

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال نهم، شماره چهل و چهارم، مهر و آبان ۱۴۰۲

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# توزیع وایبول-وایبول: برآورد پارامترها تحت سانسور فزاینده پیوندی سازوار نوع ۲ و پیش‌بینی واحدهای سانسور شده

علی محمد بیرانوند<sup>۱</sup>، اکرم کهن‌سال<sup>۲</sup>، رامین کاظمی<sup>۳\*</sup>، فرشین هرمزی‌نژاد<sup>۴</sup>

<sup>(۴و۱)</sup> گروه ریاضی و آمار، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

<sup>(۳و۲)</sup> گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۶

چکیده

در این مقاله، یک توزیع آماری که آن را توزیع وایبول-وایبول (WW) می‌نامیم، معرفی می‌شود. به‌طور معمول، تحت سانسور فزاینده پیوندی سازوار نوع ۲، پارامترهای توزیع به روش‌های کلاسیک و بیزی برآورد می‌شوند. توزیع مجانبی پارامترها و بازه‌های اطمینان مجانبی معرفی می‌شوند. علاوه بر این، دو بازه اطمینان بوت‌استرپ ارائه می‌شوند. برآورد بیزی پارامترها با استفاده از الگوریتم زنجیر مارکوفی مونت کارلویی (MCMC) و روش لیندلی به دلیل عدم وجود فرم بسته تقریب زده می‌شوند. علاوه بر این، بازه اطمینان باورمندی (HPD) پارامترها به‌دست آمده است. سپس، با استفاده از چند روش، واحدهای سانسور شده پیش‌بینی می‌شوند. سرانجام، یک مجموعه داده واقعی تحلیل شده و برآوردهای مختلف پیشنهادی توسط مطالعات شبیه‌سازی مقایسه می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع وایبول-وایبول، نمونه سانسور شده، برآورد، الگوریتم EM، الگوریتم MCMC، واحد سانسور شده.

## ۱ مقدمه

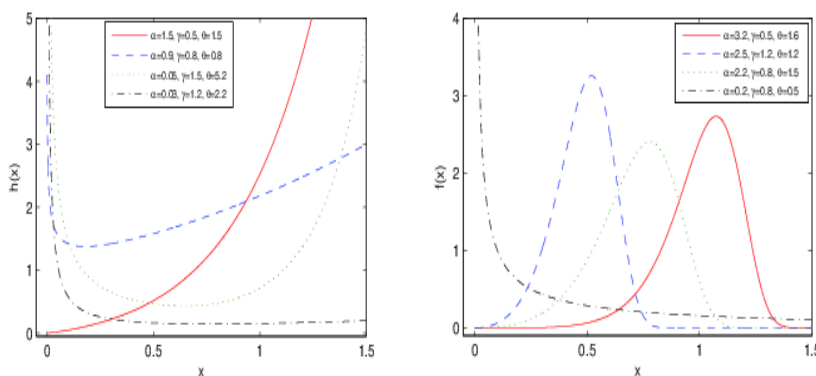
در میان طرح‌های مختلف سانسور، طرح‌های نوع ۱ و نوع ۲ از اساسی‌ترین آنها هستند. این طرح‌ها به ترتیب در یک زمان از پیش تعیین شده و در تعداد شکست از قبل انتخاب شده، به پایان می‌رسد. طرح سانسور پیوندی با آمیخته کردن طرح‌های نوع ۱ و نوع ۲ به دست می‌آید [۵] و آزمایش طول عمر را در زمان  $T^* = \min\{X_{m:n}, T\}$  به پایان می‌رساند، جایی که  $X_{m:n}$  زمان  $m$ -امین شکست در  $n$  آزمایش است و  $T$  یک زمان ثابت از پیش تعیین شده است. چون هیچ یک از طرح‌های فوق اجازه حذف واحدهای فعال را در طول آزمایش ندارند، طرح سانسور فزاینده معرفی می‌شود. با ترکیب طرح‌های نوع ۲ و فزاینده، طرح سانسور فزاینده نوع ۲ به دست می‌آید. همچنین، ترکیب طرح‌های فزاینده و پیوندی منجر به طرح فزاینده پیوندی می‌شود. طرح فزاینده پیوندی نوع ۲ که توسط کاندو و چان [۵] معرفی شد به شرح زیر توصیف می‌شود. فرض کنید  $N$  واحد یکسان تحت طرح سانسور فزاینده  $(R_1, \dots, R_n)$  و نیز تحت زمان توقفی مانند زمان  $T^* = \min\{X_{n:n:N}, T\}$  در یک آزمایش طول عمر وارد شوند جایی که  $X_{1:n:N} \leq \dots \leq X_{n:n:N}$  از یک طرح سانسور فزاینده و  $T > 0$  مقدار ثابت از پیش تعیین شده‌ای است. بدیهی است که زمان توقف آزمایش برابر  $X_{n:n:N}$  می‌شود اگر  $X_{n:n:N} < T$  و یا برابر مقدار ثابت و از قبل تعیین شده  $T$  می‌شود اگر  $X_{J:n:N} < T < X_{J+1:n:N}$  باشد. در حالت اول تعداد شکست‌ها برابر  $n$  و در حالت دوم برابر  $J$  است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در این طرح، اندازه نمونه تصادفی است احتمال رخداد تعداد کمی از واحدها بسیار محتمل است و بنابراین، در بسیاری از شرایط عملی، استنباط آماری امکان‌پذیر نیست. در

نتیجه، یک طرح سانسور جدید توسط نگ و همکاران [۱۵] معرفی شده است که به عنوان طرح سانسور فزاینده پیوندی سازوار شناخته می‌شود. طرح سانسور فزاینده پیوندی سازوار نوع ۲ (AT-II HPC) را می‌توان به شرح زیر توصیف کرد: فرض کنید  $X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}$  یک نمونه سانسور فزاینده و  $T > 0$  ثابت باشد. بدیهی است که زمان توقف آزمایش برابر  $X_{n:n:N}$  می‌شود اگر  $X_{n:n:N} < T$  و در این صورت یک نمونه سانسور فزاینده نوع ۲ با طرح سانسور فزاینده  $R_1, \dots, R_n$  رخ می‌دهد. در غیر این صورت اگر  $X_{J:n:N} < T < X_{J+1:n:N}$  به طوری که  $J + 1 < n$  با قرار دادن

$$R_{J+1} = \dots = R_{n-1} = 0, R_n = N - n - \sum_{i=1}^J R_i$$

از زمان  $J + 1$  تا  $n - 1$  امین زمان شکست، هیچ واحدی از آزمایش خارج نمی‌شود. در ادامه، یک نمونه AT-II HPC با نماد  $\{X_1, \dots, X_n\}$  تحت طرح  $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_n\}$  نشان داده می‌شود به گونه‌ای که  $X_J < T < X_{J+1}$  است. یکی از مهمترین مزایای این طرح، اطمینان از به دست آوردن تعداد ثابت  $n$  واحد طول عمر در طول آزمایش است. جامع بودن این طرح، یکی دیگر از مزایای آن است به طوری که اگر  $T = 0$  و  $T = \infty$ ، به ترتیب طرح‌های سانسور نوع ۲ و سانسور فزاینده نوع ۲ را می‌توان از آن استخراج کرد [۲]. تابع توزیع تجمعی (cdf) و تابع چگالی احتمال (pdf) مدل وایبول دو پارامتری با پارامتر شکل  $\theta$  و پارامتر مقیاس  $\gamma$  به ترتیب به صورت  $F(x) = 1 - e^{-\gamma x^\theta}$ ،  $f(x) = \gamma \theta x^{\theta-1} e^{-\gamma x^\theta}$ ،  $x > 0, \gamma, \theta > 0$ .

است. نویسندگان بسیاری توزیع وایبول و ویژگی‌های آن را بررسی کرده‌اند [۷ و ۹ و ۱۶ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۱ و ۲۲].



شکل ۱: نمودارهای pdf (چپ) و hrf (راست) از توزیع ww

وجود سه پارامتر در این توزیع باعث انعطاف‌پذیری آن می‌شود به طوری که می‌تواند از بسیاری از توزیع‌های معروف دو یا چند پارامتری عملکرد بهتری داشته باشد.

این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، برخی از نمادها را توصیف می‌کنیم که در بخش‌های دیگر مقاله استفاده می‌شوند. در بخش ۳، برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای معرفی شده‌اند. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) پارامترها با استفاده از روش نیوتن-رافسون (NR) و الگوریتم EM به دست می‌آیند. همچنین، توزیع مجانبی پارامترهای نامعلوم را ارائه می‌دهیم و بازه‌های اطمینان مجانبی را برای پارامترها به دست می‌آوریم. چون ممکن است بازه‌های اطمینان مجانبی در صورت کوچک بودن اندازه نمونه چندان عملکرد مناسبی نداشته باشد، دو بازه اطمینان بوت استرپ یعنی Boot-t و Boot-p ارائه می‌شوند. در بخش ۴، برآورد بیزی پارامترها با استفاده از تقریب لیندلی و روش MCMC هنگامی که پارامترهای  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  دارای توزیع گامای مستقل هستند، ارائه می‌شوند. بازه اطمینان باورمندی (HPD) برای پارامترهای نامعلوم در این بخش به دست آمده است. در بخش ۵، دو پیش‌بینی کننده واحدهای سانسور شده را ارائه می‌دهیم. نتایج شبیه‌سازی و تحلیل داده واقعی در بخش ۶ گزارش شده

بیشتر نسخه‌های توسعه یافته توزیع‌ها برای یکی از اهداف زیر معرفی شده‌اند: یافتن یک مدل جایگزین برای توزیع موجود که قبلاً با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است و یا پیدا کردن مدل آماری مناسبی برای توزیع تجربی داده‌ها که انعطاف‌پذیری بیشتری داشته باشد. احمد و همکاران [۱] خانواده جدیدی از توزیع‌های تک‌متغیره حاصل از متغیر تصادفی وایبول را معرفی کردند که به خانواده جدید توزیع وایبول-مشهور است. توزیع وایبول-وایبول (WW) یکی از دو زیرمدل خاص خانواده پیشنهادی است. گوییم متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع WW با پارامترهای  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  است و آن را با نماد  $X \sim WW(\alpha, \gamma, \theta)$  نشان می‌دهیم اگر تابع چگالی احتمال و توزیع توزیع تجمعی آن به ترتیب به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \alpha\theta\gamma^\alpha x^{\alpha\theta-1} e^{\alpha\gamma x^\theta} (1 + \gamma x^\theta) e^{-(\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha}, \quad (1)$$

$$F(x) = 1 - e^{-(\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha}, \quad x > 0, \alpha, \gamma, \theta > 0. \quad (2)$$

شکل ۱ نمودارهای pdf و تابع نرخ شکست (hrf) توزیع WW را برای مقادیر مختلف پارامترها نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که hrf تابعی افزایشی، ثابت و کاهشی برای مقادیر مختلف پارامترها است. از این-رو، می‌توان از توزیع WW در تحلیل بسیاری از مجموعه داده‌های واقعی استفاده کرد. همچنین،

$$+ a \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}) + 2\gamma x^\theta \\ + 2) \log x,$$

$$g_{231}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \frac{(\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha}{\gamma} (\alpha^2 \gamma^2 x^{2\theta}$$

$$\times \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 2\alpha^2 \gamma x^\theta \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 2\alpha \gamma^2 x^{2\theta} + \alpha \gamma x^\theta \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ \alpha^2 \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}) + 4\alpha \gamma x^\theta$$

$$+ \gamma x^\theta + 2\alpha) \log x,$$

$$g_{221}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \frac{1}{\gamma^2} (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha (\alpha^2 \gamma^2 x^{2\theta}$$

$$\log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 2\alpha^2 \gamma x^\theta \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 2\alpha \gamma^2 x^{2\theta} + \alpha^2 \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 4\alpha \gamma x^\theta$$

$$- \alpha \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}) + 2\alpha - 1),$$

$$g_{331}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= (\log x)^2 (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha$$

$$\times (\alpha^2 \gamma^2 x^{2\theta} \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 2\alpha^2 \gamma x^\theta \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 2\alpha \gamma^2 x^{2\theta} + \alpha \gamma x^\theta \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 4\alpha \gamma x^\theta$$

$$+ \alpha^2 \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}) + \gamma x^\theta + 2\alpha),$$

$$g_{232}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \frac{\alpha^2 (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha}{\gamma^2} (\alpha \gamma^3 x^{3\theta} + 3\alpha \gamma^2 x^{2\theta}$$

$$+ 2\gamma^2 x^{2\theta} + 3\alpha \gamma x^\theta + \gamma x^\theta + \alpha$$

$$- 1) \log x,$$

$$g_{222}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma^3} (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha (\alpha^2 \gamma^3 x^{3\theta}$$

$$+ 3\alpha^2 \gamma^2 x^{2\theta} - 3\alpha \gamma x^\theta + 3\alpha^2 \gamma x^\theta + \alpha^2$$

$$- 3\alpha + 2),$$

$$g_{332}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} (\log x)^2 (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha (\alpha^2 \gamma^3 x^{3\theta}$$

$$+ 3\alpha^2 \gamma^2 x^{2\theta} + 3\alpha \gamma^2 x^{2\theta} + 3\alpha^2 \gamma x^\theta$$

$$+ 3\alpha \gamma x^\theta + \gamma x^\theta + \alpha^2),$$

$$g_{333}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \alpha (\log x)^3 (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha$$

$$\times (\alpha^2 \gamma^3 x^{3\theta} + 3\alpha^2 \gamma^2 x^{2\theta} + 3\alpha \gamma^2 x^{2\theta}$$

است. در پایان، مقاله را در بخش ۷ نتیجه گیری می‌کنیم.

## ۲ نمادگذاری

در زیر بخش ۳.۳، از نمادگذاری زیر برای بیان مشتقات مرتبه دوم به صورت کوتاه استفاده می‌کنیم:

$$g_{11}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha (\log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}))^2,$$

$$g_{22}(x, \alpha, \gamma, \theta) = \frac{\alpha}{\gamma^2} (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha$$

$$\times (\alpha \gamma^2 x^{2\theta} + 2\alpha \gamma x^\theta + \alpha - 1),$$

$$g_{33}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \alpha (\log x)^2 (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha$$

$$\times (\alpha \gamma^2 x^{2\theta} + 2\alpha \gamma x^\theta + \gamma x^\theta + \alpha),$$

$$g_{12}(x, \alpha, \gamma, \theta) = \frac{(\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha}{\gamma} (\alpha \gamma x^\theta$$

$$\times \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}) + \alpha \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ \gamma x^\theta + 1),$$

$$g_{13}(x, \alpha, \gamma, \theta) = (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha (\alpha \gamma x^\theta$$

$$\times \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}) + \alpha \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ \gamma x^\theta + 1) \log x,$$

$$g_{23}(x, \alpha, \gamma, \theta) = \frac{\alpha (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha}{\gamma}$$

$$\times (\alpha \gamma^2 x^{2\theta} + 2\alpha \gamma x^\theta + \gamma x^\theta$$

$$+ \alpha) \log x.$$

همچنین، در زیر بخش ۴.۱، از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$g_{111}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha (\log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}))^3,$$

$$g_{121}(x, \alpha, \gamma, \theta)$$

$$= \frac{(\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})}{\gamma}$$

$$\times (\alpha \gamma x^\theta \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ \alpha \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$+ 2\gamma x^\theta + 2),$$

$$g_{131}(x, \alpha, \gamma, \theta) = (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})^\alpha$$

$$\times \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta}) (\alpha \gamma x^\theta \log (\gamma x^\theta e^{\gamma x^\theta})$$

$$- \sum_{i=1}^J R_i (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha - R_n (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha.$$

بنابراین، برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی  $\hat{\gamma}$  و  $\hat{\theta}$  را می‌توان با حل معادلات زیر به ترتیب برای  $\alpha$  و  $\gamma$  و  $\theta$  را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + n \log(\gamma) + \theta \sum_{i=1}^n \log x_i \\ &\quad + \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \log(\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^J R_i (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \log(\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta}) \\ &\quad - R_n (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha \log(\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta}) = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \gamma} &= \frac{n\alpha}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\theta}{1 + \gamma x_i^\theta} + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^\theta \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha}{\gamma} (1 + \gamma x_i^\theta) (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\ &\quad - \sum_{i=1}^J \frac{\alpha}{\gamma} R_i (1 + \gamma x_i^\theta) (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} + \alpha \sum_{i=1}^n \log x_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \gamma \log x_i \frac{x_i^\theta}{1 + \gamma x_i^\theta} \\ &\quad + \alpha \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta \log x_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \alpha \log x_i (1 + \gamma x_i^\theta) (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\ &\quad - \sum_{i=1}^J \alpha R_i \log x_i (1 \\ &\quad \quad + \gamma x_i^\theta) (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\ &\quad - \alpha R_n \log x_n (1 + \gamma x_n^\theta) (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$+ 3\alpha^2 \gamma x^\theta + 3\alpha \gamma x^\theta + \gamma x^\theta + \alpha^2).$$

### ۳ استنباط کلاسیک

#### ۱.۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

در این بخش، MLE پارامترهای نامعلوم ارائه شده است. فرض کنید  $\{X_1, \dots, X_n\}$  یک نمونه AT-II HPC از  $WW(\alpha, \gamma, \theta)$  تحت طرح  $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_n\}$  باشد. تابع درست‌نمایی پارامترها به صورت

$$L(\alpha, \gamma, \theta) \propto \prod_{i=1}^n f(x_i) \prod_{i=1}^J (1 - F(x_i))^{R_i} \times (1 - F(x_n))^{R_n},$$

است که در آن

$$R_n = N - n - \sum_{i=1}^J R_i.$$

بر اساس داده‌های مشاهده شده، با استفاده از معادلات (۱) و (۲)، تابع احتمال درست‌نمایی برابر با  $L(\text{data} | \alpha, \gamma, \theta) \propto (\alpha \theta \gamma^\alpha)^n (\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha \theta - 1} \times (1 + \gamma x_i^\theta)) e^{\alpha \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta} e^{-\sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} \times e^{-\sum_{i=1}^J R_i (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} e^{-R_n (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha}$ ,

است. بنابراین، تابع لگاریتم درست‌نمایی عبارت است از

$$\begin{aligned} \ell &:= \ell(\alpha, \gamma, \theta) \\ &= n \log(\alpha) + n \log(\theta) + \\ &\quad n \alpha \log(\gamma) + (\alpha \theta - 1) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^n \log x_i + \sum_{i=1}^n \log(1 + \gamma x_i^\theta) \quad (۳) \\ &\quad + \alpha \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta - \sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha \gamma \sum_{i=1}^N x_i^\theta - \sum_{i=1}^N (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\
 & = N \log(\alpha) + N \log(\theta) + N \alpha \log(\gamma) \\
 & + (\alpha\theta - 1) \left( \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} \log(z_{ij}) \right) \\
 & + \sum_{j=1}^{R_n} \log(z_{nj}) + \sum_{i=1}^N \log(1 + \gamma x_i^\theta) \\
 & + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} \log(1 + \gamma z_{ij}^\theta) \\
 & \quad + \sum_{j=1}^{R_n} \log(1 + \gamma z_{nj}^\theta) \\
 & + \alpha \gamma \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} z_{ij}^\theta + \sum_{j=1}^{R_n} z_{nj}^\theta \right) \\
 & - \sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\
 & \quad + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} (\gamma z_{ij}^\theta e^{\gamma z_{ij}^\theta})^\alpha \\
 & + \sum_{j=1}^{R_n} (\gamma z_{nj}^\theta e^{\gamma z_{nj}^\theta})^\alpha.
 \end{aligned}$$

در مرحله E، مقادیر  $g(z_{ij})$  را با  $\mathbb{E}(g(z_{ij}) | z_{ij} > x_i)$  جایگزین می‌کنیم تا تابع شبه لگاریتم درست‌نمایی را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
 \ell_S(\alpha, \gamma, \theta) & = N \log(\alpha) + N \log(\theta) \\
 & \quad + N \alpha \log(\gamma) \\
 & + (\alpha\theta - 1) \left( \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} \mathbb{E}(\log(z_{ij}) | z_{ij} > x_i) \right) \\
 & + \sum_{j=1}^{R_n} \mathbb{E}(\log(z_{nj}) | z_{nj} > x_n)
 \end{aligned}$$

### ۲.۳ الگوریتم EM

یک روش عددی مانند الگوریتم نیوتن-رافسون (NR) برای به‌دست آوردن ریشه‌های سه معادله غیرخطی بالا استفاده می‌شود. الگوریتم NR، که برای به‌دست آوردن MLEs پارامترهای نامعلوم استفاده می‌شود فقط برای مقدار اولیه مناسب همگراست.

چون، الگوریتم EM معرفی شده توسط دمستر و همکاران [۳] ابزاری بسیار قدرتمند برای حل یک مسئله با اطلاعات ناقص است و نیز با توجه به اینکه نمونه AT-II HPC می‌تواند به عنوان یک مدل داده ناقص بررسی شود، لذا در این بخش، از الگوریتم EM را برای استخراج MLE پارامترهای نامعلوم استفاده می‌کنیم. فرض کنیم داده‌های مشاهده شده توسط  $X = (X_1, \dots, X_n)$  و نیز  $Z_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{iR_i})$  و  $Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{nR_n})$  ترتیب داده‌های سانسور شده در زمان  $X_i$  که  $i = 1, \dots, J$  و  $X_n$  را نشان دهند، همچنین می‌توان قرار داد  $W = (X, Z)$  که در آن  $Z = (Z_1, \dots, Z_J, Z_n)$  مجموعه داده‌های کامل را تشکیل می‌دهد. تابع درست‌نمایی داده‌های کامل به صورت

$$\begin{aligned}
 L_W(\alpha, \gamma, \theta) & = \prod_{i=1}^N f(x_i) = (\alpha\theta\gamma^\alpha)^N \\
 & \times \left( \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha\theta-1} (1 + \gamma x_i^\theta) \right) \\
 & e^{\alpha\gamma \sum_{i=1}^N x_i^\theta} e^{-\sum_{i=1}^N (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha},
 \end{aligned}$$

و بنابراین، لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با

$$\begin{aligned}
 \ell_W(\alpha, \gamma, \theta) & = N \log(\alpha) + N \log(\theta) \\
 & \quad + N \alpha \log(\gamma) \\
 & + (\alpha\theta - 1) \sum_{i=1}^N \log x_i \\
 & \quad + \sum_{i=1}^N \log(1 + \gamma x_i^\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_4(K, \alpha, \gamma, \theta) &= \mathbb{E}(\log(1 + \gamma z_i^\theta) | z_i > K) \\ &= \frac{\alpha\theta\gamma^\alpha}{e^{-(\gamma K^\theta e^{\gamma K^\theta})^\alpha}} \int_K^\infty z^{\theta\alpha-1} e^{\alpha\gamma z^\theta} (1 + \gamma z^\theta) \\ &\times e^{-(\gamma z^\theta e^{\gamma z^\theta})^\alpha} \log(1 + \gamma z^\theta) dz. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \ell_5(\alpha, \gamma, \theta) &= N \log(\alpha) + N \log(\theta) + N\alpha \log(\gamma) \\ &+ (\alpha\theta - 1) \left( \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \sum_{i=1}^J R_i \xi_1(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \right. \\ &\left. + R_n \xi_1(x_n, \alpha, \gamma, \theta) \right) + \alpha\gamma \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} \mathbb{E}(z_{ij}^\theta | z_{ij} > x_i) \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{R_n} \mathbb{E}(z_{nj}^\theta | z_{nj} > x_n) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha, \gamma, \theta) + R_n \xi_2(x_n, \alpha, \gamma, \theta) \\ &- \sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha + \sum_{i=1}^J R_i \xi_3(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\ &+ R_n \xi_3(x_n, \alpha, \gamma, \theta) + \sum_{i=1}^n \log(1 + \gamma x_i^\theta) \\ &+ \sum_{i=1}^J R_i \xi_4(x_i, \alpha, \gamma, \theta) + R_n \xi_4(x_n, \alpha, \gamma, \theta). \end{aligned}$$

در مرحله M الگوریتم EM، هدف ماکسیمم کردن تابع  $\ell_5(\alpha, \gamma, \theta)$  است. برای انجام این کار، مقادیر  $\xi_1(K, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)})$ ،  $\xi_2(K, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)})$ ،  $\xi_3(K, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)})$  و  $\xi_4(K, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)})$  را که در آن  $\alpha^{(k)}$ ،  $\gamma^{(k)}$  و  $\theta^{(k)}$  برآورد  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  در مرحله k-ام است، را در روابط زیر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^N \log(1 + \gamma x_i^\theta) \\ &+ \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} \mathbb{E}(\log(1 + \gamma z_{ij}^\theta) | z_{ij} > x_i) \\ &+ \sum_{j=1}^{R_n} \mathbb{E}(\log(1 + \gamma z_{nj}^\theta) | z_{nj} > x_n) \\ &+ \alpha\gamma \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} \mathbb{E}(z_{ij}^\theta | z_{ij} > x_i) \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{R_n} \mathbb{E}(z_{nj}^\theta | z_{nj} > x_n) \right) \\ &- \sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\ &+ \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^{R_i} \mathbb{E}((\gamma z_{ij}^\theta e^{\gamma z_{ij}^\theta})^\alpha | z_{ij} > x_i) \\ &+ \sum_{j=1}^{R_n} \mathbb{E}((\gamma z_{nj}^\theta e^{\gamma z_{nj}^\theta})^\alpha | z_{nj} > x_n). \end{aligned}$$

حال، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \xi_1(K, \alpha, \gamma, \theta) &= \mathbb{E}(\log z_i | z_i > K) \\ &= \frac{\alpha\theta\gamma^\alpha}{e^{-(\gamma K^\theta e^{\gamma K^\theta})^\alpha}} \int_K^\infty \log z z^{\alpha\theta-1} e^{\alpha\gamma z^\theta} \\ &\times (1 + \gamma z^\theta) e^{-(\gamma z^\theta e^{\gamma z^\theta})^\alpha} dz, \\ &= \frac{\alpha\theta\gamma^\alpha}{e^{-(\gamma K^\theta e^{\gamma K^\theta})^\alpha}} \int_K^\infty \log z z^{\alpha\theta-1} e^{\alpha\gamma z^\theta} \\ &\times (1 + \gamma z^\theta) e^{-(\gamma z^\theta e^{\gamma z^\theta})^\alpha} dz, \\ \xi_2(K, \alpha, \gamma, \theta) &= \mathbb{E}(z_i^\theta | z_i > K) \\ &= \frac{\alpha\theta\gamma^\alpha}{e^{-(\gamma K^\theta e^{\gamma K^\theta})^\alpha}} \int_K^\infty z^{\theta(\alpha+1)-1} e^{\alpha\gamma z^\theta} \\ &\times (1 + \gamma z^\theta) e^{-(\gamma z^\theta e^{\gamma z^\theta})^\alpha} dz, \\ \xi_3(K, \alpha, \gamma, \theta) &= \mathbb{E}((\gamma z_i^\theta e^{\gamma z_i^\theta})^\alpha | z_i > K) \\ &= \frac{\alpha\theta\gamma^\alpha}{e^{-(\gamma K^\theta e^{\gamma K^\theta})^\alpha}} \int_K^\infty z^{\theta\alpha-1} e^{\alpha\gamma z^\theta} \\ &\times (1 + \gamma z^\theta) e^{-(\gamma z^\theta e^{\gamma z^\theta})^\alpha} (\gamma z^\theta e^{\gamma z^\theta})^\alpha dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +R_n \xi_2(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & -\alpha \sum_{i=1}^n \log x_i (1 + \gamma x_i^\theta) (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_3(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +R_n \xi_3(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +\gamma \sum_{i=1}^n \log x_i \frac{x_i^\theta}{1 + \gamma x_i^\theta} \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_4(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +R_n \xi_4(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +\alpha \left( \sum_{i=1}^J x_i^\theta \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right. \\
 & \left. +R_n \xi_2(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

با استفاده از یک روش عددی مانند الگوریتم NR، مقادیر  $\alpha^{(k+1)}$ ،  $\gamma^{(k+1)}$  و  $\theta^{(k+1)}$  به عنوان

ریشه‌های سه معادله غیرخطی فوق به دست می‌آید. روش تکرار در معادلات (۴)، (۵) و (۶) را می‌توان در

دستیابی به همگرایی، یعنی برقراری شرط

$$\left| \alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)} \right| + \left| \gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)} \right| + \left| \theta^{(k+1)} - \theta^{(k)} \right| < \epsilon$$

برای مقدار کوچک  $\epsilon$  خاتمه داد. این مقدار به صورت تصادفی انتخاب شده و تقریباً روی ۰/۰۵ کنترل می‌شود. همچنین، مقادیر MLE پارامترهای  $\gamma$ ،  $\alpha$  و  $\theta$ ، بر اساس روش NR را می‌توان به عنوان مقادیر اولیه در این الگوریتم در نظر گرفت.

### ۳.۳ فاصله اطمینان جانبی

در این بخش، با بدست آوردن توزیع جانبی  $\lambda = (\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\theta})$  می‌توان فواصل اطمینان جانبی را بدست آورد. اگر قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell_S}{\partial \alpha} &= \frac{N}{\alpha} + N \log(\gamma) \\
 & + \theta \left( \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^J R_i \xi_1(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right. \\
 & \left. +R_n \xi_1(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right) \\
 & +\gamma \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right. \\
 & \left. +R_n \xi_2(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right) \\
 & - \sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \log(\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta}) \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_3(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & + R_n \xi_3(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell_S}{\partial \gamma} &= \frac{N\alpha}{\gamma} + \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right. \\
 & \left. +R_n \xi_2(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right) \\
 & - \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^n (1 + \gamma x_i^\theta) (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_3(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & + R_n \xi_3(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell_S}{\partial \theta} &= \frac{N}{\theta} + \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right. \\
 & \left. +R_n \xi_2(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right) \\
 & - \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^n (1 + \gamma x_i^\theta) (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_3(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +R_n \xi_3(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\theta}{1 + \gamma x_i^\theta} \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_4(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +R_n \xi_4(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell_S}{\partial \theta} &= \frac{N}{\theta} + \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right) \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +R_n \xi_2(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell_S}{\partial \theta} &= \frac{N}{\theta} + \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i^\theta \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \right) \\
 & + \sum_{i=1}^J R_i \xi_2(x_i, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) \\
 & +R_n \xi_2(x_n, \alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}) = 0,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{13}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \quad - R_n g_{13}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{23} = & \sum_{i=1}^n \log x_i \frac{x_i^\theta}{(1 + \gamma x_i^\theta)^2} \\
 & + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^\theta \log x_i \\
 & - \sum_{i=1}^n g_{23}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \quad - \sum_{i=1}^J R_i g_{23}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - R_n g_{23}(x_n, \alpha, \gamma, \theta).
 \end{aligned}$$

قضیه ۱

فرض کنید  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$  و  $\hat{\theta}$  برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی  $\alpha$ ,  $\gamma$  و  $\theta$  باشند. بنابراین داریم:

$$[(\hat{\alpha} - \alpha), (\hat{\gamma} - \gamma), (\hat{\theta} - \theta)]^T \xrightarrow{D} N_3(0, \mathbf{I}^{-1}(\alpha, \gamma, \theta)),$$

که در آن  $\mathbf{I}(\alpha, \gamma, \theta)$  و  $\mathbf{I}^{-1}(\alpha, \gamma, \theta)$  ماتریس‌های متقارن هستند و

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\alpha, \gamma, \theta) &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ & I_{22} & I_{23} \\ & & I_{33} \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{I}^{-1}(\alpha, \gamma, \theta) &= \frac{1}{|\mathbf{I}(\alpha, \gamma, \theta)|} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \text{var}(\hat{\alpha}) & \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) & \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\theta}) \\ & \text{var}(\hat{\gamma}) & \text{cov}(\hat{\gamma}, \hat{\theta}) \\ & & \text{var}(\hat{\theta}) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{I}(\alpha, \gamma, \theta)| &= I_{11}I_{22}I_{33} + I_{12}I_{23}I_{13} \\
 & \quad + I_{13}I_{12}I_{23} \\
 & - I_{22}I_{13}^2 - I_{11}I_{23}^2 - I_{33}I_{12}^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= I_{22}I_{33} - I_{23}^2, & a_{12} \\
 & = I_{13}I_{23} - I_{12}I_{33},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\lambda) &= [I_{ij}] = \left[ -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = \\
 & -[\ell_{ij}], \quad i, j = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

ماتریس اطلاع مشاهده شده باشد، از تابع لگاریتم درست‌نمایی در معادله (۳)، داریم:

$$\begin{aligned}
 \ell_{11} &= -\frac{n}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^n g_{11}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{11}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \quad - R_n g_{11}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{22} &= -\frac{n\alpha}{\gamma^2} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^\theta}{1 + \gamma x_i^\theta} \right)^2 \\
 & \quad - \sum_{i=1}^n g_{22}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{22}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \quad - R_n g_{22}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{33} &= -\frac{n}{\theta^2} + \sum_{i=1}^n \gamma (\log x_i)^2 \frac{x_i^\theta}{(1 + \gamma x_i^\theta)^2} \\
 & + \alpha \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta (\log x_i)^2 - \sum_{i=1}^n g_{33}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{33}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \quad - R_n g_{33}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{12} &= \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n x_i^\theta - \sum_{i=1}^n g_{12}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{12}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \quad - R_n g_{12}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{13} &= \sum_{i=1}^n \log x_i + \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta \log x_i \\
 & \quad - \sum_{i=1}^n g_{13}(x_i, \alpha, \gamma, \theta)
 \end{aligned}$$

را  $WW(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\theta})$  تولید کنید و  $(\hat{\alpha}^*, \hat{\gamma}^*, \hat{\theta}^*)$  محاسبه کنید.

۳. مرحله ۲ را به تعداد  $N_{BOOT}$  بار تکرار کنید.  
۴. فرار دهید:

$$\begin{aligned} G_1^*(x_1) &= P(\hat{\alpha}^* \leq x_1), \\ G_2^*(x_2) &= P(\hat{\gamma}^* \leq x_2), \\ G_3^*(x_3) &= P(\hat{\theta}^* \leq x_3), \end{aligned}$$

به ترتیب توابع توزیع تجمعی  $\hat{\alpha}^*$ ،  $\hat{\gamma}^*$  و  $\hat{\theta}^*$  باشند. حال برای مقادیر  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$ ، تعریف کنید:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{Bp}(x_1) &= G_1^{*-1}(x_1), \\ \hat{\gamma}_{Bp}(x_2) &= G_2^{*-1}(x_2), \\ \hat{\theta}_{Bp}(x_3) &= G_3^{*-1}(x_3). \end{aligned}$$

فاصله اطمینان  $100(1-a)\%$  Boot-p برای پارامترهای  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  را می‌توان به ترتیب زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} &(\hat{\alpha}_{Bp}(\frac{a}{2}), \hat{\alpha}_{Bp}(1 - \frac{a}{2})), \\ &(\hat{\gamma}_{Bp}(\frac{a}{2}), \hat{\gamma}_{Bp}(1 - \frac{a}{2})), \\ &(\hat{\theta}_{Bp}(\frac{a}{2}), \hat{\theta}_{Bp}(1 - \frac{a}{2})). \end{aligned} \tag{۸}$$

### روش Boot-t

۱. نمونه‌های AT-II HPC  $\{x_1, \dots, x_n\}$  را تحت طرح سانسور  $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_n\}$  تولید کنید و  $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\theta})$  را محاسبه کنید.

۲. نمونه‌های AT-II HPC  $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  را تحت طرح سانسور  $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_n\}$  از توزیع  $WW(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\theta})$  تولید کنید و  $(\hat{\alpha}^*, \hat{\gamma}^*, \hat{\theta}^*)$  را محاسبه کنید. با استفاده از آنچه در بخش ۳.۳ بیان شد، مقایره‌های زیر را حساب کنید:

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{\hat{\alpha}^* - \hat{\alpha}}{\sqrt{Var(\hat{\alpha}^*)}}, \\ T_2^* &= \frac{\hat{\gamma}^* - \hat{\gamma}}{\sqrt{Var(\hat{\gamma}^*)}}, \\ T_3^* &= \frac{\hat{\theta}^* - \hat{\theta}}{\sqrt{Var(\hat{\theta}^*)}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= I_{12}I_{23} - I_{13}I_{22}, \quad a_{22} \\ &= I_{11}I_{33} - I_{13}^2, \\ a_{23} &= I_{13}I_{12} - I_{11}I_{23}, \quad a_{33} \\ &= I_{11}I_{22} - I_{12}^2. \end{aligned}$$

اثبات: طبق قضیه حد مرکزی چند متغیره و نرمال بودن برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی قضیه اثبات می‌شود.

بنابراین، اگر  $Z_a$  صدک  $100a$  ام از توزیع  $N(0,1)$  باشد، بازه‌های اطمینان  $100(1-a)\%$  برای  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  را می‌توان به ترتیب به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} &(\hat{\alpha} - z_{\frac{a}{2}}\sqrt{Var(\hat{\alpha})}, \hat{\alpha} \\ &\quad + z_{\frac{a}{2}}\sqrt{Var(\hat{\alpha})}), \\ &(\hat{\gamma} - z_{\frac{a}{2}}\sqrt{Var(\hat{\gamma})}, \hat{\gamma} \\ &\quad + z_{\frac{a}{2}}\sqrt{Var(\hat{\gamma})}), \tag{۷} \\ &(\hat{\theta} - z_{\frac{a}{2}}\sqrt{Var(\hat{\theta})}, \hat{\theta} \\ &\quad + z_{\frac{a}{2}}\sqrt{Var(\hat{\theta})}). \end{aligned}$$

### ۴.۳ بازه اطمینان بوت استرپ

وقتی اندازه نمونه کم است، فواصل اطمینان مجانبی نمی‌توانند عملکرد خیلی خوبی داشته باشند. به همین دلیل، در بیشتر موارد، فواصل اطمینان بوت استرپ پیشنهاد می‌شود. در این بخش، دو فاصله اطمینان بوت استرپ Boot-p و Boot-t که به ترتیب توسط افرون [۴] و هال [۶] پیشنهاد شده‌اند، را بررسی می‌کنیم.

### روش Boot-p

۱. نمونه‌های AT-II HPC  $\{x_1, \dots, x_n\}$  را تحت طرح سانسور  $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_n\}$  تولید کنید و  $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\theta})$  را محاسبه کنید.

۲. نمونه‌های AT-II HPC  $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  را تحت طرح سانسور  $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_n\}$  از توزیع

$$\pi_3(\theta) \propto \theta a_3^{-1} e^{-b_3 \theta}, \quad \theta, a_3, b_3 > 0.$$

۳. مرحله ۲ را به تعداد  $N_{BOOT}$  بار تکرار کنید.

۴. فرار دهید:

از معادله (۱۰) مشاهده می‌شود که برآوردگرهای بیز را نمی‌توان به فرم بسته محاسبه کرد. بنابراین، با دو روش تقریبی که عبارتند از تقریب لیندلی و الگوریتم MCMC تقریب زده می‌شوند.

$$\begin{aligned} H_1(x_1) &= P(T_1^* \leq x_1), \\ H_2(x_2) &= P(T_2^* \leq x_2), \\ H_3(x_3) &= P(T_3^* \leq x_3), \end{aligned}$$

به ترتیب توابع توزیع تجمعی  $T_1^*, T_2^*, T_3^*$  باشند. حال برای مقادیر  $x_1, x_2, x_3$  تعریف کنید:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{Bt}(x_1) &= \hat{\alpha} + H_1^{-1}(x_1) \sqrt{Var(\hat{\alpha})}, \\ \hat{\gamma}_{Bt}(x_2) &= \hat{\gamma} + H_2^{-1}(x_2) \sqrt{Var(\hat{\gamma})}, \\ \hat{\theta}_{Bt}(x_3) &= \hat{\theta} + \\ & H_3^{-1}(x_3) \sqrt{Var(\hat{\theta})}. \end{aligned}$$

فاصله اطمینان  $100(1-a)\%$  Boot-t برای پارامترهای  $\alpha, \gamma, \theta$  را می‌توان به ترتیب زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} &(\hat{\alpha}_{Bt}(\frac{a}{2}), \hat{\alpha}_{Bt}(1 - \frac{a}{2})), \\ &(\hat{\gamma}_{Bt}(\frac{a}{2}), \hat{\gamma}_{Bt}(1 - \frac{a}{2})), \\ &(\hat{\theta}_{Bt}(\frac{a}{2}), \hat{\theta}_{Bt}(1 - \frac{a}{2})). \end{aligned} \tag{۹}$$

#### ۴ استنباط بیزی

در این بخش، رویکرد بیزی برای برآورد پارامترها را بررسی می‌کنیم. برای این کار، توزیع‌های پیشین پارامترهای  $\alpha, \gamma, \theta$  را متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع گاما به صورت

$$\alpha \sim \Gamma(a_1, b_1), \quad \gamma \sim \Gamma(a_2, b_2), \quad \theta \sim \Gamma(a_3, b_3)$$

و در نظر می‌گیریم. حال براساس نمونه‌های سانسور مشاهده شده تابع چگالی پسین توام  $\alpha, \gamma, \theta$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \gamma, \theta | \text{data}) &\propto \\ L(\text{data} | \alpha, \gamma, \theta) \pi_1(\alpha) \pi_2(\gamma) \pi_3(\theta), \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \pi_1(\alpha) &\propto \alpha^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha}, \quad \alpha, a_1, b_1 > 0, \\ \pi_2(\gamma) &\propto \gamma^{a_2-1} e^{-b_2 \gamma}, \quad \gamma, a_2, b_2 > 0, \end{aligned}$$

#### ۱.۴ تقریب لیندلی

یکی از مهمترین روش‌های عددی برای تقریب برآورد بیز توسط لیندلی در [۱۴] معرفی شده است. این روش را می‌توان به شرح زیر توصیف کرد. فرض کنید  $U(\lambda)$  تابعی از مقدار پارامتر باشد. برآورد بیز  $U(\lambda)$  تحت تابع زیان مربع خطا، به صورت زیر است:

$$E(u(\lambda) | \text{data}) = \frac{\int u(\lambda) e^{Q(\lambda)} d\lambda}{\int e^{Q(\lambda)} d\lambda},$$

که در آن  $Q(\lambda) = \ell(\lambda) + \rho(\lambda)$  و  $\ell(\lambda)$  و  $\rho(\lambda)$  به ترتیب تابع لگ درست‌نمایی و لگاریتم تابع چگالی پیشین  $\lambda$  هستند. تقریب لیندلی برابر است با:

$$\begin{aligned} E(u(\lambda) | \text{data}) &= u + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (u_{ij} + 2u_i \rho_j) \sigma_{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_p \ell_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kp} u_p |_{\lambda=\hat{\lambda}}, \end{aligned}$$

که  $\lambda = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  و  $i, j, k, p = 1, \dots, m$  و  $\hat{\lambda}$  برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\lambda$  است و نیز  $u =$

$$\ell_{ijk} = u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial \theta_i}, \quad u(\lambda)$$

در ماتریس معکوس  $[-\ell_{ij}]$  است که همه این آنها در مقادیر MLE ارزیابی می‌شوند. در حالت سه پارامتری  $\lambda = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  تقریب لیندلی

به صورت ساده شده زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} E(u(\lambda) | \text{data}) &= u \\ &+ (u_1 d_1 + u_2 d_2 + u_3 d_3 + d_4 + d_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{131}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \qquad - R_n g_{131}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{231} &= \sum_{i=1}^n x_i^\theta \log x_i \\
 & \qquad - \sum_{i=1}^n g_{231}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{231}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \qquad - R_n g_{231}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{221} &= -\frac{n}{\gamma^2} - \sum_{i=1}^n g_{221}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{221}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \qquad - R_n g_{221}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{331} &= \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta (\log x_i)^2 \\
 & \qquad - \sum_{i=1}^n g_{331}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{331}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \qquad - R_n g_{331}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{232} &= -2 \sum_{i=1}^n \log x_i \frac{x_i^{2\theta}}{(1 + \gamma x_i^\theta)^3} \\
 & - \sum_{i=1}^n g_{232}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{232}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - R_n g_{232}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{222} &= \frac{2n\alpha}{\gamma^3} + 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^\theta}{1 + \gamma x_i^\theta} \right)^3 \\
 & - \sum_{i=1}^n g_{222}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{222}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - R_n g_{222}(x_n, \alpha, \gamma, \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} [A(u_1\sigma_{11} + u_2\sigma_{12} + u_3\sigma_{13}) \\
 & + B(u_1\sigma_{21} + u_2\sigma_{22} + u_3\sigma_{23}) \\
 & + C(u_1\sigma_{31} + u_2\sigma_{32} + u_3\sigma_{33})],
 \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
 d_i &= \rho_1\sigma_{i1} + \rho_2\sigma_{i2} + \rho_3\sigma_{i3}, \\
 & \qquad i = 1, 2, 3, \\
 d_4 &= u_{12}\sigma_{12} + u_{13}\sigma_{13} + u_{23}\sigma_{23}, \\
 d_5 &= \frac{1}{2}(u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + u_{33}\sigma_{33}), \\
 A &= \ell_{111}\sigma_{11} + 2\ell_{121}\sigma_{12} + 2\ell_{131}\sigma_{13} \\
 & + 2\ell_{231}\sigma_{23} + \ell_{221}\sigma_{22} + \ell_{331}\sigma_{33}, \\
 B &= \ell_{112}\sigma_{11} + 2\ell_{122}\sigma_{12} + 2\ell_{132}\sigma_{13} \\
 & + 2\ell_{232}\sigma_{23} + \ell_{222}\sigma_{22} + \ell_{332}\sigma_{33}, \\
 C &= \ell_{113}\sigma_{11} + 2\ell_{123}\sigma_{12} + 2\ell_{133}\sigma_{13} \\
 & + 2\ell_{233}\sigma_{23} + \ell_{223}\sigma_{22} + \ell_{333}\sigma_{33}.
 \end{aligned}$$

با قرار دادن  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \equiv (\alpha, \gamma, \theta)$  داریم:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \frac{a_1 - 1}{\alpha} - b_1, \\
 \rho_2 &= \frac{a_2 - 1}{\gamma} - b_2, \\
 \rho_3 &= \frac{a_3 - 1}{\theta} - b_3.
 \end{aligned}$$

همچنین،  $\sigma_{ij}$ ،  $i, j = 1, 2, 3$ ، با استفاده از  $\ell_{ij}$ ،  $i, j = 1, 2, 3$  به دست آمده است. علاوه بر این

$$\begin{aligned}
 \ell_{111} &= \frac{2n}{\alpha^3} - \sum_{i=1}^n g_{111}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{111}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \qquad - R_n g_{111}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{121} &= - \sum_{i=1}^n g_{121}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & - \sum_{i=1}^J R_i g_{121}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\
 & \qquad - R_n g_{121}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\
 \ell_{131} &= - \sum_{i=1}^n g_{131}(x_i, \alpha, \gamma, \theta)
 \end{aligned}$$

از روش زنجیر مارکوف مونت کارلو (MCMC) برای تقریب برآوردهای بیز و ساخت فاصله‌های اطمینان بیزی استفاده می‌کنیم.

### ۲.۴ الگوریتم MCMC

با استفاده از معادله (۱۰) می‌توان تابع چگالی پسین  $\alpha, \gamma$  و  $\theta$  را به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \gamma, \theta | \text{data}) &\propto L(\text{data} | \alpha, \gamma, \theta) \pi_1(\alpha) \pi_2(\gamma) \pi_3(\theta) \\ &\propto \alpha^n \gamma^{n\alpha} \theta^n \left( \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha\theta-1} (1 + \gamma x_i^\theta) \right) \\ &\times e^{\alpha\gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta} e^{-\sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} \\ &\times e^{-\sum_{i=1}^J R_i (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} e^{-R_n (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha} \\ &\times \alpha^{a_1-1} e^{-b_1\alpha} \gamma^{a_2-1} e^{-b_2\gamma} \theta^{a_3-1} e^{-b_3\theta}. \end{aligned}$$

سپس

$$\begin{aligned} \pi(\alpha | \gamma, \theta, \text{data}) &\propto \alpha^{n+a_1-1} \gamma^{n\alpha} \left( \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha\theta} \right) \\ &\times e^{-\sum_{i=1}^J R_i (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} e^{-R_n (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha}, \\ \pi(\gamma | \alpha, \theta, \text{data}) &\propto \gamma^{n\alpha+a_2-1} \left( \prod_{i=1}^n (1 + \gamma x_i^\theta) \right) \\ &\times e^{\gamma(\alpha \sum_{i=1}^n x_i^\theta - b_2)} e^{-\sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} \\ &\times e^{-\sum_{i=1}^J R_i (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} e^{-R_n (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha}, \\ \pi(\theta | \alpha, \gamma, \text{data}) &\propto \theta^{n+a_3-1} \\ &\times \left( \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha\theta-1} (1 + \gamma x_i^\theta) \right) \\ &\times e^{\gamma\alpha \sum_{i=1}^n x_i^\theta - b_3\theta} e^{-\sum_{i=1}^n (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} \\ &\times e^{-\sum_{i=1}^J R_i (\gamma x_i^\theta e^{\gamma x_i^\theta})^\alpha} e^{-R_n (\gamma x_n^\theta e^{\gamma x_n^\theta})^\alpha}. \end{aligned}$$

از روش متروپلیس-هیستینگز برای تولید نمونه‌های تصادفی با توزیع پیشنهادی نرمال استفاده می‌کنیم. بنابراین الگوریتم MCMC به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

۱. با مقدار اولیه  $(\alpha_0, \theta_0, \gamma_0)$  شروع می‌کنیم.
۲.  $t = 1$  قرار می‌دهیم.
۳. با استفاده از روش متروپلیس-هیستینگز،  $\alpha_t$  را از  $\pi(\alpha | \gamma_{t-1}, \theta_{t-1}, \text{data})$  تولید می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \ell_{332} &= - \sum_{i=1}^n (\log x_i)^2 \frac{\gamma x_i^{2\theta} - x_i^\theta}{(1 + \gamma x_i^\theta)^3} \\ &+ \alpha \sum_{i=1}^n x_i^\theta (\log x_i)^2 \\ &- \sum_{i=1}^n g_{332}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\ &- \sum_{i=1}^J R_i g_{332}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\ &- R_n g_{332}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \\ \ell_{333} &= \frac{2n}{\theta^3} - \sum_{i=1}^n \gamma (\log x_i)^3 \frac{\gamma x_i^{2\theta} - x_i^\theta}{(1 + \gamma x_i^\theta)^3} \\ &+ \alpha \gamma \sum_{i=1}^n x_i^\theta (\log x_i)^3 \\ &- \sum_{i=1}^n g_{333}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\ &- \sum_{i=1}^J R_i g_{333}(x_i, \alpha, \gamma, \theta) \\ &- R_n g_{333}(x_n, \alpha, \gamma, \theta), \end{aligned}$$

و نیز سایر  $\ell_{ijk} = 0$  می‌باشند. بنابراین، برآوردهای بیز  $\alpha, \gamma$  و  $\theta$  برابر با

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{Lin} &= \alpha + d_1 + d_5 + \frac{1}{2} [A\sigma_{11} \\ &+ B\sigma_{21} + C\sigma_{31}], \quad d_5 = \frac{1}{2} \sigma_{11}, \\ \hat{\gamma}^{Lin} &= \gamma + d_2 + d_5 + \frac{1}{2} [A\sigma_{12} \\ &+ B\sigma_{22} + C\sigma_{32}], \quad d_5 = \frac{1}{2} \sigma_{22}, \\ \hat{\theta}^{Lin} &= \theta + d_3 + d_5 + \frac{1}{2} [A\sigma_{13} \\ &+ B\sigma_{23} + C\sigma_{33}], \quad d_5 = \\ &\frac{1}{2} \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (11)$$

است. باید دقت شود که تمام پارامترها باید در مقادیر MLE خود یعنی  $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\theta})$  محاسبه شوند. ملاحظه می‌شود که به‌دست آوردن فاصله اطمینان بیزی با استفاده از تقریب لیندلی امکان پذیر نیست. بنابراین،

تحلیل بقا استفاده می‌کنند. این بخش به پیش‌بینی واحدهای سانسور شده  $Z_{ij}$ ،  $i = 1, \dots, J, n$ ،  $j = 1, \dots, R_i$  می‌پردازد. با توجه به داده‌های مشاهده شده چگالی شرطی را برای  $Z_{ij}$  به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f(z_{ij}|x, \alpha, \gamma, \theta) = j \binom{R_i}{j} \frac{f(z_{ij})}{1 - F(x_j)} \times \left( \frac{F(z_{ij}) - F(x_i)}{1 - F(x_i)} \right)^{j-1} \left( \frac{1 - F(z_{ij})}{1 - F(x_i)} \right)^{R_i-j} \quad (۱۳)$$

$$= j \binom{R_i}{j} f(z_{ij}) (F(z_{ij}) - F(x_i))^{j-1} \times (1 - F(z_{ij}))^{R_i-j} (1 - F(x_i))^{-R_i}.$$

در ادامه، از تابع شرطی فوق استفاده کرده و مشاهده  $Z_{ij}$  را پیش‌بینی می‌کنیم.

#### ۱.۵ بهترین پیش‌بینی ناریب (BUP)

بهترین پیش‌بینی ناریب (BUP) از  $Z_{ij}$  که با نشان داده می‌شود به شرح زیر است:

$$\hat{z}_{ij}^{BUP} = \int_{x_i}^{\infty} z_{ij} f(z_{ij}|x, \alpha, \gamma, \theta) dz_{ij},$$

که در آن  $f(z_{ij}|x, \alpha, \gamma, \theta)$  در رابطه (۱۳) آورده شده است. خطای  $\hat{z}_{ij}^{BUP}$  در پیش‌بینی مقدار  $Z_{ij}$ ، یعنی  $\hat{z}_{ij}^{BUP} - Z_{ij}$  دارای میانگین برابر با صفر است. همچنین، واریانس آن کوچکتر یا مساوی با هر پیش‌بینی کننده ناریب دیگری برای  $Z_{ij}$  است. با استفاده از رابطه (۱۳)، داریم:

$$\hat{z}_{ij}^{BUP} = \int_{x_i}^{\infty} z_{ij} f(z_{ij}|x, \alpha, \gamma, \theta) dz_{ij}$$

$$= j \binom{R_i}{j} \int_0^1 F^{-1}(1 - u(1 - F(x_i))) \times (1 - u)^{j-1} u^{R_i-j} du.$$

لازم به ذکر است که برای بدست آوردن معادله فوق، تغییر متغیر را به صورت  $u = \frac{1 - F(z_{ij})}{1 - F(x_i)}$  قرار می‌دهیم. همچنین، برای بدست آوردن  $\hat{z}_{ij}^{BUP}$  باید

۴. با استفاده از روش متروپلیس-هیستینگز،  $\gamma_t$  را از  $\pi(\gamma|\alpha_{t-1}, \theta_{t-1}, data)$  تولید می‌کنیم.

۵. با استفاده از روش متروپلیس-هیستینگز،  $\theta_t$  را از  $\pi(\theta|\alpha_{t-1}, \gamma_{t-1}, data)$  تولید می‌کنیم.

۶.  $t = t + 1$  قرار می‌دهیم.

۷. مراحل 3-6، T بار تکرار می‌کنیم.

با استفاده از الگوریتم بالا برآوردهای بیز  $\alpha$ ،  $\lambda$  و  $\theta$  تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\alpha}^{MC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \alpha_t,$$

$$\hat{\gamma}^{MC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \gamma_t, \quad (۱۲)$$

$$\hat{\theta}^{MC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \theta_t.$$

علاوه بر این، فاصله اطمینان HPD با ضریب  $100(1 - \alpha)\%$  از  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  را به صورت زیر محاسبه می‌شود. مقادیر  $\alpha_1, \dots, \alpha_T$  را به صورت  $\alpha_{(1)} < \dots < \alpha_{(T)}$  مرتب کرده و تمام فواصل اطمینان  $100(1 - \alpha)\%$  را برای  $\alpha$  به شرح زیر بسازید:

$$(\alpha_{(1)}, \alpha_{([T(1-a)])}), \dots, (\alpha_{([Ta]}), \alpha_{(T)}),$$

که در آن  $[T]$  بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی  $T$  را نشان می‌دهد. فاصله اطمینان HPD از  $\alpha$  کوتاهترین فاصله در بین تمام فواصل فوق است. به طور مشابه، می‌توانیم یک فواصل اطمینان HPD با ضریب  $100(1 - a)\%$  را برای  $\gamma$  و  $\theta$  بسازیم.

#### ۵ پیش‌بینی واحدهای سانسور شده

در نظریه آمار، یکی از اساسی‌ترین مسائل، پیش‌بینی مشاهدات آینده براساس اطلاعات موجود است. بسیاری از محققان از این مسئله در زمینه‌های مختلف علمی مانند مهندسی، پزشکی و تجزیه و

[http://cdec.water.ca.gov/cgiprogs/queryM  
onthly?](http://cdec.water.ca.gov/cgiprogs/queryMonthly?)

این داده‌ها، ظرفیت آب ماهیانه مخزن شستا در کالیفرنیا، در ایالات متحده است. برای تحلیل، داده‌های ماه جولای از سال ۱۹۷۶ تا سال ۲۰۱۶ را در نظر می‌گیریم. به منظور ساده کردن محاسبات، همه داده‌ها بر ظرفیت کل مخزن شستا که مقدار ۴۵۵۲۰۰ فوت است، تقسیم می‌کنیم. لازم به ذکر است که این کار تاثیری در محاسبات آماری ندارد. قبلاً، برخی از نویسندگان این مجموعه داده‌ها را مطالعه کرده‌اند، مانند کیزلاسلان و نادار [۱۰ و ۱۱]، کهن‌سال [۱۲]، کهن‌سال و شعاعی [۱۳]. در ادامه، ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان از توزیع WW برای تحلیل این مجموعه داده استفاده کرد. برای این کار، پس از برازش توزیع WW به این داده‌ها، فاصله کولموگروف اسمیرنوف (K-S) و P-مقدار مربوطه به ترتیب ۰/۰۷۰۶ و ۰/۹۷۷۹ است. از این رو، WW توزیع بسیار مناسبی برای این مجموعه داده‌ها می‌باشد. در شکل ۲، تابع توزیع تجربی و همچنین نمودار احتمال-احتمال (PP-plot) آورده شده است که مویدها را طلب بالاست.

برای تحلیل داده‌ها، یک طرح AT-II HPC به صورت  $(1^{*4}, 2^{*4}, 3, 4, 2^{*4})$  و  $T = 0/85$  در نظر گرفته شده است. حال، برای داده‌های کامل و نمونه سانسور شده، برآوردهای مختلفی از پارامترهای نامعلوم مانند MLE بر اساس روش NR و الگوریتم EM و برآورد بیزی با فرض توزیع‌های پیشین‌های غیر اطلاع‌رسان، یعنی  $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$  و  $a_3 = b_3 = 0$  از طریق تقریب لیندلی و روش MCMC محاسبه می‌کنیم.

پارامترهای نامعلوم  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  در مقادیر MLE خود محاسبه شوند.

## ۲.۵ پیش‌بینی متوسط شرطی (CMP)

پیش‌بینی متوسط شرطی (CMP)  $Z_{ij}$  که با  $\hat{Z}_{ij}^{CMP}$  نشان داده می‌شود یکی از مهمترین روش‌های پیش‌بینی است که توسط رقاب و ناگاراا ارائه شده است [۱۷]. گوییم  $\hat{Z}_{ij}^{CMP}$  پیش‌بینی متوسط شرطی  $Z_{ij}$  است اگر این مقدار، میانه تابع چگالی شرطی باشد که توسط رابطه (۱۳) ارائه شده است. بنابراین:

$$\int_{x_i}^{\hat{Z}_{ij}^{CMP}} f(z_{ij}|x, \alpha, \gamma, \theta) dz_{ij} = \frac{1}{2}.$$

حال با استفاده از تغییر متغیر  $u = \frac{1-F(z_{ij})}{1-F(x_i)}$  داریم:

$$\int_m^1 j \binom{R_i}{j} (1-u)^{j-1} u^{R_i-j} du = \frac{1}{2},$$

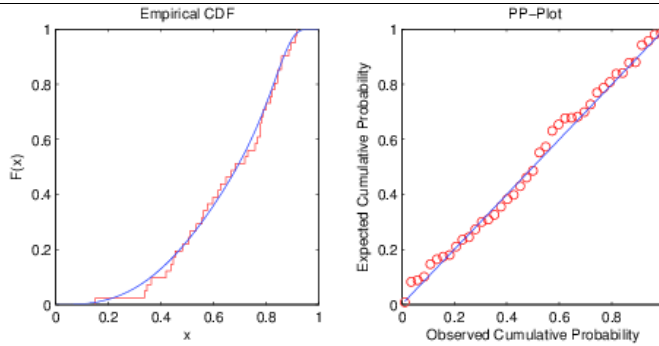
که در آن  $m = \frac{1-F(\hat{Z}_{ij}^{CMP})}{1-F(x_i)}$  میانگین توزیع بتا با پارامترهای  $R_i - j + 1$  و  $j$  است. از این رو  $\hat{Z}_{ij}^{CMP} = F^{-1}(1 - m(1 - F(x_i)))$ .

قابل توجه است که برای به دست آوردن  $\hat{Z}_{ij}^{CMP}$  باید پارامترهای نامعلوم  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  در مقادیر MLE خود محاسبه شوند.

## ۶ مطالعه شبیه‌سازی و تحلیل داده‌ها

### ۱.۶ تحلیل داده‌ها

در این بخش، یک مجموعه داده واقعی تجزیه و تحلیل می‌شود. داده‌ها از طریق لینک زیر در دسترس هستند:



شکل ۲: تابع توزیع تجربی (سمت چپ) و نمودار PP (سمت راست) برای مجموعه داده‌ها.

$$R_{2k} = 0, R_{2k-1} = \frac{2(N-n)}{n}, k = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{طرح ۳}$$

برای استخراج نتایج شبیه‌سازی، فواصل بوت استرپ در شرایط ۳۵۰ نمونه‌گیری مجدد و استنباط بیزی با در نظر گرفتن سه طرح پیشین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_j = b_j = 0, j = 1, 2, 3, & \quad \text{پیشین ۱} \\ a_j = b_j = 1, j = 1, 2, 3, & \quad \text{پیشین ۲} \\ a_j = b_j = 2, j = 1, 2, 3. & \quad \text{پیشین ۳} \end{aligned}$$

برای سه پارامتر  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$ ، بر اساس پیشین ۲، میانگین و واریانس به ترتیب ۱ و ۱ و بر اساس پیشین ۳، میانگین و واریانس به ترتیب ۱ و ۰/۵ است. از آنجا که پیشین ۳ دارای کمترین مقدار میانگین و واریانس است، بنابراین انتظار داریم که عملکرد بیزی بر اساس این چگالی پیشین بهترین باشد. برای طرح‌های مختلف سانسور و مقادیر متفاوت  $(N, n, T)$ ، برآوردهای MLE پارامترهای نامعلوم  $\alpha$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  را با استفاده از روش NR و الگوریتم EM بدست می‌آوریم. همچنین، برآورد لیندلی و MCMC بیزی را با ۱۰۰۰ تکرار، به ترتیب با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۲) بدست آورده‌ایم.

نتایج شبیه‌سازی در جداول ۳ و ۴ آمده است. بعلاوه، فواصل اطمینان مجانبی با ضریب ۰/۹۵ با استفاده از (۷)، فواصل اطمینان Boot-p با استفاده از (۸)، فواصل اطمینان Boot-t با استفاده از (۹) و فواصل اطمینان HPD برای پارامترهای نامعلوم بدست آمده است و نتایج شبیه‌سازی در جداول ۶ و ۷ آورده شده

همچنین، فواصل اطمینان مجانبی و HPD با ضریب ۰/۹۵ را بدست می‌آوریم. تمام نتایج در جدول ۱ آورده شده است. با مقایسه نتایج، ملاحظه می‌شود که فواصل اطمینان در مورد نمونه کامل، کمی کمتر از فواصل مرتبط در نمونه‌های سانسور شده است. همچنین دو روش پیش‌بینی واحدهای سانسور شده، در داده‌های واقعی فوق، پیاده‌سازی شده و نتایج در جدول ۲ آمده است. ملاحظه می‌شود که برآوردهای پیش‌بینی کننده BUP دارای عملکرد بهتری نسبت به روش پیش‌بینی CMP است.

### ۲.۶ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، مقایسه عملکرد برآوردهای مختلف نقطه‌ای و فاصله‌ای انجام شده است. برآوردهای نقطه‌ای را بر اساس میانگین مربعات خطا (MSE) و برآوردهای فاصله‌ای را بر اساس میانگین طول (AL) و درصد پوشش (CP)، مقایسه می‌کنیم. در برآوردهای نقطه‌ای، برآوردهای MLE و بیزی و در برآوردهای فاصله‌ای، فواصل اطمینان مجانبی، بوت استرپ و HPD محاسبه شده‌اند. در همه موارد، از سه طرح سانسور به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$R_1 = \dots = R_n = \frac{N-n}{n}, \quad \text{طرح ۱}$$

$$R_{2k-1} = 0, R_{2k} = \frac{2(N-n)}{n}, k = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{طرح ۲}$$



سازوار نوع ۲ مطالعه کردیم. توزیع WW که اخیراً معرفی شده دارای سه پارامتر است و همین موضوع باعث انعطاف‌پذیری آن شده است، به طوری که در بسیاری از داده‌های واقعی عملکرد بسیار خوبی دارد. در این مقاله، در مورد برخی از برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای از پارامترها به دست آمده است. برای این منظور، برآوردهای MLE، بیز، فواصل اطمینان مجانبی، بوت استرپ و HPD محاسبه شده است. علاوه بر این، برای واحدهای سانسور شده چند پیش‌بینی کننده ارائه می‌شود.

یک مجموعه داده واقعی برای بررسی روش‌های تئوری، تجزیه و تحلیل شده و عملکرد روش‌های مختلف توسط شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه شده است. از نتایج شبیه‌سازی، مشاهده می‌شود که MSEهای برآوردهای مختلف نزدیک به هم هستند. همچنین، برآوردهای MLE و بیزی به ترتیب بدترین و بهترین عملکرد را دارند. علاوه بر این، با مقایسه برآوردهای بیز، ملاحظه می‌شود که توابع چگالی پیشین اطلاع‌رسان، عملکرد بهتری نسبت به سایرین دارند. همچنین، عملکرد الگوریتم MCMC به طور کلی بهتر از تقریب لیندلی است. علاوه بر این، با مقایسه فواصل اطمینان مختلف، مشاهده می‌شود که فواصل بوت استرپ و HPD به ترتیب بیشترین و کمترین طول متوسط را دارند. همچنین، فواصل مجانبی دومین فواصل برتر هستند و فواصل Boot-p عملکرد بهتری نسبت به فواصل Boot-t دارند.

است. از جداول ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که مقادیر متوسط و MSE برآوردهای مختلف به هم نزدیک هستند. مقادیر MLE براساس روش NR و برآورد بیزی به ترتیب بدترین و بهترین عملکرد را دارند. مقایسه برآوردهای بیز نشان می‌دهد عملکرد برآورد بیز براساس تابع چگالی پیشین ۳، بهترین است. همچنین، برآوردهای بیزی بر اساس روش MCMC عملکرد بهتری نسبت به تقریب لیندلی، دارند. به عنوان یک نتیجه کلی، ملاحظه می‌شود که با افزایش  $n$ ، در تمام موارد، مقادیر MSE برآوردهای MLE و بیز کاهش می‌یابد، زیرا با افزایش  $n$ ، داده‌های کمتری سانسور شده و لذا اطلاعات بیشتری جمع‌آوری می‌شوند. از جداول ۵ و ۶، ملاحظه می‌شود که فواصل اطمینان بوت استرپ و HPD به ترتیب بیشترین و کمترین طول متوسط را دارند و فواصل مجانبی در جایگاه دوم هستند. همچنین مشاهده می‌شود که عملکرد فواصل Boot-p بهتر از فواصل Boot-t است. علاوه بر این، مقایسه فواصل HPD نشان می‌دهد که تابع چگالی پیشین ۳ دارای بهترین عملکرد است. به عنوان یک نتیجه کلی، ملاحظه می‌شود که با افزایش  $n$ ، در تمام موارد، طول متوسط کاهش یافته و درصد پوشش مربوطه افزایش می‌یابد.

## ۷ نتیجه‌گیری

برآورد مختلفی از پارامترهای نامعلوم توزیع وایبول-وایبول تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی

جدول ۱: برآوردهای مختلف پارامترهای نامعلوم در داده‌های واقعی.

فاصله اطمینان HPD	بیز		فاصله اطمینان مجانبی	MLE		پارامتر	داده کامل
	MCMC	لیندلی		EM	NR		
(0/2609,0/3270)	۰/۲۹۲۶	۰/۲۸۱۸	(۰/۲۴۵۰,۰/۳۱۲۰)	0/2053	0/2785	$\alpha$	
(8/5769,9/9977)	۹/۲۱۱۷	۹/۸۴۶۳	(8/1863, ۵۹۹۶ ۱۰/)	۹/۱۲۱۲	9/3929	$\gamma$	
(9/8420,11/0691)	۱۰/۴۹۹۳	۹/۷۸۱۸	(7/4980, ۷۹۱۸ ۱۲/)	9/8996	10/1449	$\theta$	

(۰/۳۳۲۳, ۱/۱۲۵۶)	۰/۵۳۱۳	۰/۳۳۲۰	(0/2328, ۰۲۹۶ ۱/)	0/6017	0/6312	$\alpha$	داده سانسور شده
(۹/۷۸۰۵, ۱۱/۳۱۷۱)	۱۰/۲۲۹۸	۱۰/۳۹۰۶	(6/6903, ۱۴۴۵ ۱۴/)	10/3111	10/4174	$\gamma$	
(۱۰/۴۶۷۵, ۱۲/۹۹۸۷)	۱۱/۲۶۴۰	۱۰/۵۱۶۳	(8/4440, ۱۹۶۲ ۱۴/)	11/3010	11/3201	$\theta$	

جدول ۲: برآورد پیش‌بینی Z<sub>ij</sub> در داده‌های واقعی.

CMP	BUP	مقدار صحیح
0/۷۲۸۵	0/۷۲۹۰	0/۷۲۹۶
0/۷۶۵۳	0/۷۷۳۲	0/۷۸۱۱
0/۸۰۵۲	0/۷۹۵۶	0/۷۸۸۱
0/۷۹۳۵	0/۷۹۱۵	0/۷۶۸۵
0/۸۱۲۰	0/۸۴۱۲	0/۸۳۱۳
0/۷۹۳۵	0/۸۱۵۴	0/۸۴۳۸

جدول ۳: مقادیر متوسط (ردیف اول) و MSE (ردیف دوم) برای برآورد  $(\alpha, \gamma, \theta) = (3, 2, 2)$  تحت طرح‌های مختلف سانسور، با  $T = 0/9$ .

MCMC	لیندلی			MLE		EM	NR	پارامتر	طرح سانسور	$(n, N)$
	پیشین ۱	پیشین ۲	پیشین ۳	پیشین ۱	پیشین ۲					
2/9703	2/7893	3/1762	3/1604	2/8135	2/8135	3/1251	2/8712	برآورد $\alpha$	1	(۱۰،۲۰)
0/5512	0/8266	0/8581	1/6445	1/6570	1/7015	1/8021	1/8927	MSE		
2/1243	2/1337	2/1536	2/1301	2/1051	2/1801	2/0154	2/1446	برورد $\gamma$		
0/5093	0/5279	0/5707	0/6034	0/6225	0/6927	0/7247	0/7405	MSE		
1/8501	1/8516	2/2631	1/8926	1/9036	1/9146	1/9658	1/8509	برآورد $\theta$		
0/2531	0/2557	0/3578	0/4236	0/4398	0/4995	0/5023	0/5870	MSE		
2/9945	2/8809	3/0508	2/9870	3/1021	3/0999	3/1215	2/9364	برآورد $\alpha$	2	
0/7832	0/8632	0/9232	1/0152	1/2481	1/3242	1/3600	1/3645	MSE		
1/7940	1/9843	1/9360	1/8463	2/0210	2/0333	2/0154	2/1316	برآورد $\gamma$		
0/4960	0/5310	0/5644	0/6011	0/6339	0/6393	0/6415	0/6452	MSE		
1/8355	1/9664	1/8563	1/8090	2/0124	1/9956	2/1854	1/8745	برآورد $\theta$		
0/3021	0/3106	0/3231	0/4221	0/4646	0/5198	0/6024	0/6753	MSE		
2/9636	2/8845	2/9035	3/0239	3/0127	3/1906	3/0154	3/1545	برآورد $\alpha$	3	
0/6946	0/7216	0/7584	1/0778	1/0922	1/2458	1/3022	1/3355	MSE		
1/7770	2/1332	1/8694	1/9170	1/8946	1/7777	2/0187	2/1240	برآورد $\gamma$		
0/3456	0/4103	0/4327	0/5618	0/5687	0/5931	0/6303	0/6326	MSE		
2/2288	1/9565	2/8914	1/9133	2/1147	2/0156	1/9669	2/0343	برآورد $\theta$		
0/4830	0/5099	0/5108	0/5116	0/5564	0/6147	0/6512	0/6629	MSE		
2/8101	2/9643	2/8761	2/9784	3/1987	3/1987	2/8475	2/9505	برآورد $\alpha$	1	(۱۰،۳۰)
0/4590	0/5598	0/5801	0/7086	0/7998	1/4230	1/5087	1/6598	MSE		
1/8594	1/9862	2/1305	2/0387	1/9538	1/8689	2/1264	2/0417	برآورد $\gamma$		
0/5842	0/6290	0/6383	0/7573	0/7938	0/8515	0/8613	0/8781	MSE		
1/8757	1/9408	1/9095	2/0542	2/0515	2/1988	3/1058	2/8873	برآورد $\theta$		
0/2283	0/2629	0/2778	0/2838	0/2847	0/3009	0/3842	0/3921	MSE		
2/9666	3/1272	3/0460	3/0303	3/1590	3/1590	3/1485	2/9874	برآورد $\alpha$	2	
0/6055	0/6548	0/7538	0/9587	1/0312	1/2900	1/4521	1/5033	MSE		
2/1756	2/1105	2/1253	2/0768	2/1393	2/0913	1/9885	2/0340	برآورد $\gamma$		
0/3934	0/4776	0/5015	0/6252	0/6510	0/6747	0/7224	0/7701	MSE		
2/0963	2/1489	2/0539	2/0413	2/1243	1/9002	1/8642	2/1145	برآورد $\theta$		
0/3385	0/3570	0/3796	0/4084	0/4586	0/4701	0/5045	0/5665	MSE		
3/1423	2/8995	3/0581	3/0226	3/0425	3/1304	2/9554	2/9880	برآورد $\alpha$	3	
0/7289	0/8035	0/9748	1/5273	1/7330	1/7503	1/7602	1/7644	MSE		
1/9363	2/0415	2/1275	1/9860	2/1249	2/0931	1/9654	2/1429	برآورد $\gamma$		

0/4852	0/5609	0/5718	0/5330	0/6647	0/6874	0/7024	0/7330	MSE	برآورد $\theta$				
1/9525	2/1254	1/9207	2/0021	1/9417	1/9874	2/0154	1/9775	برآورد					
0/4778	0/4966	0/5118	0/5747	0/6325	0/7194	0/8031	0/8713	MSE					
3/0526	2/8731	3/1461	2/8400	3/0207	2/7020	3/0651	2/9244	برآورد	$\alpha$	1	(۲۰،۴۰)		
0/4056	0/4508	0/5056	0/6675	0/7599	1/0519	1/1348	1/3220	MSE	برآورد $\gamma$				
1/8226	1/8031	1/8400	1/8303	2/1282	1/8954	2/0187	1/8232	برآورد					
0/3812	0/4028	0/4147	0/4199	0/4201	0/4733	0/5024	0/5580	MSE					
1/9196	1/9654	1/8871	1/9153	1/9073	2/0626	2/0987	2/1869	برآورد	$\theta$				
0/1792	0/1849	0/2083	0/2660	0/2430	0/2820	0/3023	0/3486	MSE	برآورد $\alpha$				2
2/9143	3/1023	2/8662	2/8056	2/9246	2/9246	3/0157	2/8346	برآورد					
0/6013	0/6303	0/6360	0/7651	0/7790	0/7907	0/8015	0/8032	MSE		برآورد $\gamma$			
1/8053	1/9055	1/8549	2/0502	2/1838	1/8426	1/9547	2/1420	برآورد	$\theta$				3
0/3205	0/4680	0/4920	0/5196	0/5393	0/5459	0/5542	0/5788	MSE	برآورد $\alpha$				
1/9773	1/8599	1/9751	1/8907	1/9607	1/9623	1/8476	2/0157	برآورد		$\theta$			
0/2381	0/2660	0/2827	0/3074	0/3271	0/3307	0/3684	0/3972	MSE		برآورد $\alpha$			3
2/9184	3/1189	2/8771	2/9907	3/1586	2/9654	3/0196	3/1037	برآورد	$\gamma$				
0/6013	0/6147	0/6387	0/9307	0/9321	0/9521	0/9965	1/0225	MSE	برآورد $\theta$				
1/8307	1/9064	1/8226	1/8965	1/9635	1/8505	2/0986	1/8503	برآورد		$\alpha$			
0/3052	0/3504	0/3965	0/4551	0/4965	0/5050	0/5068	0/5370	MSE		برآورد $\theta$			
1/8770	1/8627	1/9943	1/9342	1/8843	1/8426	2/1896	1/9927	برآورد	$\alpha$				
0/3008	0/3286	0/3616	0/3561	0/3758	0/4058	0/4563	0/4856	MSE	$\theta$				

جدول ۴: مقادیر متوسط (ردیف اول) و MSE (ردیف دوم) برای برآورد  $(3, 2, 2) = (\alpha, \gamma, \theta)$  تحت طرح‌های مختلف سانسور، با  $T = 1/5$ .

MCMC			لیندلی			MLE		طرح سانسور	پارامتر	(n,N)	
پیشین ۳	پیشین ۲	پیشین ۱	پیشین ۳	پیشین ۲	پیشین ۱	EM	NR				
2/015	1/867	2/963	2/967	3/092	3/192	3/054	3/177	برآورد MS E	$\alpha$	1	(۱۰،۲۰)
8	2	4	3	3	3	2	6				
0/973	1/002	1/110	1/195	1/102	1/118	1/502	1/646				
9	2	0	0	5	4	1	0	برآورد MS E	$\gamma$		
1/828	1/817	1/912	1/954	1/909	1/864	2/145	1/946				
3	4	1	9	5	0	5	7				
0/306	0/318	0/329	0/429	0/452	0/472	0/531	0/591	برآورد MS E	$\theta$		
9	5	9	4	6	2	2	3				
1/881	1/918	1/960	1/849	1/833	1/957	2/017	1/918				
3	8	0	2	3	3	4	6	برآورد MS E	$\alpha$	2	
0/251	0/270	0/282	0/308	0/316	0/324	0/381	0/408				
6	9	3	7	9	3	4	7				
2/987	3/039	2/903	3/115	2/919	2/919	3/124	2/906	برآورد MS E	$\gamma$		
0	2	8	0	6	6	4	2				
0/751	0/789	0/802	0/920	0/971	1/017	1/206	1/239				
9	3	5	2	3	5	3	1	برآورد MS E	$\theta$		
2/144	2/137	2/129	2/105	1/875	1/904	2/054	2/103				
7	2	9	7	1	4	7	0				
0/508	0/522	0/538	0/548	0/565	0/586	0/676	0/676	برآورد MS E	$\alpha$		
4	4	3	3	0	7	0	8				
1/974	1/899	1/842	1/941	1/879	1/947	2/124	2/020				
0	8	5	1	1	0	5	6	برآورد	$\theta$		

0/251 5	0/287 9	0/292 2	0/334 5	0/353 7	0/372 3	0/453 1	0/472 8	MS E			
2/941 1	3/023 9	3/044 8	3/102 0	2/852 3	3/069 6	2/854 7	3/041 7	برآورد	$\alpha$	3	
0/820 6	0/979 4	1/217 4	1/287 8	1/453 7	1/480 7	1/602 4	1/667 1	MS E			
2/023 4	1/847 2	1/975 3	2/011 0	1/927 3	1/943 7	2/015 4	1/913 6	برآورد	$\gamma$		
0/338 0	0/353 8	0/376 3	0/435 8	0/454 7	0/486 7	0/555 5	0/591 2	MS E			
1/879 7	1/989 5	2/095 1	1/952 5	1/882 3	1/912 0	2/159 8	1/878 6	برآورد	$\theta$		
0/242 1	0/245 1	0/248 7	0/300 7	0/304 3	0/311 7	0/328 5	0/355 8	MS E			
2/847 0	1/901 0	2/916 9	3/042 7	2/829 8	2/929 8	3/015 2	2/705 5	برآورد	$\alpha$	1	
0/739 9	0/745 1	0/865 3	0/978 5	1/157 2	1/281 6	1/421 5	1/508 0	MS E			
1/800 7	1/846 1	1/894 1	2/220 3	2/247 8	1/724 8	1/925 1	1/804 4	برآورد	$\gamma$		
0/318 0	0/352 2	0/370 6	0/487 8	0/572 1	0/607 1	0/702 3	0/754 6	MS E			
1/946 2	1/960 5	1/834 5	1/842 1	2/113 2	1/815 8	2/145 1	2/134 5	برآورد	$\theta$		
0/317 7	0/329 2	0/353 2	0/460 3	0/489 4	0/500 1	0/551 4	0/600 4	MS E			
2/964 5	2/988 7	1/861 0	3/195 3	2/981 3	2/892 3	2/914 1	2/825 3	برآورد	$\alpha$	2	
0/725 0	0/847 8	0/874 0	1/020 1	1/122 4	1/233 1	1/499 5	1/544 8	MS E			
2/101 0	1/812 6	1/932 8	2/120 6	2/135 9	2/015 2	1/954 1	2/121 7	برآورد	$\gamma$		(۱۰.۳۰)
0/455 7	0/477 2	0/537 3	0/614 6	0/626 8	0/658 6	0/682 4	0/700 9	MS E			
1/954 8	1/934 8	1/955 5	1/944 0	1/914 3	1/884 7	1/845 6	1/926 2	برآورد	$\theta$		
0/256 7	0/261 3	0/271 5	0/302 8	0/337 2	0/355 2	0/366 7	0/413 7	MS E			
2/930 6	3/087 4	3/068 2	3/073 5	3/171 3	3/171 3	3/015 4	2/873 4	برآورد	$\alpha$	3	
0/802 2	0/856 4	0/883 6	1/069 7	1/136 2	1/174 3	1/322 1	1/574 3	MS E			
1/790 3	1/881 8	1/920 9	2/199 7	1/773 9	2/148 0	1/954 2	1/709 1	برآورد	$\gamma$		
0/504 6	0/521 1	0/561 2	0/613 7	0/629 1	0/632 6	0/765 1	0/865 7	MS E			
1/963 6	1/817 5	1/161 0	1/851 7	2/118 2	2/184 6	2/015 4	2/162 4	برآورد	$\theta$		
0/252 6	0/291 4	0/302 2	0/322 1	0/327 9	0/371 2	0/388 6	0/406 9	MS E			
2/066 5	2/803 5	2/844 4	3/015 8	2/897 1	2/918 7	2/954 8	3/175 2	برآورد	$\alpha$	1	
0/690 0	0/708 9	0/730 2	0/878 4	0/902 3	0/942 3	0/998 5	1/026 8	MS E			

1/823	1/834	2/095	1/948	1/908	1/951	2/135	1/891	برآورد	$\gamma$		
8	1	3	9	0	1	4	3				
0/214	0/238	0/259	0/294	0/308	0/318	0/382	0/422	MS			
8	0	0	0	2	4	9	1	E			
1/956	1/913	1/940	1/895	1/966	1/837	1/954	1/846	برآورد	$\theta$		
9	1	7	6	8	7	7	7				
0/183	0/201	0/210	0/265	0/266	0/291	0/345	0/371	MS			
4	3	5	1	2	9	1	5	E			
2/931	2/821	2/773	3/138	2/948	3/043	3/115	2/978	برآورد	$\alpha$	2	
6	5	3	3	5	5	1	5				
0/654	0/674	0/696	0/801	0/859	0/899	0/954	1/002	MS			
3	3	8	5	1	1	5	1	E			
1/822	1/995	1/901	2/147	1/951	1/945	1/965	2/114	برآورد	$\gamma$		(۲۰،۴۰)
0	4	3	4	1	5	4	1				
0/322	0/351	0/389	0/435	0/452	0/481	0/651	0/667	MS			
0	6	5	6	9	6	2	2	E			
1/935	1/864	1/934	1/958	2/013	1/933	2/015	1/912	برآورد	$\theta$		
2	4	1	3	4	3	6	4				
0/201	0/213	0/222	0/276	0/292	0/298	0/342	0/372	MS			
0	1	7	5	2	3	5	5	E			
2/825	2/961	2/844	2/827	3/015	2/919	3/015	2/960	برآورد	$\alpha$	3	
3	9	5	8	9	6	2	5				
0/653	0/659	0/674	0/886	0/905	0/912	0/995	1/029	MS			
7	2	9	7	4	6	4	5	E			
1/894	1/950	1/871	2/125	2/850	1/941	2/135	1/962	برآورد	$\gamma$		
0	3	8	8	3	1	1	5				
0/201	0/224	0/254	0/301	0/332	0/353	0/466	0/477	MS			
7	8	3	1	0	4	7	6	E			
1/933	1/960	1/955	1/867	2/111	1/879	1/926	1/823	برآورد	$\theta$		
2	1	0	5	7	2	3	2				
0/132	0/173	0/209	0/237	0/248	0/274	0/299	0/300	MS			
9	9	2	8	5	3	8	9	E			

جدول ۵: میانگین طول (AL) و درصد پوشش (CP) برای برآوردهای  $(\alpha, \gamma, \theta) = (3, 2, 2)$  تحت طرح‌های سانسور مختلف، با  $T = 0/9$

HPD						Boot-t		Boot-p		فاصله مجانبی		پارامتر	طرح سانسور	(n, N)
پیشین ۳		پیشین ۲		پیشین ۱		CP	AL	CP	AL	CP	AL			
CP	AL	CP	AL	CP	AL	CP	AL	CP	AL	CP	AL			
0/95	0/74	0/95	0/85	0/95	1/01	0/93	2/66	0/94	1/93	0/94	1/63	$\alpha$	1	
5	7	3	3	1	8	7	8	6	7	9	6			
0/95	0/70	0/95	0/83	0/95	0/93	0/93	2/50	0/94	1/94	0/94	1/78	$\gamma$		
8	2	5	1	3	4	0	8	0	3	8	9			
0/95	0/70	0/95	0/75	0/95	0/80	0/93	2/27	0/94	1/94	0/94	1/50	$\theta$		
8	6	4	4	2	7	7	1	1	6	7	3			
0/95	0/65	0/95	0/79	0/95	1/09	0/93	2/44	0/94	1/98	0/94	1/32	$\alpha$	2	(۱۰،۲۰)
5	6	1	7	0	1	4	8	2	1	8	4			
0/95	0/61	0/95	0/84	0/95	0/95	0/93	2/86	0/94	1/85	0/94	1/44	$\gamma$		
4	2	1	1	1	2	3	3	3	2	9	1			
0/95	0/63	0/95	0/84	0/95	0/92	0/93	2/59	0/94	1/93	0/95	1/33	$\theta$		
7	0	4	8	3	6	8	5	9	9	0	9			
0/95	0/91	0/95	1/00	0/94	1/03	0/93	2/36	0/94	1/99	0/94	1/70	$\alpha$	3	
2	4	0	2	9	8	5	6	2	7	6	5			

0/96	0/93	0/95	0/98	0/95	1/17	0/93	2/10	0/94	1/97	0/94	1/50	$\gamma$		
0	3	5	4	2	1	8	7	7	1	9	1	$\theta$		
0/96	0/86	0/95	0/90	0/95	0/99	0/93	2/14	0/94	2/00	0/94	1/37			
0	6	5	9	1	4	7	9	6	3	8	9			
0/95	0/76	0/95	0/85	0/95	0/98	0/93	2/64	0/94	1/91	0/94	1/66	$\alpha$	1	
7	5	4	3	0	1	7	3	2	6	8	5	$\gamma$		
0/95	0/70	0/95	0/72	0/95	0/99	0/93	2/17	0/94	1/98	0/94	1/51	$\theta$		
8	5	5	8	2	4	6	6	1	2	7	0			
0/95	0/73	0/95	0/75	0/95	0/86	0/93	2/29	0/94	1/78	0/94	1/40	$\alpha$	2	
8	2	5	4	3	6	7	7	2	2	8	8	$\gamma$		
0/95	0/65	0/95	0/89	0/95	0/95	0/93	2/31	0/94	1/97	0/94	1/59	$\theta$		
8	8	4	2	0	2	7	7	2	8	8	5			
0/95	0/78	0/95	0/80	0/95	0/85	0/93	2/56	0/94	1/76	0/94	1/40	$\alpha$	3	
8	1	4	1	2	0	5	7	1	0	8	6	$\gamma$		
0/95	0/79	0/95	0/83	0/95	0/96	0/93	2/84	0/94	1/50	0/94	1/45	$\theta$		
9	4	5	3	1	2	4	3	3	7	7	3			
0/96	0/77	0/95	0/86	0/95	1/12	0/93	2/21	0/94	1/97	0/94	1/51	$\alpha$		
0	7	5	5	3	0	7	4	2	7	9	1	$\gamma$		
0/95	0/73	0/95	0/86	0/95	0/98	0/93	2/47	0/94	1/90	0/94	1/33	$\theta$		
9	7	4	7	0	0	6	1	3	2	7	3			
0/96	0/80	0/95	0/93	0/95	1/02	0/93	2/00	0/94	1/98	0/94	1/61	$\alpha$	1	
0	5	5	3	2	3	7	0	2	1	9	2	$\gamma$		
0/96	0/53	0/95	0/64	0/95	0/71	0/93	1/96	0/94	1/65	0/95	0/84	$\theta$		
0	7	7	4	5	9	9	0	6	8	3	5			
0/96	0/58	0/95	0/63	0/95	0/69	0/94	1/89	0/94	1/60	0/95	0/83	$\alpha$	2	
2	3	9	3	8	7	0	8	5	7	5	3	$\gamma$		
0/96	0/59	0/95	0/63	0/95	0/71	0/93	1/90	0/94	1/67	0/95	0/87	$\theta$		
0	9	7	9	5	6	8	7	6	9	2	1			
0/96	0/55	0/95	0/63	0/95	0/70	0/94	1/94	0/94	1/70	0/95	0/84	$\alpha$	3	
3	3	9	2	7	9	0	8	5	1	5	9	$\gamma$		
0/96	0/54	0/96	0/67	0/95	0/75	0/94	1/91	0/94	1/63	0/95	0/87	$\theta$		
3	3	0	8	8	2	0	8	6	6	5	4			
0/96	0/54	0/95	0/65	0/95	0/70	0/93	1/95	0/94	1/49	0/95	0/86	$\alpha$		
1	2	7	1	5	5	8	8	5	4	2	5	$\gamma$		
0/96	0/60	0/95	0/64	0/95	0/68	0/93	1/86	0/94	1/24	0/95	0/72	$\theta$		
0	6	8	2	5	8	8	6	5	0	3	2			
0/96	0/64	0/96	0/68	0/95	0/76	0/93	1/88	0/94	1/46	0/95	0/80	$\alpha$	1	
3	4	0	1	7	6	9	6	6	7	5	1	$\gamma$		
0/96	0/68	0/95	0/72	0/95	0/74	0/94	1/80	0/94	1/29	0/95	0/83	$\theta$		
0	5	8	5	7	6	0	1	6	5	2	3			

(۱۰،۳۰)

(۲۰،۴۰)

جدول ۶: میانگین طول (AL) و درصد پوشش (CP) برای برآوردهای  $(\alpha, \gamma, \theta) = (3, 2, 2)$  تحت طرح‌های سانسور مختلف، با  $T = 1/5$

(n,N)	طرح سانسور	پارامتر	HPD											
			پیشین ۳		پیشین ۲		پیشین ۱		Boot-t		Boot-p		فاصله مجانبی	
			CP	AL	CP	AL	CP	AL	CP	AL	CP	AL	CP	AL
(۱۰،۲۰)	1	$\alpha$	0/95	0/83	0/95	0/86	0/95	0/95	0/93	2/15	0/94	1/97	0/94	1/50
			7	7	5	9	2	5	7	4	3	4	7	4
(۱۰،۲۰)		$\gamma$	0/95	0/89	0/95	0/96	0/95	1/00	0/93	2/19	0/94	1/98	0/94	1/55
			7	2	3	0	0	2	6	3	5	2	8	7

0/95 8	0/76 9	0/95 5	0/78 9	0/95 3	0/81 1	0/93 8	2/11 7	0/94 4	1/80 1	0/94 7	1/58 5	$\theta$	2		
0/95 7	0/85 5	0/95 5	0/81 5	0/95 2	0/97 7	0/93 8	2/55 1	0/94 5	1/85 4	0/94 9	1/71 8	$\alpha$			
0/96 0	0/82 6	0/95 3	0/85 4	0/95 3	1/06 8	0/93 7	2/37 6	0/94 4	1/95 2	0/94 8	1/69 8	$\gamma$			
0/95 7	0/75 0	0/95 5	0/80 5	0/95 2	0/89 7	0/93 8	2/53 7	0/94 5	1/96 0	0/94 8	1/79 7	$\theta$	3		
0/95 9	0/96 1	0/95 5	1/10 2	0/95 3	1/13 6	0/93 8	2/53 8	0/94 4	1/83 8	0/94 9	1/50 8	$\alpha$			
0/95 9	0/89 6	0/95 2	1/02 3	0/95 0	1/08 3	0/93 7	2/69 1	0/94 5	1/93 1	0/94 8	1/67 8	$\gamma$			
0/95 7	0/76 6	0/95 5	0/96 6	0/95 3	0/95 4	0/93 6	2/52 2	0/94 3	1/94 6	0/94 7	1/65 1	$\theta$			
0/95 5	0/64 9	0/95 0	1/01 0	0/94 9	1/17 0	0/93 7	2/16 1	0/94 1	1/94 1	0/94 5	1/65 9	$\alpha$	1		(۰.۳۰)
0/95 8	0/78 2	0/95 5	0/90 9	0/95 3	0/92 4	0/93 7	2/60 4	0/94 6	1/71 7	0/95 1	1/64 3	$\gamma$			
0/95 9	0/62 2	0/95 0	0/73 2	0/95 0	1/06 7	0/93 7	2/43 2	0/94 5	1/86 2	0/94 8	1/59 6	$\theta$			
0/95 5	0/80 2	0/95 2	0/92 2	0/95 1	1/16 5	0/93 4	2/43 9	0/94 6	1/96 3	0/95 1	1/73 9	$\alpha$	2		
0/95 5	0/81 3	0/95 5	1/00 7	0/95 2	1/17 4	0/93 9	2/74 2	0/94 6	2/15 9	0/94 9	1/93 9	$\gamma$			
0/95 7	0/66 6	0/95 3	0/85 4	0/95 2	1/11 6	0/93 6	2/68 1	0/94 5	2/13 5	0/94 8	1/98 7	$\theta$			
0/95 5	0/56 2	0/95 2	0/87 4	0/95 0	1/11 0	0/93 8	2/15 2	0/94 5	1/93 0	0/94 7	1/64 7	$\alpha$	3		
0/95 8	0/64 7	0/95 4	0/76 8	0/95 2	0/98 7	0/93 9	2/51 6	0/94 3	1/84 1	0/94 8	1/52 9	$\gamma$			
0/95 5	0/56 6	0/95 2	0/65 1	0/94 9	0/98 7	0/93 8	2/35 6	0/94 1	1/83 0	0/94 5	1/28 6	$\theta$			
0/96 3	0/60 3	0/95 8	0/64 7	0/95 7	0/76 7	0/93 9	1/85 6	0/94 5	1/35 9	0/95 2	0/88 0	$\alpha$	1	(۰.۴۰)	
0/96 2	0/63 6	0/96 0	0/68 3	0/95 7	0/73 5	0/93 9	1/73 6	0/94 8	1/35 4	0/95 2	0/85 1	$\gamma$			
0/96 3	0/61 1	0/96 0	0/68 5	0/95 8	0/74 2	0/94 0	1/98 9	0/94 6	1/44 9	0/95 3	0/74 2	$\theta$			
0/96 3	0/56 6	0/96 0	0/59 5	0/95 8	0/76 6	0/94 0	1/90 5	0/94 9	1/40 7	0/95 2	0/81 2	$\alpha$	2		
0/96 0	0/58 9	0/95 8	0/63 0	0/95 8	0/66 6	0/93 9	1/83 5	0/94 6	1/50 5	0/95 3	0/96 6	$\gamma$			
0/96 2	0/54 2	0/95 8	0/61 3	0/95 7	0/63 3	0/93 9	1/80 9	0/94 6	1/56 3	0/95 2	0/86 7	$\theta$			
0/96 3	0/50 3	0/96 0	0/68 2	0/95 7	0/75 8	0/94 0	1/85 2	0/94 5	1/40 0	0/95 3	0/81 2	$\alpha$	3		
0/96 2	0/42 1	0/96 0	0/66 7	0/95 8	0/82 7	0/94 0	1/76 7	0/94 5	1/36 1	0/95 3	0/97 2	$\gamma$			
0/96 3	0/44 4	0/96 0	0/52 2	0/95 8	0/73 3	0/94 0	1/85 3	0/94 5	1/22 9	0/95 2	0/98 2	$\theta$			



Parameters of Weibull Distribution under Progressive Type-I Interval Censored Data with Beta-binomial Removals. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 46(4): 3140-3158.

[10] Kizilaslan, F., and Nadar, M. 2018. Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a bivariate Kumaraswamy distribution. *Statistical Papers* 59(1): 307-340.

[11] Kizilaslan, F., and Nadar, M. 2016. Estimation and prediction of the Kumaraswamy distribution based on record values and inter-record times. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 86(12): 2471-2493.

[12] Kohansal, A. 2019. On estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model for a Kumaraswamy distribution based on progressively censored sample. *Statistical Papers* 60(6): 2185-2224.

[13] Kohansal, A., and Shoaee, S. 2019. Bayesian and classical estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model under adaptive hybrid progressive censored data. *Statistical Papers* Accepted DOI: 10.1007/s00362-019-01094-y

[14] Lindley, D.V. 1980. Approximate Bayesian methods. *Trabajos de Estadística Y de Investigación Operativa* 31(1): 223-245.

[15] Ng, H.K.T., Kundu, D. and Chan. P.S. 2009. Statistical analysis of exponential lifetimes under an adaptive Type-II progressively censoring scheme. *Naval Research Logistics* 56(8): 687-698.

[16] Pareek, B., Kundu, D., and Kumar, S. 2009. On progressively censored competing risks data for weibull

[1] Ahmad, Z., Elgarhy, M., and Hamedani, G.G. 2018. A new Weibull-X family of distributions: properties, characterizations and applications. *Journal of Statistical Distributions and Applications* 5(5): 1-18.

[2] Cramer, E., and Iliopoulos, G. 2010. Adaptive progressive Type-II censoring. *Test* 19(2): 342-358.

[3] Dempster, A.P., Laird, N.M., and Rubin, D.B. 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 39(1): 1-38.

[4] Efron, B. 1982. The jackknife, the bootstrap and other re-sampling plans. Philadelphia, PA: SIAM, CBMSNSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 34.

[5] Epstein, B. 1954. Truncated life tests in the exponential case. *The Annals of Mathematical Statistics* 25(3): 555-564.

[6] Hall, P. 1988. Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. *Annals of Statistics* 16(3): 927-953.

[7] Hashemi, R., and Amiri, L. 2011. Analysis of progressive Type-II censoring in the Weibull model for competing risks data with binomial removals. *Applied Mathematical Sciences* 5(22): 1073-1087.

[8] Huang, S.R., and Wu, S.J. 2011. Bayesian estimation and prediction for Weibull model with progressive censoring. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 82(11): 1607-1620.

[9] Kaushik, A., Singh, U., and Singh, S.K. 2017. Bayesian Inference for the

distributions. *Computational Statistics and Data Analysis* 53(12), 4083-4094.

[17] Raqab, M.Z., and Nagaraja, H.N. 1995. On some predictors of future order statistics. *Metron* 53(1-2): 185-204.

[18] Sarhan, A.M., and Al-Ruzaizaa, A. 2010. Statistical inference in connection with the Weibull model using type-II progressively censored data with random scheme. *Pakistan Journal of Statistics* 26(1): 267-279.

[19] Sultan, K.S., MahMoud, M.R., and Saleh, H.M. 2007. Estimation of parameters of the Weibull distribution based on progressively censored data. *International Mathematical Forum* 2(41): 2031-2043.

[20] Tse, S.K. and Xiang, L. 2003. Interval estimation for Weibull-distributed life data under type II progressive censoring with random removals. *Journal of Biopharmaceutical Statistics* 13(1): 1-16.

[21] Tse, S.K., Yang, C., and Yuen, H.K. 2000. Statistical analysis of Weibull distributed lifetime data under Type II progressive censoring with binomial removals. *Journal of Applied Statistics* 27(8): 1033-1043.

[22] Yuen, H.K., and Tse S.K. 1996. Parameter estimation for Weibull distributed lifetimes under progressive censoring with random removals. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 55(1-2): 57-71.