقرار سازد. همچنین، همگرایی سراسری روش مطرح شده بر اساس فرضیات استاندارد مورد بحث قرار می‌گیرد. به علاوه، یک تقریب هموار برای مساله بهینه‌سازی حسگری فشرده ارائه می‌شود. عملکرد عددی بر مجموعه‌ای از مسائل کلاسیک از کتابخانه CUTEr و نیز در حل مساله حسگری فشرده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج مقایسات برتری رویکرد پیشنهادی را به تصویر می‌کشند.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی نامقید، روش گرادیان مزدوج، خاصیت کافی کاهشی، همگرایی سراسری، حسگری فشرده.

$$x_{k+1} = x_k + s_k, k \geq 0, \quad (1)$$

که در آن $s_k = \alpha_k d_k$ و $\alpha_k > 0$ طول گامی است که توسط جستجوی خطی در راستای جهت جستجوی d_k با شروع از $d_0 = -g_0$ با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, \quad k \geq 0, \quad (2)$$

که در آن $g_k = \nabla f(x_k)$ و β_k پارامتر روش گرادیان مزدوج است. همان‌طور که در مراجع [12, 13, 14, 15] بیان شده است، این پارامتر نقش موثری در عملکرد روش گرادیان مزدوج دارد. در بین تکنیک‌های گوناگون گرادیان مزدوج، روش هستنس-اشتيفل (HS) [16] با پارامتر

$$\beta_k^{HS} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k}, \quad (3)$$

که در آن $y_k = g_{k+1} - g_k$ ، به عنوان یکی از روش‌های موثر کلاسیک شناخته می‌شود. اهمیت این روش در مواجهه با یک جهت جستجوی نامناسب مشخص می‌گردد. در حقیقت، روش HS در چنین شرایطی قادر به شروع مجدد است. علاوه بر این، روش مذکور شرط مزدوج بودن دو جهت متوالی را در حالت کلی تضمین می‌کند.

تلاش‌های گسترده‌ای به منظور برقراری خاصیت کاهش‌دهنده جهت‌های جستجو که به ازای برخی از پارامترهای کلاسیک گرادیان مزدوج مانند پارامتر HS همواره برقرار نیست، انجام گرفته است. در این بین، در یک دسته‌بندی کلی می‌توان به تحلیل‌های مقدار ویژه‌ای بر ماتریس جهت جستجوی برخی توسعه‌های روش‌های کلاسیک، نسخه‌های پیش-شرط‌سازی شده و نیز توسعه سه جمله‌ای از روش‌های کلاسیک اشاره کرد (به منظور بررسی دقیق‌تر

۱. مقدمه

الگوریتم‌های گرادیان مزدوج از جمله تکنیک‌های کارا برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید هستند که به طور گسترده در علوم، مهندسی، مدیریت، علوم نظامی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه، برهانی [1]، هروی و هدتنی [2] و نیز نادرشاهی و همکاران [3] از این روش در شبکه‌های عصبی استفاده کردند. لیو و همکاران [4] با بکارگیری روش گرادیان مزدوج به حل مسائل مربوط به پیش‌بینی آب و هوا پرداختند. اسماعیلی و همکاران [5] در حل مسائل بازیابی تصویر از برخی توسعه‌های گرادیان مزدوج استفاده کردند. علاوه بر این، الگوریتم‌های گرادیان مزدوج در حل مسائل بازیابی تنک توسط ابوبکر و همکاران [6] بکار گرفته شد. راهپیمایی و همکاران [7] بر پایه ساختار گرادیان مزدوج یک روش لونبرگ-مارکوارت را برای حل معادلات قدرمطلق معرفی کردند. لی و همکاران [8] یک دسته از روش‌های گرادیان مزدوج مقیاس‌بندی شده را برای تقریب تجزیه نامنفی ماتریسی بکار بردند. همچنین، انواع مختلفی از الگوریتم‌های گرادیان مزدوج در حل دستگاه معادلات غیرخطی [9] و مساله کمترین مربعات [10] بکار گرفته شده‌اند.

به طور کلی، روش‌های گرادیان مزدوج به دلیل بکارگیری ضمنی از اطلاعات مرتبه دوم تابع هدف، خواص همگرایی قوی [11]، سادگی فرمول تکراری و نیز استفاده کم از حافظه ماشین بسیار مورد استقبال قرار گرفته‌اند. در بهینه‌سازی نامقید، مساله زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

که در آن اغلب $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر فرض می‌شود. ساختار کلی روش‌های تکراری در بهینه‌سازی نامقید با شروع از $x_0 \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر است:

با $0 < \delta < \sigma < 1$ روش گرادیان مزدوج با پارامتر (۴) در خاصیت کافی کاهشی زیر صدق می‌کند:

$$g_k^T d_k \leq -\rho \|g_k\|^2, \quad (۸)$$

که در آن ρ یک ثابت مثبت است. در تلاشی دیگر برای اصلاح روش HS، اخیرا دانگ و همکاران یک دسته از روش‌های گرادیان مزدوج را به صورت زیر معرفی کردند که در شرط کافی کاهشی (۸) و نیز یک شرط مزدوج بودن توسعه یافته [20] صدق می‌کند:

$$d_0 = -g_0, \quad (۹)$$

$$d_{k+1}^{MHS} = \begin{cases} -g_{k+1}, g_{k+1}^T y_k < 0, \\ d_{k+1}^M, g_{k+1}^T y_k \geq 0, \end{cases}$$

که در آن

$$d_{k+1}^M = \begin{cases} -\mu_k g_{k+1} + \beta_k^{MHS} d_k, g_{k+1}^T d_k > 0, \\ -g_{k+1} + \beta_k^{HS} d_k, g_{k+1}^T d_k \leq 0, \end{cases}$$

با

$$\mu_k = 1 + \frac{(g_{k+1}^T d_k)(g_{k+1}^T y_k)}{d_k^T y_k \|g_k\|^2},$$

و

$$\beta_k^{MHS} = \max \left\{ -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T y_k} \beta_k^{HS} - t \frac{\|y_k\|^2 g_k^T d_k}{(d_k^T y_k)^2}, \eta \right\},$$

که در آن t ثابت مثبت است و با انتخاب ثابت مثبت کوچک η

$$\eta_k = \frac{-1}{\|d_k\| \min\{\eta, \|g_k\|\}}.$$

اکنون، با الهام از رویکرد اصلاحی [15]، یک توسعه کاهشی از روش گرادیان مزدوج با پارامتر (۴) به شکل زیر قابل طرح است:

به [17, 18, 19] و مراجع اشاره شده در آنها مراجعه کنید).

در این پژوهش، با الهام از توسعه مقیاس‌بندی شده دانگ و همکاران [15] بر روش HS، به ساختار بهبودیافته‌ای از روش سنگوی و همکاران [14] می‌پردازیم که با استفاده از فرایند مقیاس‌بندی قادر است شرط کافی کاهشی را مستقل از تکنیک جستجوی خطی تضمین نماید. طرح این توسعه کاهشی و نیز اثبات همگرایی روش پیشنهادی در بخش دوم به بحث گذاشته می‌شود. سایر بخش‌های این مطالعه شامل ارائه یک تقریب هموار برای مساله حسگری فشرده در بخش سوم، بررسی عملکرد عددی روش پیشنهادی در بخش چهارم و نتیجه‌گیری در بخش پنجم است.

۲- یک توسعه کاهشی مقیاس‌بندی شده از

روش هستنس-اشتيفل اصلاح شده

با هدف بهبود عملکرد روش HS، سنگوی و همکاران پارامتر اصلاح شده زیر را پیشنهاد کردند:

$$\beta_k^{SWH} = \frac{g_{k+1}^T z_k}{d_k^T y_k}, \quad (۴)$$

و

$$z_k = g_{k+1} - \frac{\|g_{k+1}\|}{\|g_k\|} g_k, \quad (۵)$$

که در آن $\|\cdot\|$ بیان‌گر نرم اقلیدسی است. علاوه بر این در [14] نشان داده شد که تحت شرایط جستجوی خطی ولف قوی، یعنی

$$f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k) \leq \delta \alpha_k g_k^T d_k, \quad (۶)$$

$$|\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k| \leq -\sigma g_k^T d_k, \quad (۷)$$

در ادامه، همگرایی روش پیشنهادی تحت شرایط جستجوی خطی ولف قوی (۶) و (۷) و مفروضات استاندارد زیر مورد بحث قرار می‌گیرد.

مفروضات ۱-۲ - مجموعه تراز $\Omega = \{x: f(x) \leq$

$f(x_0)\}$ کراندار است. همچنین، در یک همسایگی باز \mathcal{S} از Ω ، تابع هدف به طور پیوسته مشتق پذیر است و ∇f در شرط پیوستگی لیپشیتز زیر با ثابت مثبت L صدق می‌کند:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in \mathcal{S}. \quad (11)$$

مفروضات فوق تضمین می‌کنند که ثابت مثبت τ وجود دارد به طوری که

$$\|\nabla f(x_k)\| \leq \tau, \forall k \geq 0. \quad (12)$$

با فرض برقراری مفروضات فوق و نیز محاسبه طول گام α_k مطابق شرایط جستجوی خطی ولف قوی (۶) و (۷) همگرایی روش گرادیان مزدوج ارائه شده با استناد به لم ۳.۱ از [21] قابل اثبات است.

قضیه ۱-۲ - به شرط برقراری مفروضات ۱-۲، اگر f در یک همسایگی \mathcal{S} از Ω قویا محدب باشد و طول گام α_k بر اساس شرایط ولف قوی (۶) و (۷) محاسبه شود، روش تکراری (۱) با جهت جستجوی MSWH با فرمول (۱۰) که در آن پارامتر t به ثابت مثبت M کراندار است، به مفهوم زیر همگراست:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

اثبات: با توجه به لم ۱ و نیز لم ۳.۱ از [21] کفایت نشان دهیم جهت‌های جستجوی (۸) کراندار هستند.

$$d_0 = -g_0, d_{k+1}^{MSWH} = \begin{cases} -g_{k+1}, & g_{k+1}^T z_k \\ -\lambda_k g_{k+1} + \beta_k^{MSWH} d_k, & g_{k+1}^T z_k \end{cases} \quad (10)$$

که در آن

$$\lambda_k = 1 + \frac{(g_{k+1}^T d_k)(g_{k+1}^T z_k)}{d_k^T y_k \|g_{k+1}\|^2},$$

و

$$\beta_k^{MSWH} = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T y_k} \beta_k^{SWH} - t \frac{\|z_k\|^2 g_{k+1}^T d_k}{(d_k^T y_k)^2}.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اینجا شرط $g_{k+1}^T z_k < 0$ را می‌توان به عنوان شرطی برای شروع مجدد روش تلقی کرد.

لم زیر نشان می‌دهد که جهت MSWH در شرط کافی کاهش (۸) صدق می‌کند.

لم ۱-۲ - جهت‌های جستجوی (۱۰) در شرط کافی کاهش (۸) با انتخاب $\rho = 1$ صدق می‌کنند.

اثبات: اگر $k = 0$ و یا $g_{k+1}^T z_k < 0$ برقراری شرط (۸) بدیهی است. در غیر این صورت از رابطه (۴) و (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} g_{k+1}^T d_{k+1} &= -\lambda_k \|g_{k+1}\|^2 + \left(1 - \frac{g_{k+1}^T d_k}{d_k^T y_k}\right) \beta_k^{SWH} g_{k+1}^T d_k - \\ &t \frac{(g_{k+1}^T d_k)^2 \|z_k\|^2}{(d_k^T y_k)^2} \leq -\|g_{k+1}\|^2 - \\ &\frac{(g_{k+1}^T d_k)(g_{k+1}^T z_k)}{d_k^T y_k} + \left(1 - \frac{g_{k+1}^T d_k}{d_k^T y_k}\right) \beta_k^{SWH} g_{k+1}^T d_k \leq -\|g_{k+1}\|^2 - \\ &\left(\frac{g_{k+1}^T d_k}{d_k^T y_k}\right)^2 g_{k+1}^T z_k \leq -\|g_{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

مخابراتی، سنجش طیف در شبکه‌های رادیوشناختی، سیستم‌های مخابراتی چند ورودی-چند خروجی و ... و نیز توسیع‌های علمی از جمله نظریه نمونه‌برداری، تقریب تنک، تصحیح خطا، آمار و یادگیری ماشین می‌باشد [23, 24, 25, 26, 27]. اساس حسگری فشرده، یافتن پاسخ‌های تنک دستگاه معادلات خطی زیرمعین $Ax = b$ با $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^m$ است، که این جواب می‌تواند توسط یک مساله مینیمم‌سازی بر اساس ℓ_0 -نرم به دست آید. با توجه به پیچیدگی مساله حاصل، اغلب یک تقریب مناسب برای ℓ_0 -نرم بکار گرفته می‌شود. لذا، مساله حسگری فشرده به صورت کلی زیر مطرح می‌شود:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \frac{1}{2} \|Ax + b\|^2 + \theta \psi(x), \quad (15)$$

که در آن $\psi(\cdot)$ تابع جریمه نامیده می‌شود که تقریب مناسبی برای اندازه‌گیری میزان تنکی جواب است و θ پارامتر جریمه است که به عنوان وزن نسبی بین جملات تابع هدف مرکب در نظر گرفته می‌شود. یک انتخاب متداول برای تابع $\psi(\cdot)$ ، ℓ_1 -نرم است که محدب ولی ناهموار بوده و لذا، حل آن با روش‌های متداول بهینه‌سازی غیرخطی میسر نیست [5]. از جمله روش‌های مطرح شده در حل مساله (15) با تابع جریمه ℓ_1 -نرم، بکارگیری تکنیک‌های هموارسازی است که در آن تلاش می‌گردد تا تقریبی هموار از تابع جریمه $\|\cdot\|_1$ ارائه شود. از جمله روش‌های شناخته شده هموارسازی می‌توان به روش هموارسازی نستروف [28] اشاره کرد که در آن تابع معروف هوبر [29] به عنوان تقریبی از ℓ_1 -نرم بکار گرفته می‌شود.

به منظور دستیابی به جوابی که ضمن بهبود کیفیت جواب دستگاه، میزان تنکی آن را افزایش دهد برخی انتخاب‌های نامحدب برای تابع جریمه $\psi(\cdot)$

در صورتی که $k = 0$ و یا $g_{k+1}^T z_k < 0$ با در نظر گرفتن رابطه (12) حکم بدیهی است. در غیر اینصورت، از آنجایی که تابع f قویا محدب است بنا بر قضیه 1.3.16 از [22] ثابت مثبت ζ وجود دارد به طوری که

$$s_k^T y_k \geq \zeta \|s_k\|^2, \quad \forall k \geq 0. \quad (13)$$

همچنین، از روابط (4) و (11) داریم:

$$\begin{aligned} \|z_k\| &\leq \|g_{k+1} - g_k\| + \|g_k\| - \frac{\|g_{k+1}\|}{\|g_k\|} \|g_k\| \leq \|g_{k+1} - g_k\| + \left| \|g_k\| - \|g_{k+1}\| \right| \leq 2\|g_{k+1} - g_k\| = 2\|y_k\|. \end{aligned} \quad (14)$$

از سوی دیگر، با استفاده از شرط (7) داریم:

$$d_k^T y_k \geq -(1 - \sigma) g_k^T d_k.$$

حال، بنا بر روابط (4) و (10) تا (14) می‌توان نوشت:

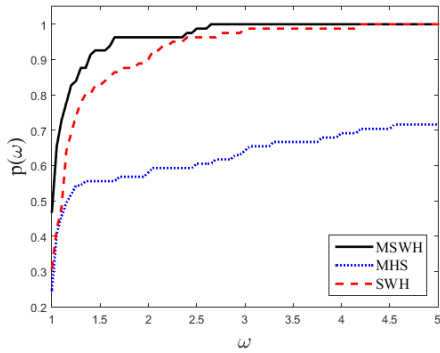
$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\| &\leq \left(1 + \frac{\|z_k\| \|s_k\|}{s_k^T y_k} \right) \|g_{k+1}\| - \frac{g_k^T d_k \|g_{k+1}\| \|z_k\| \|s_k\|}{d_k^T y_k s_k^T y_k} + t \frac{\|g_{k+1}\| \|z_k\|^2 \|s_k\|^2}{(s_k^T y_k)^2} \leq \left(1 + 2 \frac{L}{\zeta} \right) \tau + 2 \frac{L\tau}{\zeta(1-\sigma)} + M \frac{4L^2\tau}{\zeta^2}. \end{aligned}$$

۳- یک تقریب هموار از مساله حسگری فشرده

حسگری فشرده موضوعی جدید و در حال پیشرفت است که دارای قابلیت‌های متنوعی در کاربردهای تکنولوژیکی از جمله دوربین تک-پیکسلی، تصویربرداری پزشکی، رادار، مخابرات با پهنای باند بسیار وسیع برای کاهش نرخ نمونه‌برداری آنالوگ به دیجیتال در گیرنده، تخمین کانال در سیستم‌های

$$\begin{cases} p_\gamma(x(i)), & |x(i)| < \gamma, \\ f_\gamma(x(i)), & |x(i)| \geq \gamma, \end{cases}$$

که در آن γ یک ثابت مثبت کوچک است. همان طور که ملاحظه می‌شود، تابع $\varphi_\gamma(\cdot)$ همواره مشتق پذیر است و لذا مساله (۱۵) با تابع جریمه $\varphi_\gamma(\cdot)$ را می‌توان با الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی حل کرد. لازم به ذکر است که با بکارگیری تحلیل‌های مشابه می‌توان تقریب‌های هموار مناسبی را برای سایر توابع جریمه مطرح شده در [32] به دست آورد.



نمودار ۱. مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها از دیدگاه زمان اجرا

۴- مشاهدات عددی

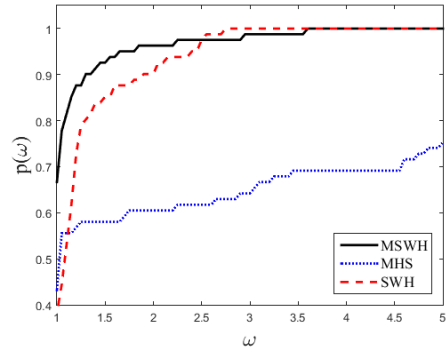
در این بخش به بررسی عملکرد عددی روش گرادیان مزدوج MSWH با جهت جستجوی (۱۰) در مقایسه با دو روش MSH با جهت جستجوی (۹) و روش SWH با جهت جستجوی (۲) و پارامتر گرادیان مزدوج (۴) می‌پردازیم. در پیاده‌سازی‌های عددی برای روش‌های MSWH و MSH مقدار t را برابر ۱.۳ قرار دادیم که از میان انتخاب‌های مختلف $\left\{ \frac{k}{10} \right\}_{k=1}^{15}$ عملکرد عددی مطلوب‌تری را دارد. اطلاعات مربوط به مسائل آزمون (شامل ۸۱ مساله از کتابخانه [33] CUTEr) و نیز اطلاعات سخت‌افزاری و نرم‌افزاری مورد استفاده در پیاده‌سازی‌ها در [34] ارائه شده

ارائه شده است [30, 31, 32]. از جمله این توابع می‌توان به تابع لگاریتمی زیر اشاره کرد:

$$\psi(x) = f_\gamma(x) = \sum_{i=1}^n \log(\epsilon + |x(i)|), \quad (16)$$

که در آن $x(i)$ مولفه i ام بردار x و ϵ ثابتی مثبت است.

با توجه به اینکه تابع جریمه $f_\gamma(\cdot)$ صرفاً در مبدا ناهموار است، برای ارائه یک تقریب هموار از مساله (۱۶) در نزدیکی مبدا، از تقریب چندجمله‌ای $p_\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با تعریف زیر استفاده می‌کنیم:



نمودار ۱. مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها از دیدگاه تعداد کل ارزیابی تابع

$$p_\gamma(x) = ax^2 + bx^2(x^2 - \gamma^2),$$

که در آن

$$a = \frac{\ln(1+|\gamma|)}{\gamma^2},$$

و

$$b = \frac{1}{2\gamma^3(1+|\gamma|)} - \frac{a}{\gamma^2}.$$

لذا، با در نظر گرفتن شاخصه‌های اسپلین، در اینجا تابع تکه‌ای چندجمله‌ای زیر را به عنوان تابع جریمه $\psi(\cdot)$ معرفی می‌کنیم:

$$\varphi_\gamma(x(i)) = \quad (17)$$

است. همچنین، جستجوی خطی بر پایه شرایط ولف قوی (۶) و (۷) با پارامترهای $\delta = 10^{-4}$ و $\sigma = 0.99$ و با بکارگیری الگوریتم ۳.۵ از [35] انجام گرفت. شرط

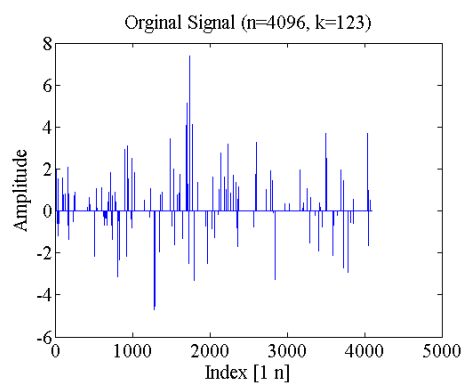
$$\|g_k\|_\infty < 10^{-6}(1 + |f(x_k)|),$$

و یا رسیدن به حداکثر ۱۰۰۰۰ تکرار به عنوان شرط توقف الگوریتم‌ها در نظر گرفته شد. ضمناً، خروجی الگوریتم‌ها عبارتست از زمان اجرا (ثانیه) و تعداد کل ارزیابی تابع یعنی $N_f + 3N_g$ ، که در آن N_f و N_g به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تعداد دفعات محاسبه تابع و گرادیان هستند [36]. برای مقایسه نتایج حاصل، از معیار دولان-موره استفاده شد [37]. همان‌طور که نمودارهای ۱ و ۲ نشان می‌دهند، روش MSWH از هر دو منظر تعداد کل ارزیابی تابع و زمان اجرا از دو روش دیگر عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد.

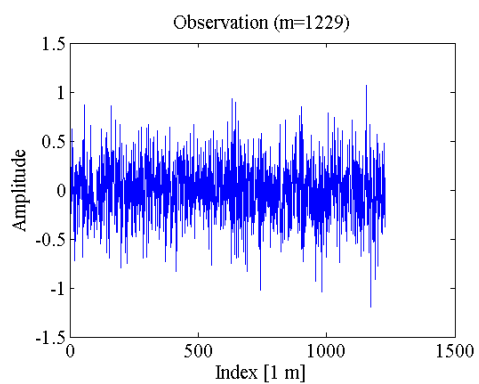
در ادامه، به بررسی عملکرد روش MSWH در حل مساله حسگری فشرده (۱۵) به همراه تابع جریمه $\varphi_\gamma(\cdot)$ می‌پردازیم. برای تولید مساله آزمون به طور تصادفی، با در نظر گرفتن بعد سیگنال $n = 2^{12}$ تعداد مشاهدات و تعداد عناصر ناصفر را به ترتیب برابر $m = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor$ و $s = 3 \lfloor \frac{m}{10} \rfloor$ قرار دادیم. ماتریس A را برابر ماتریس گاوسی مقیاس شده با پارامترهایی مشابه [5] در نظر گرفتیم. علاوه بر این، نویزی گاوسی با انحراف استاندارد ۰.۰۱ بر بردار b تحمیل کردیم. نقطه شروع x_0 به طور تصادفی در بازه $(0,1)$ تعیین شد. همچنین در روابط (۱۵) و (۱۷) به ترتیب $\theta = 2^{-7}$ و $\gamma = \min(10^{-3}, 0.9\|A^T b\|_\infty)$ قرار داده شد. به منظور ارزیابی کیفیت پاسخ‌ها، در اینجا خطای نسبی (RelErr) [30] سیگنال بازیابی شده را مورد سنجش قرار می‌دهیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، MSWH در مقایسه با MSH و SWH از عملکرد بهتری برخوردار است.

۵- نتیجه‌گیری

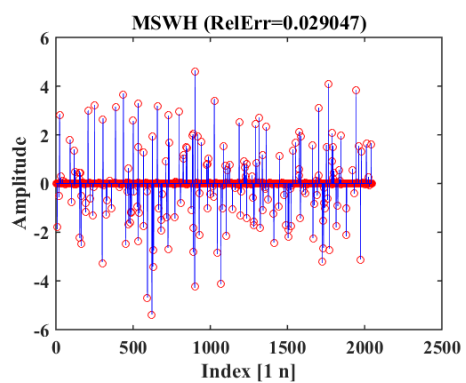
با توجه به اینکه روش گرادیان مزدوج کلاسیک هستنس-اشتیفل به رغم عملکرد عددی مطلوب، به لحاظ تئوری فاقد خاصیت کافی کاهشی است، برخی اصلاحات به منظور بهبود روش ارائه شده است. از جمله دانگ و همکاران [15] با استفاده از رویکرد مقیاس‌بندی، یک روش گرادیان مزدوج را ارائه کردند که ضمن بهبود عملکرد عددی روش کلاسیک هستنس-اشتیفل در شرط کافی کاهشی نیز صدق می‌کند. از سوی دیگر، شنگوی و همکاران [14] اصلاحی بر پارامتر هستنس-اشتیفل را مطرح کردند که شرط کافی کاهشی را با استفاده از جستجوی خطی ولف قوی (و به ازای انتخاب‌های خاصی از پارامترهای آن) به دست می‌دهد. در این مطالعه با بکارگیری رویکرد مقیاس‌بندی دانگ و همکاران [15]، اصلاحی از پارامتر پیشنهادی شنگوی و همکاران [14] به نحوی ارائه گردید که جهت جستجوی تولید شده مستقل از تکنیک جستجوی خطی در شرط کافی کاهشی صدق کند. همگرایی سراسری روش مطرح شده برای توابع قویا محدب مورد بحث قرار گرفت. علاوه بر این، یک تقریب هموار از مساله ناهموار حسگری فشرده پیشنهاد شد. به منظور ارزیابی رفتار عددی روش پیشنهادی، پیاده‌سازی‌های عددی بر برخی مسائل کلاسیک از کتابخانه CUTEr در شرایط استاندارد انجام پذیرفت و نتایج بر اساس معیار دولان-موره مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج مقایسات حاکی از برتری رویکرد پیشنهادی بود. ضمناً، برخی آزمایشات عددی بر مساله شناخته شده‌ی حسگری فشرده به عنوان یک مساله کاربردی انجام گرفت. خروجی به دست آمده توانایی روش مطرح شده در بازیابی جواب مساله با کیفیت قابل قبول را به تصویر کشید.



نمودار ۲. سیگنال اصلی



نمودار ۳. سیگنال مشاهده شده‌ی نویزدار



نمودار ۴. سیگنال بازیابی شده (دایره‌های قرمز) توسط

MSWH

فهرست منابع

- [8] X. Li, W. Zhang and X. Dong, "A class of modified FR conjugate gradient method and applications to non-negative matrix factorization," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 73, pp. 270-276, 2017.
- [9] X. Y. Wang, S. J. Li and X. P. Kou, "A self-adaptive three-term conjugate gradient method for monotone nonlinear equations with convex constraints," *Calcolo*, vol. 53, pp. 133-145, 2016.
- [10] R. Dehghani and N. Mahdavi-Amiri, "Scaled nonlinear conjugate gradient methods for nonlinear least squares problems," *Numerical Algorithms*, vol. 82, pp. 1-20, 2019.
- [11] Y. Dai, J. Han, G. Liu, D. Sun, H. Yin and Y. X. Yuan, "Convergence properties of nonlinear conjugate gradient methods," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 10, pp. 345-358, 2000.
- [12] Z. Aminifard and S. Babaie-Kafaki, "A modified descent Polak–Ribière–Polyak conjugate gradient method with global convergence property for nonconvex functions," *Calcolo*, vol. 56, pp. 1-11, 2019.
- [13] Z. Aminifard and S. Babaie-Kafaki, "An optimal parameter choice for the Dai–Liao family of conjugate gradient methods by avoiding a direction of the maximum magnification by the search direction matrix," *4OR*, vol. 17, pp. 317-330, 2019.
- [14] Y. Shengwei, Z. Wei and H. Huang, "A note about WYL's conjugate gradient method and its applications," *Applied Mathematics and computation*, vol. 191, pp. 381-388, 2007.
- [15] X. Dong, H. W. Liu, Y. B. He and X. M. Yang, "A modified Hestenes–Stiefel conjugate gradient method
- [1] M. Borhani, "Corpus analysis using relaxed conjugate gradient neural network training algorithm," *Neural Processing Letters*, vol. 50, pp. 839-849, 2019.
- [2] A. R. Heravi and G. A. Hodtani, "A new correntropy-based conjugate gradient backpropagation algorithm for improving training in neural networks," *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, vol. 12, pp. 6252-6263, 2018.
- [۳] م. نادرشاهی، ا. صفی صمغ آبادی و ر. توکلی مقدم، "آرایه روش مبتنی بر گرادیان مزدوج برای آموزش شبکه عصبی تصمیم،" پژوهش‌های نوین در ریاضی، جلد ۴، صص ۹۲-۷۹، ۱۳۹۷.
- [4] Y. Liu, L. Zhang and Z. Lian, "Conjugate gradient algorithm in the four-dimensional variational data assimilation system in GRAPES," *Journal of Meteorological Research*, vol. 32, pp. 974-984, 2018.
- [5] H. Esmaeili, S. Shabani and M. Kimiaei, "A new generalized shrinkage conjugate gradient method for sparse recovery," vol. 56, pp. 1-38, 2019.
- [6] A. B. Abubakar, P. Kumam and A. M. Awwal, "Global convergence via descent modified three-term conjugate gradient projection algorithm with applications to signal recovery," *Results in Applied Mathematics*, vol. 4, p. 100069, 2019.
- [۷] ف. راهپیمایی، ت. اللهویرنلو و ک. امینی، "یک روش لونیبرگ-مارکوارت جدید بر پایه ساختار گرادیان مزدوج برای حل معادلات قدرمطلق،" پژوهش‌های نوین در ریاضی، جلد ۲۱، صص ۱۴-۱۳۹۸، ۵.

- [23] E. Hale, W. Yin and Y. Zhang, "Fixed-point continuation applied to compressed sensing: implementation and numerical experiments," *Journal of Computational Mathematics*, vol. 282, pp. 170-194, 2010.
- [24] M. Roozbeh, S. Babaie-Kafaki and M. Arashi, "A class of biased estimators based on QR decomposition," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 508, pp. 190-205, 2015.
- [25] Y. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Cambridge university press, 2012.
- [26] M. Elad, *Sparse and Redundant Representations: from Theory to Applications in Signal and Image Processing*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [27] S. Foucart and H. Rauhut, "A mathematical introduction to compressive sensing," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 54, pp. 151-165, 2017.
- [28] Y. Nesterov, "Excessive gap technique in nonsmooth convex minimization.," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 16, pp. 235-249, 2005.
- [29] M. J. Black and A. Rangarajan, "On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision," *International Journal of Computer Vision*, vol. 19, pp. 57-91, 1996.
- [30] Z. Aminifard, A. Hosseini and S. Babaie-Kafaki, "Modified conjugate gradient method for solving sparse recovery problem with nonconvex penalty," *Signal Processing*, Vols. 193, 108424, 2022.
- [31] H. J. Xing, Y. J. Liu and Z. C. He, "Robust sparse coding for one-class classification based on correntropy with sufficient descent condition and conjugacy condition," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pp. 239-249, 2015.
- [16] M. R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of conjugate gradients for solving linear systems," *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, vol. 49, p. 409-436, 1952.
- [17] Z. Aminifard and S. Babaie-Kafaki, "Dai-Liao extensions of a descent hybrid nonlinear conjugate gradient method with application in signal processing," *Numerical Algorithms*, pp. 1-19, 2021.
- [18] M. Li, "A modified Hestense-Stiefel conjugate gradient method close to the memoryless BFGS quasi-Newton method," *Optimization Methods and Software*, vol. 33, pp. 336-353, 2018.
- [19] K. Amini, P. Faramarzi and N. Pirfalah, "A modified Hestenes-Stiefel conjugate gradient method with an optimal property," *Optimization Methods and Software*, vol. 34, pp. 770-782, 2019.
- [20] Y. H. Dai and L. Z. Liao, "New conjugacy conditions and related nonlinear conjugate gradient methods," *Applied Mathematics and optimization*, vol. 43, pp. 87-101, 2001.
- [21] K. Sugiki, Y. Narushima and H. Yabe, "Globally convergent three-term conjugate gradient methods that use secant conditions and generate descent search directions for unconstrained optimization," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 153, pp. 733-757, 2012.
- [22] W. Sun and Y. X. Yuan, *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*, Springer Science & Business Media, 2006.

- and logarithmic penalty function," *Pattern Recognition*, vol. 111, p. 107685, 2021.
- [32] I. Selesnick, and M. Farshchian, "Sparse signal approximation via nonseparable regularization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, pp. 2561-2575, 2017.
- [33] N. I. Gould, D. Orban and P. L. Toint, "CUTEr and SifDec: A constrained and unconstrained testing environment, revisited," *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 29, pp. 373-394, 2003.
- [34] Z. Aminifard and S. Babaie-Kafaki, "Matrix analyses on the Dai-Liao conjugate gradient method," *The ANZIAM Journal*, vol. 61, pp. 195-203, 2019.
- [35] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [36] W. W. Hager and H. Zhang, "Algorithm 851: CG_DESCENT, a conjugate gradient method with guaranteed descent," *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 32, pp. 113-137, 2006.
- [37] E. D. Dolan and J. J. Moré, "Benchmarking optimization software with performance profiles," *Mathematical programming*, vol. 91, pp. 201-213, 2002.

