

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره چهل و هشتم، تیر و مرداد ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

گراف‌های مضاعف و مضاعف قوی و شاخص‌های توپولوژیک آن‌ها

مهديه آذری^۱، فرزانه فلاحتی نژاد^۲

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد کازرون، دانشگاه آزاد اسلامی، کازرون، ایران

^(۲) گروه ریاضی، واحد صفادشت، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۱۶

چکیده

فرض کنید G یک گراف همبند ساده با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. گراف مضاعف گراف G از دو نسخه‌ی مجزای $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ از G با افزودن یال‌های $x_i y_j$ و $x_i y_i$ به‌ازای هر یال $v_i v_j$ از گراف G ساخته می‌شود و گراف مضاعف قوی گراف G از نسخه‌های X و Y با اتصال هر رأس x_i به رأس y_i و تمام رئوس مجاور با y_i برای هر $1 \leq i \leq n$ حاصل می‌شود. شاخص توپولوژیک گراف G یک عدد حقیقی $TI(G)$ است با این ویژگی که برای هر گراف H یکرخت با G ، $TI(H) = TI(G)$. شاخص‌های توپولوژیک ابزارهای مفیدی در پیشگویی خواص فیزیکی-شیمیایی، بیولوژیکی و دارویی ترکیبات شیمیایی محسوب می‌شوند و در توسعه‌ی روابط کمی ساختار-فعالیت و ساختار-ویژگی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله به مطالعه‌ی برخی از شاخص‌های توپولوژیک مبتنی بر فاصله از جمله هم‌شاخص همبندی وضعیت اول و دوم، نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی-هندسی، نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص اتصال پیوند اتم، شاخص سگد، شاخص سگد وزن دار و شاخص سگد اصلاح شده‌ی گراف‌های مضاعف و گراف‌های مضاعف قوی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: شاخص توپولوژیک، فاصله در گراف، گراف‌های مرکب.

۱- مقدمه

در این مقاله، تمام گراف‌های مورد مطالعه، متناهی، همبند و ساده فرض می‌شوند. فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. دو رأس متمایز u و v در گراف G را مجاور^۱ گوییم هرگاه بین آن‌ها یالی موجود باشد. تعداد رأس‌های مجاور با رأس u در گراف G را درجه‌ی^۲ رأس u نامیده و با نماد $d_G(u)$ نشان می‌دهیم. فاصله‌ی^۳ بین دو رأس، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو رأس در گراف می‌باشد. فاصله‌ی بین دو رأس u و v در گراف G را با نماد $d_G(u, v)$ نشان می‌دهیم. وضعیت^۴ یا انتقال^۵ رأس u در گراف G با نماد $D_G(u)$ نشان داده شده و مجموع فواصل رأس u تا سایر رئوس گراف G تعریف می‌شود. به عبارت دیگر،

$$D_G(u) = \sum_{v \in V(G)} d_G(u, v).$$

بیشترین فاصله‌ی رأس u تا سایر رئوس گراف G ، خروج از مرکز^۶ رأس u نامیده شده و با $\mathcal{E}_G(u)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر،

$$\mathcal{E}_G(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u, v).$$

یک تطابق کامل^۷ در گراف G یک زیرمجموعه‌ی E از مجموعه یال‌های گراف است به طوری که هر رأس گراف دقیقاً با یک یال در E مجاور است. رأسی که با همه‌ی رئوس دیگر گراف مجاور باشد، رأس فراگیر^۸ نامیده می‌شود. به گرافی که خروج از مرکز همه‌ی رئوسش برابر با r باشد گراف r -خود مرکز^۹ گوییم. فرض کنید $e = uv$ یال بین دو رأس u و v در گراف G باشد. تعداد رئوس گراف G که فاصله‌ی آن‌ها تا رئوس u و v یکسان باشد را با نماد $n.(e|G)$ تعداد رئوس G که به رأس u نزدیک‌تر باشند تا به رأس v باشد را با نماد $n_u(e|G)$ و تعداد رئوس G که به رأس v نزدیک‌تر باشند تا به رأس u باشد را با نماد $n_v(e|G)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$n.(e|G) = |\{w \in V(G) : d_G(u, w) = d_G(v, w)\}|.$$

$$n_u(e|G) = |\{w \in V(G) : d_G(u, w) < d_G(v, w)\}|.$$

$$n_v(e|G) = |\{w \in V(G) : d_G(v, w) < d_G(u, w)\}|.$$

شاخص توپولوژیک^{۱۰} یک گراف عددی حقیقی است که به آن گراف نسبت داده شده و تحت یکرختی گراف پایا است. شاخص‌های توپولوژیک ابزارهای مفیدی در پیشگویی خواص فیزیکی-شیمیایی، بیولوژیکی و دارویی ترکیبات شیمیایی محسوب می‌شوند. شاخص‌های توپولوژیک به رده‌های مختلفی از جمله شاخص‌های مبتنی بر درجه، شاخص‌های مبتنی بر فاصله و شاخص‌های مبتنی بر طیف^{۱۱} تقسیم می‌شوند. در این قسمت به معرفی چندین شاخص توپولوژیک گراف G می‌پردازیم.

^۱ Adjacent

^۲ Degree

^۳ Distance

^۴ Status

^۵ Transmission

^۶ Eccentricity

^۷ Perfect matching

^۸ Universal vertex

^۹ r -self-centered

^{۱۰} Topological index

^{۱۱} Spectrum

شاخص وینر^{۱۲} به‌عنوان اولین شاخص توپولوژیکی یک گراف، در سال ۱۹۴۷ توسط وینر [۱] معرفی شد. شاخص وینر گراف G با نماد $W(G)$ نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d_G(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} D_G(u).$$

هم‌شاخص‌های همبندی وضعیت اول و دوم^{۱۳} گراف G توسط رامانه و همکارانش [۲] به‌صورت زیر تعریف شدند:

$$\bar{S}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (D_G(u) + D_G(v)), \bar{S}_2(G) = \sum_{uv \notin E(G)} D_G(u)D_G(v),$$

که مجموع‌ها روی همه‌ی جفت رئوس غیر مجاور گراف G بسته می‌شود.

نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی-هندسی^{۱۴} گراف G توسط قربانی و خاکی [۳] معرفی شد. این شاخص با نماد $GA_e(G)$ نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$GA_e(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{\varepsilon_G(u)\varepsilon_G(v)}}{\varepsilon_G(u) + \varepsilon_G(v)}.$$

نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص اتصال پیوند اتم^{۱۵} گراف G توسط فراهانی [۴] به‌صورت زیر معرفی شد:

$$ABC_e(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{\varepsilon_G(u) + \varepsilon_G(v) - 2}{\varepsilon_G(u)\varepsilon_G(v)}}.$$

شاخص سگد^{۱۶} گراف G در سال ۱۹۹۴ توسط گوتمان [۵] به‌صورت زیر معرفی شد:

$$SZ(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e|G)n_v(e|G).$$

شاخص سگد در زمینه‌ی مدل‌سازی ارتباط کمی بین ساختار مولکول با خواص فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی آن مولکول و همچنین ارتباط کمی بین ساختار مولکول با فعالیت‌های آن کاربرد فراوان دارد.

شاخص پادماکار-ایوان رأسی^{۱۷} گراف G توسط خادیکار [۶] معرفی شد. این شاخص با نماد $PI_v(G)$ نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PI_v(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} (n_u(e|G) + n_v(e|G)).$$

شاخص پادماکار-ایوان رأسی وزن دار^{۱۸} و شاخص سگد وزن دار^{۱۹} گراف G توسط ایلچ و میلوساویلچ [۷] در سال ۲۰۱۳ معرفی شدند. این شاخص‌ها به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$SZ_w(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v)) n_u(e|G)n_v(e|G),$$

$$PI_w(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v)) (n_u(e|G) + n_v(e|G)).$$

شاخص سگد اصلاح شده^{۲۰} گراف G توسط رندیک [۸] به‌صورت زیر معرفی شد:

$$SZ^*(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} \left(n_u(e|G) + \frac{n \cdot (e|G)}{2} \right) \left(n_v(e|G) + \frac{n \cdot (e|G)}{2} \right).$$

^{۱۲} Wiener index

^{۱۳} First and second status connectivity coindices

^{۱۴} Eccentric version of geometric-arithmetic index

^{۱۵} Eccentric version of atom-bond connectivity index

^{۱۶} Szeged index

^{۱۷} Vertex Padmakar-Ivan index

^{۱۸} Weighted vertex Padmakar-Ivan index

^{۱۹} Weighted Szeged index

^{۲۰} Revised Szeged index

شاخص زاگرب اول^{۲۱} گراف G توسط گوتمان و تریناجستیک [۹] معرفی شد. این شاخص با نماد $M_1(G)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

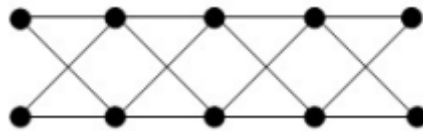
$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)^2 = \sum_{uv \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v)).$$

یکی از موضوعات مهم در نظریه‌ی شیمیایی گراف، بررسی روابط بین شاخص‌های توپولوژیک گراف‌های مرکب^{۲۲} با شاخص‌های توپولوژیک گراف‌های سازنده آن‌ها است. در این مقاله، به بررسی این نوع از ارتباطات برای دو دسته از گراف‌های مرکب به نام گراف‌های مضاعف^{۲۳} و گراف‌های مضاعف قوی^{۲۴} می‌پردازیم. خواص ریاضی این دسته از گراف‌های مرکب در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین واقع شده و مقالات متعددی در این خصوص به چاپ رسیده اند که به‌عنوان نمونه می‌توان به مقاله‌های [۱۰-۱۷] مراجعه کرد.

۲- تعاریف و پیش نیازها

در این بخش، گراف‌های مضاعف و مضاعف قوی معرفی شده و برخی خواص ریاضی آن‌ها را بررسی می‌شود.

تعریف ۱-۲: [۱۸ و ۱۹] فرض کنید G گرافی دلخواه با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. دو نسخه‌ی مجزا از گراف G (با در نظر گرفتن مجموعه یال‌های گراف G) به صورت $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ در نظر گرفته و هر رأس در نسخه‌ی اول را به تمام رئوس مجاور با رأس متناظرش در نسخه‌ی دوم متصل کنید. گراف حاصل را گراف مضاعف یا گراف دوگانه‌ی G نامیده و با نماد $\mathcal{D}[G]$ نمایش می‌دهیم. در شکل ۱ گراف مضاعف گراف مسیر با ۵ رأس نشان داده شده است.



شکل ۱: گراف مضاعف گراف مسیر با ۵ رأس.

با توجه به تعریف ۱-۲، اگر G گرافی با n رأس و m یال باشد، گراف $\mathcal{D}[G]$ دارای $2n$ رأس و $4m$ یال می‌باشد. جالب است توجه شود که گراف مضاعف گراف کامل با n رأس، در واقع گرافی است که با حذف یک تطابق کامل از گراف کامل با $2n$ رأس به دست می‌آید.

لم ۲-۲: درجه‌ی هر رأس در گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$d_{\mathcal{D}[G]}(x_i) = d_{\mathcal{D}[G]}(y_i) = 2d_G(v_i).$$

□

اثبات: مرجع [۱۸] را ببینید.

لم ۳-۲: فاصله‌ی بین هر دو رأس در گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$d_{\mathcal{D}[G]}(x_i, x_j) = d_{\mathcal{D}[G]}(y_i, y_j) = d_G(v_i, v_j),$$

$$d_{\mathcal{D}[G]}(x_i, y_j) = \begin{cases} d_G(v_i, v_j) & i \neq j, \\ 2 & i = j. \end{cases}$$

^{۲۱} First Zagreb index

^{۲۲} Composite graphs

^{۲۳} Double graphs

^{۲۴} Strong double graphs

□

اثبات: مرجع [۱۲] را ببینید.

از لم ۲-۳ نتایج زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲-۴: گراف $\mathcal{D}[G]$ در روابط زیر صدق می‌کند.

(الف) وضعیت هر رأس در گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$D_{\mathcal{D}[G]}(x_i) = D_{\mathcal{D}[G]}(y_i) = 2D_G(v_i) + 2.$$

(ب) خروج از مرکز هر رأس در گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

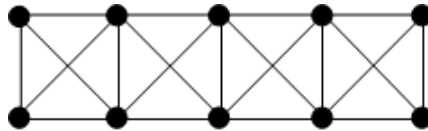
$$\varepsilon_{\mathcal{D}[G]}(x_i) = \varepsilon_{\mathcal{D}[G]}(y_i) = \begin{cases} 2 & \varepsilon_G(v_i) = 1, \\ \varepsilon_G(v_i) & \varepsilon_G(v_i) \geq 2. \end{cases}$$

(ج) برای هر $v_i v_j \in E(G)$ داریم:

$$\begin{aligned} n_{x_i}(x_i x_j | \mathcal{D}[G]) &= n_{y_i}(y_i y_j | \mathcal{D}[G]) = n_{x_i}(x_i y_j | \mathcal{D}[G]) = n_{y_i}(x_j y_i | \mathcal{D}[G]) = \\ & 2n_{v_i}(v_i v_j | G), \\ n_{x_j}(x_i x_j | \mathcal{D}[G]) &= n_{y_j}(y_i y_j | \mathcal{D}[G]) = n_{y_j}(x_i y_j | \mathcal{D}[G]) = n_{x_j}(x_j y_i | \mathcal{D}[G]) = \\ & 2n_{v_j}(v_i v_j | G), \\ n.(x_i x_j | \mathcal{D}[G]) &= n.(y_i y_j | \mathcal{D}[G]) = n.(x_i y_j | \mathcal{D}[G]) = n.(x_j y_i | \mathcal{D}[G]) = \\ & 2n.(v_i v_j | G). \end{aligned}$$

با توجه به قسمت (ب) نتیجه ۲-۴، می‌توان گفت که اگر گراف G شامل حداقل یک رأس فراگیر باشد، گراف $\mathcal{D}[G]$ ۲- خود مرکز است.

تعریف ۲-۵: [۱۸] فرض کنید G گرافی دلخواه با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. دو نسخه‌ی مجزا از گراف G (با در نظر گرفتن مجموعه یال‌های گراف G) به صورت $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ در نظر گرفته و هر رأس در نسخه‌ی اول را به رأس متناظر و تمام رئوس مجاور با رأس متناظرش در نسخه‌ی دوم متصل کنید. گراف حاصل را گراف مضاعف قوی یا گراف دوگانه‌ی قوی گراف G نامیده و با نماد $\mathcal{SD}[G]$ نمایش می‌دهیم. در شکل ۲ گراف مضاعف قوی گراف مسیر با ۵ رأس نشان داده شده است.



شکل ۲: گراف مضاعف قوی گراف مسیر با ۵ رأس.

با توجه به تعریف ۲-۵، اگر G گرافی با n رأس و m یال باشد، گراف $\mathcal{SD}[G]$ دارای $2n$ رأس و $4m + n$ یال می‌باشد.

لم ۲-۶: درجه‌ی هر رأس در گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) = d_{\mathcal{SD}[G]}(y_i) = 2d_G(v_i) + 1.$$

□

اثبات: مرجع [۱۴] را ببینید.

لم ۲-۷: فاصله‌ی بین هر دو رأس در گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i, x_j) = d_{\mathcal{SD}[G]}(y_i, y_j) = d_G(v_i, v_j),$$

$$d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i, y_j) = \begin{cases} d_G(v_i, v_j) & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

□

اثبات: مرجع [۱۴] را ببینید.

از لم ۲-۷ نتایج زیر حاصل می‌شوند.

نتیجه ۲-۸: گراف $\mathcal{SD}[G]$ در روابط زیر صدق می‌کند.

(الف) وضعیت هر رأس در گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$D_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) = D_{\mathcal{SD}[G]}(y_i) = 2D_G(v_i) + 1.$$

(ب) خروج از مرکز هر رأس در گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$\varepsilon_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) = \varepsilon_{\mathcal{SD}[G]}(y_i) = \varepsilon_G(v_i).$$

(ج) برای هر یال $v_i v_j \in E(G)$ داریم:

$$n_{x_i}(x_i x_j | \mathcal{SD}[G]) = n_{y_i}(y_i y_j | \mathcal{SD}[G]) = n_{x_i}(x_i y_j | \mathcal{SD}[G]) = n_{y_i}(x_j y_i | \mathcal{SD}[G]) =$$

$$2n_{v_i}(v_i v_j | G) - 1,$$

$$n_{x_j}(x_i x_j | \mathcal{SD}[G]) = n_{y_j}(y_i y_j | \mathcal{SD}[G]) = n_{y_j}(x_i y_j | \mathcal{SD}[G]) = n_{x_j}(x_j y_i | \mathcal{SD}[G]) =$$

$$2n_{v_j}(v_i v_j | G) - 1,$$

$$n.(x_i x_j | \mathcal{SD}[G]) = n.(y_i y_j | \mathcal{SD}[G]) = n.(x_i y_j | \mathcal{SD}[G]) = n.(x_j y_i | \mathcal{SD}[G]) =$$

$$2n.(v_i v_j | G) + 2.$$

(د) برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$n_{x_i}(x_i y_i | \mathcal{SD}[G]) = n_{y_i}(x_i y_i | \mathcal{SD}[G]) = 1, n.(x_j y_i | \mathcal{SD}[G]) = 2n - 2.$$

۳- نتایج اصلی

در این بخش، شاخص‌های توپولوژیک معرفی شده در بخش ۱ را برای گراف‌های مضاعف و گراف‌های مضاعف قوی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در سرتاسر این بخش، G گرافی با n رأس، m یال و n' رأس فراگیر فرض می‌شود. همچنین مطابق با نمادهای معرفی شده در تعاریف ۲-۱ و ۲-۵، مجموعه رئوس گراف G را به صورت $V(G) =$

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و مجموعه رئوس گراف‌های $\mathcal{D}[G]$ و $\mathcal{SD}[G]$ را به صورت

$$V(\mathcal{D}[G]) = V(\mathcal{SD}[G]) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

در نظر می‌گیریم.

۳-۱-۱ هم‌شاخص همبندی وضعیت اول

در این بخش، فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی هم‌شاخص همبندی وضعیت اول گراف‌های مضاعف و گراف‌های مضاعف قوی می‌شود.

قضیه ۳-۱: هم‌شاخص همبندی وضعیت اول گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$\bar{S}_1(\mathcal{D}[G]) = 8\bar{S}_1(G) + 8W(G) + 8n^2 - 4n - 16m.$$

اثبات: طبق تعریف هم‌شاخص همبندی وضعیت اول و تعریف ۱-۲ داریم:

$$\begin{aligned}\bar{S}_1(\mathcal{D}[G]) &= \sum_{x_i x_j \notin E(\mathcal{D}[G])} (D_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{D}[G]}(x_j)) \\ &\quad + \sum_{y_i y_j \notin E(\mathcal{D}[G])} (D_{\mathcal{D}[G]}(y_i) + D_{\mathcal{D}[G]}(y_j)) \\ &\quad + \sum_{x_i y_j \notin E(\mathcal{D}[G])} (D_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{D}[G]}(y_j)) \\ &\quad + \sum_{x_j y_i \notin E(\mathcal{D}[G])} (D_{\mathcal{D}[G]}(x_j) + D_{\mathcal{D}[G]}(y_i)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (D_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{D}[G]}(y_i)) \\ &= 4 \sum_{x_i x_j \notin E(\mathcal{D}[G])} (D_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{D}[G]}(x_j)) + \sum_{i=1}^n (D_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{D}[G]}(y_i)).\end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۴-۲ داریم:

$$\begin{aligned}\bar{S}_1(\mathcal{D}[G]) &= 4 \sum_{v_i v_j \notin E(G)} ((2D_G(v_i) + 2) + (2D_G(v_j) + 2)) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n (2D_G(v_i) + 2) \\ &= 8 \sum_{v_i v_j \notin E(G)} (D_G(v_i) + D_G(v_j)) + 2 + 4 \sum_{i=1}^n (D_G(v_i) + 1) \\ &= 8\bar{S}_1(G) + 16 \binom{n}{2} - m + 8W(G) + 4n.\end{aligned}$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۲-۳: هم‌شاخص همبندی وضعیت اول گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$\bar{S}_1(\mathcal{SD}[G]) = 8\bar{S}_1(G) + 4n(n-1) - 8m.$$

اثبات: طبق تعریف هم‌شاخص همبندی وضعیت اول و تعریف ۵-۲ داریم:

$$\begin{aligned}\bar{S}_1(\mathcal{SD}[G]) &= \sum_{x_i x_j \notin E(\mathcal{SD}[G])} (D_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{SD}[G]}(x_j)) \\ &\quad + \sum_{y_i y_j \notin E(\mathcal{SD}[G])} (D_{\mathcal{SD}[G]}(y_i) + D_{\mathcal{SD}[G]}(y_j)) \\ &\quad + \sum_{x_i y_j \notin E(\mathcal{SD}[G])} (D_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{SD}[G]}(y_j)) \\ &\quad + \sum_{x_j y_i \notin E(\mathcal{SD}[G])} (D_{\mathcal{SD}[G]}(x_j) + D_{\mathcal{SD}[G]}(y_i)) \\ &= 4 \sum_{x_i x_j \notin E(\mathcal{SD}[G])} (D_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + D_{\mathcal{SD}[G]}(x_j)).\end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۸-۲ داریم

$$\begin{aligned}\bar{S}_1(\mathcal{SD}[G]) &= 4 \sum_{v_i v_j \notin E(G)} ((2D_G(v_i) + 1) + ((2D_G(v_j) + 1))) \\ &= 8 \sum_{v_i v_j \notin E(G)} D_G(v_i) + D_G(v_j) + 1 \\ &= 8 \left(\bar{S}_1(G) + \binom{n}{2} - m \right).\end{aligned}$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

۲-۱-۳ هم‌شاخص همبندی وضعیت دوم

در این بخش، فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی هم‌شاخص همبندی وضعیت دوم گراف‌های مضاعف و گراف‌های مضاعف قوی ارائه شده است. اثبات قضیه‌ها مشابه با اثبات قضیه‌های ۱-۳ و ۲-۳ می‌باشد، لذا از بیان آنها صرف نظر می‌کنیم.

قضیه ۳-۳: هم‌شاخص همبندی وضعیت دوم گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$\bar{S}_2(\mathcal{D}[G]) = 16\bar{S}_2(G) + 16\bar{S}_1(G) + 4S_2(G) + 16W(G) + 8n^2 - 4n - 16m,$$

$$S_r(G) = \sum_{u \in V(G)} D_G(u)^r$$

قضیه ۳-۴: هم‌شاخص همبندی وضعیت دوم گراف $SD[G]$ عبارت است از:

$$\bar{S}_r(SD[G]) = 16\bar{S}_r(G) + 8\bar{S}_1(G) + 2n(n-1) - 4m.$$

۲-۳ نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی - هندسی

در این بخش، نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی - هندسی گراف‌های مضاعف و گراف‌های مضاعف قوی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳-۵: نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی - هندسی گراف $D[G]$ عبارت است از:

$$GA_e(D[G]) = 4 \left(GA_e(G) + \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \binom{n'}{2} \right).$$

اثبات: طبق تعریف نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی - هندسی و تعریف ۱-۲ داریم:

$$\begin{aligned} GA_e(D[G]) &= \sum_{x_i x_j \in E(D[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{D[G]}(x_i) \varepsilon_{D[G]}(x_j)}}{\varepsilon_{D[G]}(x_i) + \varepsilon_{D[G]}(x_j)} + \sum_{y_i y_j \in E(D[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{D[G]}(y_i) \varepsilon_{D[G]}(y_j)}}{\varepsilon_{D[G]}(y_i) + \varepsilon_{D[G]}(y_j)} \\ &+ \sum_{y_i y_j \in E(D[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{D[G]}(y_i) \varepsilon_{D[G]}(y_j)}}{\varepsilon_{D[G]}(y_i) + \varepsilon_{D[G]}(y_j)} + \sum_{x_i y_j \in E(D[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{D[G]}(x_i) \varepsilon_{D[G]}(y_j)}}{\varepsilon_{D[G]}(x_i) + \varepsilon_{D[G]}(y_j)} \\ &+ \sum_{x_j y_i \in E(D[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{D[G]}(x_j) \varepsilon_{D[G]}(y_i)}}{\varepsilon_{D[G]}(x_j) + \varepsilon_{D[G]}(y_i)} \\ &= 4 \sum_{x_i x_j \in E(D[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{D[G]}(x_i) \varepsilon_{D[G]}(x_j)}}{\varepsilon_{D[G]}(x_i) + \varepsilon_{D[G]}(x_j)}. \end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۲-۴ داریم:

$$\begin{aligned} GA_e(D[G]) &= 4 \left[\sum_{\substack{v_i v_j \in E(G): \\ \varepsilon_G(v_i) = \varepsilon_G(v_j) = 1}} \frac{2\sqrt{2 \times 2}}{2+2} + \sum_{\substack{v_i v_j \in E(G): \\ \varepsilon_G(v_i) = 1, \varepsilon_G(v_j) = 2}} \frac{2\sqrt{2 \times 2}}{2+2} \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{v_i v_j \in E(G): \\ \varepsilon_G(v_i), \varepsilon_G(v_j) \geq 2}} \frac{2\sqrt{\varepsilon_G(v_i) \varepsilon_G(v_j)}}{\varepsilon_G(v_i) + \varepsilon_G(v_j)} \right] + \sum_{\substack{v_i v_j \in E(G): \\ \varepsilon_G(v_i) = 1, \varepsilon_G(v_j) = 2}} \left(\frac{2\sqrt{2 \times 2}}{2+2} - \frac{2\sqrt{1 \times 2}}{1+2} \right) \\ &= 4 \left[\sum_{\substack{v_i v_j \in E(G): \\ \varepsilon_G(v_i) = \varepsilon_G(v_j) = 1}} \left(\frac{2\sqrt{2 \times 2}}{2+2} - \frac{2\sqrt{1 \times 1}}{1+1} \right) + \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{2\sqrt{\varepsilon_G(v_i) \varepsilon_G(v_j)}}{\varepsilon_G(v_i) + \varepsilon_G(v_j)} \right] \\ &= 4 \left(\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \binom{n'}{2} + GA_e(G) \right). \end{aligned}$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

از قضیه ۳-۵ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۳-۶: اگر گراف G شامل رئوس فراگیر باشد، آنگاه

$$GA_e(D[G]) = 4m,$$

در غیر این صورت،

$$GA_e(D[G]) = 4GA_e(G).$$

قضیه ۳-۷: نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی- هندسی گراف $SD[G]$ عبارت است از:

$$GA_e(SD[G]) = 4GA_e(G) + n.$$

اثبات: طبق تعریف نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص حسابی- هندسی و تعریف ۲-۵ داریم:

$$\begin{aligned} GA_e(SD[G]) &= \sum_{x_i x_j \in E(SD[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) \varepsilon_{SD[G]}(x_j)}}{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) + \varepsilon_{SD[G]}(x_j)} \\ &+ \sum_{y_i y_j \in E(SD[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{SD[G]}(y_i) \varepsilon_{SD[G]}(y_j)}}{\varepsilon_{SD[G]}(y_i) + \varepsilon_{SD[G]}(y_j)} \\ &+ \sum_{x_i y_j \in E(SD[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) \varepsilon_{SD[G]}(y_j)}}{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) + \varepsilon_{SD[G]}(y_j)} \\ &+ \sum_{x_j y_i \in E(SD[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{SD[G]}(x_j) \varepsilon_{SD[G]}(y_i)}}{\varepsilon_{SD[G]}(x_j) + \varepsilon_{SD[G]}(y_i)} \\ &+ \sum_{x_i y_i \in E(SD[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) \varepsilon_{SD[G]}(y_i)}}{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) + \varepsilon_{SD[G]}(y_i)} \\ &= 4 \sum_{x_i x_j \in E(SD[G])} \frac{\sqrt{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) \varepsilon_{SD[G]}(x_j)}}{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) + \varepsilon_{SD[G]}(x_j)} + \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) \varepsilon_{SD[G]}(y_i)}}{\varepsilon_{SD[G]}(x_i) + \varepsilon_{SD[G]}(y_i)}. \end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۲-۸ داریم:

$$GA_e(SD[G]) = 4 \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{\sqrt{\varepsilon_G(v_i) \varepsilon_G(v_j)}}{\varepsilon_G(v_i) + \varepsilon_G(v_j)} + \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\varepsilon_G(v_i)^2}}{2\varepsilon_G(v_i)} = 4GA_e(G) + n.$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

۳-۳ نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص اتصال پیوند اتم

در قضیه‌ی بعد، فرمولی برای محاسبه‌ی نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص اتصال پیوند اتم گراف مضاعف ارائه شده است. این قضیه را می‌توان مشابه با قضیه‌ی ۳-۵ ثابت کرد. لذا از بیان اثبات صرف نظر می‌کنیم.

قضیه ۳-۸: نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص اتصال پیوند اتم گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$ABC_e(\mathcal{D}[G]) = 4ABC_e(G) + 2\sqrt{2} \binom{n'}{2}.$$

از قضیه ۳-۸ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۳-۹: اگر گراف G شامل رئوس فراگیر باشد، آنگاه

$$ABC_e(\mathcal{D}[G]) = 2\sqrt{2}m,$$

در غیر این صورت،

$$ABC_e(\mathcal{D}[G]) = 4ABC_e(G).$$

در قضیه‌ی بعد، فرمولی برای محاسبه‌ی نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص اتصال پیوند اتم گراف مضاعف قوی ارائه شده است که با توجه به مشابهت اثبات این قضیه با قضیه‌ی ۳-۷ از بیان اثبات صرف نظر می‌کنیم.

قضیه ۳-۱۰: نسخه‌ی خروج از مرکز شاخص اتصال پیوند اتم گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$ABC_e(\mathcal{SD}[G]) = \wp ABC_e(G) + \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\varepsilon_G(v_i) - 1}}{\varepsilon_G(v_i)}.$$

۳-۴ شاخص سگد

در این بخش، شاخص سگد گراف‌های مضاعف و مضاعف قوی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۳-۱۱: شاخص سگد گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$Sz(\mathcal{D}[G]) = 16Sz(G).$$

اثبات: طبق تعریف شاخص سگد و تعریف ۱-۲ داریم:

$$\begin{aligned} Sz(\mathcal{D}[G]) &= \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{D}[G])} n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=y_i y_j \in E(\mathcal{D}[G])} n_{y_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_j \in E(\mathcal{D}[G])} n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_j y_i \in E(\mathcal{D}[G])} n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &= \wp \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{D}[G])} n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]). \end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۴-۲ داریم:

$$Sz(\mathcal{D}[G]) = \wp \sum_{e=v_i v_j \in (G)} (\wp n_{v_i}(e|G)) (\wp n_{v_j}(e|G)) = 16Sz(G).$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۳-۱۲: شاخص سگد گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$Sz(\mathcal{SD}[G]) = 16Sz(G) - 8PI_v(G) + n + \wp m.$$

اثبات: طبق تعریف شاخص سگد و تعریف ۵-۲ داریم:

$$\begin{aligned} Sz(\mathcal{SD}[G]) &= \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{SD}[G])} n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=y_i y_j \in E(\mathcal{SD}[G])} n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_j \in E(\mathcal{SD}[G])} n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_j y_i \in E(\mathcal{SD}[G])} n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_i \in E(\mathcal{SD}[G])} n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &= \wp \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{SD}[G])} n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]). \end{aligned}$$

با استفاده از نتیجه ۸-۲ داریم:

$$\begin{aligned} Sz(\mathcal{SD}[G]) &= \wp \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} (\wp n_{v_i}(e|G) - 1)(\wp n_{v_j}(e|G) - 1) + \sum_{i=1}^n (1 \times 1) \\ &= \wp (\wp Sz(G) - 2PI_v(G) + m) + n. \end{aligned}$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

۳-۵ شاخص سگد وزن دار

در این بخش، فرمولی برای محاسبه‌ی شاخص سگد وزن دار گراف‌های مضاعف و مضاعف قوی ارائه می‌شود.

قضیه ۳-۱۳: شاخص سگد وزن دار گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$Sz_w(\mathcal{D}[G]) = 32Sz_w(G).$$

اثبات: طبق تعریف شاخص سگد وزن دار و تعریف ۲-۱ داریم:

$$\begin{aligned} Sz_w(\mathcal{D}[G]) &= \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{D}[G])} (d_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{D}[G]}(x_j)) n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=y_i y_j \in E(\mathcal{D}[G])} (d_{\mathcal{D}[G]}(y_i) + d_{\mathcal{D}[G]}(y_j)) n_{y_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_j \in E(\mathcal{D}[G])} (d_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{D}[G]}(y_j)) n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_j y_i \in E(\mathcal{D}[G])} (d_{\mathcal{D}[G]}(x_j) + d_{\mathcal{D}[G]}(y_i)) n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{D}[G]) \\ &= 4 \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{D}[G])} (d_{\mathcal{D}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{D}[G]}(x_j)) n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]). \end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۲-۴ و لم ۲-۲ داریم:

$$Sz_w(\mathcal{D}[G]) = 4 \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} (2d_G(v_i) + 2d_G(v_j)) (2n_{v_i}(e|G)) (2n_{v_j}(e|G)) = 32Sz_w(G).$$

□

این اثبات را کامل می کند.

قضیه ۳-۱۴: شاخص سگد وزن دار گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} Sz_w(\mathcal{SD}[G]) &= 32(Sz_w(G) + Sz(G)) - 16(PI_w(G) + PI_v(G)) \\ &\quad + 8M_1(G) + 2n + 16m. \end{aligned}$$

اثبات: طبق تعریف شاخص سگد وزن دار و تعریف ۲-۵ داریم:

$$\begin{aligned} Sz_w(\mathcal{SD}[G]) &= \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{SD}[G])} (d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{SD}[G]}(x_j)) n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=y_i y_j \in E(\mathcal{SD}[G])} (d_{\mathcal{SD}[G]}(y_i) + d_{\mathcal{SD}[G]}(y_j)) n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_j \in E(\mathcal{SD}[G])} (d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{SD}[G]}(y_j)) n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_j y_i \in E(\mathcal{SD}[G])} (d_{\mathcal{SD}[G]}(x_j) + d_{\mathcal{SD}[G]}(y_i)) n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_i \in E(\mathcal{SD}[G])} (d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{SD}[G]}(y_i)) n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &= 4 \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{SD}[G])} (d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{SD}[G]}(x_j)) n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (d_{\mathcal{SD}[G]}(x_i) + d_{\mathcal{SD}[G]}(y_i)) n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]). \end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۲-۸ و لم ۲-۶ داریم:

$$\begin{aligned} Sz_w(\mathcal{SD}[G]) &= 4 \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} ((2d_G(v_i) + 1) + (2d_G(v_j) + 1)) (2n_{v_i}(e|G) - 1) (2n_{v_j}(e|G) - 1) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n (2d_G(v_i) + 1) (1 \times 1) \\ &= 4 \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} (d_G(v_i) + d_G(v_j)) n_{v_i}(e|G) n_{v_j}(e|G) \\ &\quad - 4(d_G(v_i) + d_G(v_j)) (n_{v_i}(e|G) + n_{v_j}(e|G)) + 2(d_G(v_i) + d_G(v_j)) \\ &\quad + 8n_{v_i}(e|G) n_{v_j}(e|G) - 4(n_{v_i}(e|G) + n_{v_j}(e|G)) + 2 + 2 \sum_{i=1}^n (2d_G(v_i) + 1) \\ &= 4(8Sz_w(G) - 4PI_w(G) + 2M_1(G) + 8Sz(G) - 4PI_v(G) + 2m) + 2(4m + n). \end{aligned}$$

□

این اثبات را کامل می کند.

۳-۶ شاخص سگد اصلاح شده

در این بخش، شاخص سگد اصلاح شده گراف‌های مضاعف و مضاعف قوی را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۳-۱۵: شاخص سگد اصلاح شده گراف $\mathcal{D}[G]$ عبارت است از:

$$Sz^*(\mathcal{D}[G]) = 16Sz^*(G).$$

اثبات: طبق تعریف شاخص سگد اصلاح شده و تعریف ۲-۱ داریم:

$$\begin{aligned} Sz^*(\mathcal{D}[G]) &= \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{D}[G])} \left(n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{e=y_i y_j \in E(\mathcal{D}[G])} \left(n_{y_i}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_j}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_j \in E(\mathcal{D}[G])} \left(n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_j}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{e=x_j y_i \in E(\mathcal{D}[G])} \left(n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_i}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \\ &= 4 \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{D}[G])} \left(n_{x_i}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{x_j}(e|\mathcal{D}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{D}[G])}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۲-۴ داریم:

$$Sz^*(\mathcal{D}[G]) = 4 \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} \left(\gamma n_{v_i}(e|G) + \frac{\gamma n \cdot (e|G)}{\gamma} \right) \left(\gamma n_{v_j}(e|G) + \frac{\gamma n \cdot (e|G)}{\gamma} \right) = 16Sz^*(G).$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۳-۱۶: شاخص سگد اصلاح شده گراف $\mathcal{SD}[G]$ عبارت است از:

$$Sz^*(\mathcal{SD}[G]) = 16Sz^*(G) + n^\gamma.$$

اثبات: طبق تعریف شاخص سگد اصلاح شده و تعریف ۲-۵ داریم:

$$\begin{aligned} Sz^*(\mathcal{SD}[G]) &= \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{SD}[G])} \left(n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{e=y_i y_j \in E(\mathcal{SD}[G])} \left(n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_j}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_j \in E(\mathcal{SD}[G])} \left(n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_j}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{e=x_j y_i \in E(\mathcal{SD}[G])} \left(n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{e=x_i y_i \in E(\mathcal{SD}[G])} \left(n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \\ &= 4 \sum_{e=x_i x_j \in E(\mathcal{SD}[G])} \left(n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{x_j}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(n_{x_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right) \left(n_{y_i}(e|\mathcal{SD}[G]) + \frac{n \cdot (e|\mathcal{SD}[G])}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

حال با استفاده از نتیجه ۲-۸ داریم:

$$\begin{aligned} Sz^*(\mathcal{SD}[G]) &= 4 \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} \left(\gamma n_{v_i}(e|G) - 1 + \frac{\gamma n \cdot (e|G) + \gamma}{\gamma} \right) \left(\gamma n_{v_j}(e|G) - 1 + \frac{\gamma n \cdot (e|G) + \gamma}{\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\gamma n - \gamma}{\gamma} \right)^\gamma \\ &= 16 \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} \left(n_{v_j}(e|G) + \frac{n \cdot (e|G)}{\gamma} \right) \left(n_{v_i}(e|G) + \frac{n \cdot (e|G)}{\gamma} \right) + \sum_{i=1}^n n^\gamma \\ &= 16Sz^*(G) + n^\gamma. \end{aligned}$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

فهرست منابع

- [۱] H. Wiener, "Structural determination of paraffin boiling points," J. Am. Chem. Soc., vol. ۶۹, no. ۱, pp. ۱۷-۲۰, ۱۹۴۷.
- [۲] H. S. Ramane, A. S. Yalnaik and R. Sharafadini, "Status connectivity indices and co-indices of graphs and its computation to some distance-balanced graphs," AKCE Int. J. Graphs Combin., vol. ۱۷, no. ۲۰, pp. ۹۸-۱۰۸, ۲۰۲۰.
- [۳] M. Ghorbani and A. Khaki, "A note on the fourth version of geometric arithmetic index," Optoelectron. Adv. Mat., vol. ۴, no. ۱۲, pp. ۲۲۱۲-۲۲۱۵, ۲۰۱۰.
- [۴] M. R. Farahani, "Eccentricity version of atom-bond connectivity index of benzenoid family $ABC_5(H_k)$," World Appl. Sci. J., vol. ۲۱, no. ۹, pp. ۱۲۶۰-۱۲۶۵, ۲۰۱۳.
- [۵] I. Gutman, "A formula for the Wiener number of trees and its extension to graphs containing cycles," Graph Theory Notes N. Y., vol. ۲۷, pp. ۹-۱۵, ۱۹۹۴.
- [۶] P. V. Khadikar, "On a novel structural descriptor PI," Natl. Acad. Sci. Lett. vol. ۲۳, pp. ۱۱۳-۱۱۸, ۲۰۰۰.
- [۷] A. Ilić and N. Milosavljević, "The Weighted vertex PI index," Math. Comput. Model., vol. ۵۷, pp. ۶۲۳-۶۳۱, ۲۰۱۳.
- [۸] M. Randić, "Novel molecular descriptor for structure-property studies," Chem. Phys. Lett., vol. ۲۱۱, no. ۱۰, pp. ۴۷۸-۴۸۳, ۱۹۹۳.
- [۹] I. Gutman and N. Trinajstić, "Graph theory and molecular orbitals. Total π -electron energy of alternant hydrocarbons," Chem. Phys. Lett., vol. ۱۷, no. ۴, pp. ۵۳۵-۵۳۸, ۱۹۷۲.
- [۱۰] H. Hua, "On the degree distance of some composite graphs," Bull. Aust. Math. Soc., vol. ۸۵, pp. ۱۶۴-۱۷۱, ۲۰۱۲.
- [۱۱] T. A. Chishti, H. A. Ganie and S. Pirzada, "Properties of strong double graphs," J. Discrete Math. Sci. Cryptography, vol. ۱۷, no. ۴, pp. ۳۱۱-۳۱۹, ۲۰۱۴.
- [۱۲] M. K. Jamil, "Distance-based topological indices and double graph," Iranian J. Math. Chem., vol. ۸, no. ۱, pp. ۸۳-۹۱, ۲۰۱۷.
- [۱۳] M. Imran and S. Akhter, "Degree-based topological indices of double graphs and strong double graphs," Discrete Math. Alg. Appl., vol. ۹, no. ۵, # ۱۷۵۰۰۶۶, ۲۰۱۷.
- [۱۴] N. Akhter, M. Amin, M. K. Jamil and W. Gao, "Some distance-based topological indices of strong double graphs," Asian J. Math. Appl., vol. ۲۰۱۸, # ama۰۴۷۵, ۲۰۱۸.
- [۱۵] M. Azari and F. Falahati-Nezhad, "Some results on forgotten topological coindex," Iranian J. Math. Chem., vol. ۱۰, no. ۴, pp. ۳۰۷-۳۱۸, ۲۰۱۹.

[۱۶] M. Azari, "Further results on Zagreb eccentricity coindices," *Discrete Math. Alg. Appl.*, vol. ۱۲, no. ۲۰, # ۲۰۵۰۰۷۵, ۲۰۲۰.

[۱۷] M. S. Sardar, I. Siddique, D. Alrowaili, M. A. Ali and S. Akhtar, "Computation of topological indices of double and strong double graphs of circumcoronene series of benzenoid (H_m)," *J. Math.*, vol. ۲۰۲۲, #۵۹۵۶۸۰۲, ۲۰۲۲.

[۱۸] E. Munarini, C. PerelliCippo, A. Scagliola and N. Zagaglia Salvi, "Double graphs," *Discrete Math.*, vol. ۳۰۸, pp. ۲۴۲–۲۵۴, ۲۰۰۸.

[۱۹] G. Indulal and A. Vijayakumar, "On a pair of equienergetic graphs," *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, vol. ۵۵, pp. ۸۳–۹۰, ۲۰۰۶.