

جواب تقریبی مسائل mp-MILP با استفاده از آزادسازی مک کورمیک قطعه‌ای تظریف شده

مریم محمودی^{1*}، عقیله حیدری²، علی کریم‌پور³

(2و1) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. 4697-19395. تهران، ایران

(3) گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1398/10/30 تاریخ پذیرش مقاله: 1399/02/30

چکیده

نظریه برنامه‌ریزی چندپارامتریک ابزار ارزشمندی برای تصمیم‌گیری تحت عدم قطعیت می‌باشد و حیطة فعالی از تحقیقات را به خود اختصاص داده است. اگرچه بهینه‌سازی چند پارامتریک با عدم قطعیت در ضرایب تابع هدف و مقادیر سمت راست محدودیت‌ها بسیار مورد توجه واقع شده و روش‌های گوناگونی برای حل آن‌ها تاکنون ارائه شده است، عدم قطعیت در ماتریس ضرایب (به عبارتی سمت چپ) کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در این کار یک روش جدید برای حل مسائل چندپارامتریک عدد صحیح مختلط (mp-MILP) با عدم قطعیت در محدودیت‌ها ارائه شده است. این روش شامل دو مرحله است که در مرحله اول با استفاده از آزادسازی مک کورمیک تظریف شده کران‌های جملات دوخطی بهبود می‌یابد و در مرحله دوم برپایه این کران‌های بهبود یافته و تخمین جملات دوخطی، مدل تقریبی از mp-MILP بدست آمده است. در انتها کارایی روش تقریبی ارائه شده توسط دو مثال مورد بررسی قرار گرفته است. برای انجام این کار در افزارهای متفاوت تقریب مساله انجام شده و میزان محاسبات لازم برای حل آن‌ها مقایسه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی چندپارامتری (mp-p)، برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط (MILP)، آزادسازی مک کورمیک.

1- مقدمه

مدل‌سازی یک پدیده فیزیکی با استفاده از معادلات ریاضی نیاز به درک کامل و درستی از اصول و پدیده‌های دخیل در مساله مورد مطالعه دارد و بدلیل نداشتن دانش دقیق در مورد سیستم‌های مورد مطالعه، این مدل‌سازی برپایه تعدادی از مفروضات و ساده‌سازی‌ها می‌باشد و به همین دلیل جواب بدست آمده از معادلات می‌تواند با عدم قطعیت همراه باشد. در واقع عدم قطعیت که در مدل‌های بهینه‌سازی با مجموعه‌ای از پارامترهای متغیر متناظر می‌باشد، جز ویژگی‌های ذاتی هر سیستم به حساب می‌آید و از آن‌جایی که عملکرد سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد در حیطه‌های مختلفی از علوم تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته است [1-5]. در نظر گرفتن عدم قطعیت از اهمیت زیادی برخوردار است زیرا می‌تواند بهینه بودن یا حتی شدنی بودن یک جواب بهینه قطعی را تحت تاثیر قرار دهد. برای اجتناب از چنین مواردی، مدل‌سازی‌های ریاضی متنوع و روش‌های حلی که در مقابل این عدم قطعیت‌ها پایدار باشند، در مقالات بررسی شده است.

برای مطالعه اثر پارامترهای نامعین بر روی جواب بهینه، دو روش اصلی در مقالات گزارش شده است؛ تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی چندپارامتری. اولی اطلاعاتی را درباره تاثیر عدم قطعیت در همسایگی جواب اسمی فراهم می‌کند، در حالی که دومی بطور صریح تاثیرش را بر روی جواب بهینه در سراسر بازه تغییرات پارامتر مشخص می‌کند که در ادامه کارهای انجام شده برای توسعه برنامه‌ریزی پارامتری بررسی می‌شود. برنامه‌ریزی چندپارامتری در دهه‌های گذشته بسیار مورد توجه بوده است. کاربردهایی از

برنامه‌ریزی چندپارامتری را می‌توان در مدل‌های کنترل پیش‌بین [13-6]، زمان‌بندی تحت عدم قطعیت [14-15] و برنامه‌ریزی پویا و چندسطحی [16-19] مشاهده کرد.

علی‌رغم پیشرفت خوبی که برای دسته‌های خاصی از مسائل پارامتریک از جمله $mp-LP^2$ ، $mp-MIP^3$ ، $mp-MILP^4$ و $mp-QP^5$ ‌ها با عدم قطعیت در ضرایب تابع هدف (OFC)⁶، عدم قطعیت در مقادیر سمت راست (RHS)⁷ و یا ترکیبی از هر دو حاصل شده است، مدل‌های با عدم قطعیت در سمت چپ (LHS)⁸، کمتر مورد توجه قرار گرفته است که دلیل عمده آن پیچیدگی محاسباتی مساله نتیجه شده است. علت این پیچیدگی محاسباتی جملات نامحدوبی است که در ماتریس ضرایب بین پارامتر عدم قطعیت و متغیرهای بهینه‌سازی وجود دارد. در ادامه به بررسی کارهایی که در برنامه‌ریزی چندپارامتری با عدم قطعیت در سمت چپ، سمت راست و یا ترکیبی از هر دو انجام شده است، پرداخته شده است.

در [20] الگوریتمی برای حل مسائل RHS- $mp-LP$ با عدم قطعیت در یک سطر یا در یک ستون از ماتریس ضرایب بر پایه الگوریتم سیمپلکس ارائه شده است. در حالتی که مساله چندپارامتریک شامل متغیر عدد صحیح، با زیرکلاسی از مسائل $mp-MILP$ سروکار داریم که در [21] حل مسائل چندپارامتریک عدد صحیح $1 - 0$ در حالتی که عدم قطعیت در سمت راست، سمت چپ و تابع هدف باشد، مورد مطالعه قرار گرفته است ولی این روش به گونه‌ای طراحی شده است که برای حل مسائل $mp-MILP$ در حالت کلی (سمت راست، سمت چپ، ضرایب تابع هدف بطور همزمان)، کاربرد ندارد. روشی

⁵ Multi-parametric quadratic programming (mp-QP)

⁶ Objective Function Coefficient (OFC)

⁷ Right Hand Side (RHS)

⁸ Left Hand Side (LHS)

² Multi-parametric Linear programming (mp-LP)

³ Multi-parametric mixed integer programming (mp-MIP)

⁴ Multi-parametric mixed integer linear programming (mp-MILP)

مسائل mp-MILP در حالت کلی بر پایه اصول محاسبات سمبلیک و هندسه شبه جبری ارائه کرده‌اند. آن‌ها سیستم معادلات KKT حاصل از مساله اصلی را با استفاده از فرضیه پایه گروبر¹³ [30] در یک محیط محاسباتی سمبلیک، حل کرده و جواب‌های انتخابی مد نظر را به دست می‌آورند، سپس با استفاده از شرایط شدنی بودن و بهینگی جواب، جواب‌های بهینه کلی مساله را محاسبه می‌کنند. یکی از ویژگی‌های مهم الگوریتم پیشنهادی آن‌ها محاسبه دقیق ناحیه‌های بحرانی غیرمحدب است اما تعداد جواب‌های کاندید اولیه به سرعت با تعداد محدودیت‌ها و متغیرها افزایش می‌یابد.

در نوشتار حاضر، یک الگوریتم جدید برای حل mp-MILPها با عدم قطعیت در محدودیت‌ها برپایه کاهش ناحیه جست و جوی جواب با استفاده از آزادسازی مک کورمیک تظریف شده ارائه می‌شود. از آن جایی که پیچیدگی محاسبات در حل مسائل چندپارامتریک با عدم قطعیت همزمان در مقادیر سمت راست و چپ بالاست ارائه روشی که میزان محاسبات را کاهش دهد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. آزادسازی مک کورمیک تظریف شده در برنامه‌ریزی غیرخطی بکارگرفته شده است و نتایج خوبی هم در کاهش میزان محاسبات و همگرایی جواب این دسته از مسائل با استفاده از آن بدست آمده است [31]. بنابراین ترکیب آن با روش‌های حل برنامه‌ریزی چندپارامتریک نیز می‌تواند بر کاستن میزان محاسبات آن موثر واقع شود و بنا به اطلاعات نویسندگان تاکنون این روش در برنامه‌ریزی چندپارامتریک بکار گرفته نشده است. برای انجام این کار، در مرحله اول با استفاده از آزادسازی مک کورمیک جملات دوخطی حاصل از حاصلضرب متغیر تصمیم و متغیر عدم قطعیت، تبدیل به

برای حل مسائل mp - MILP سباز کوچک با عدم قطعیت کلی، برپایه الگوریتم شاخه و کران با استفاده از شرایط بهینگی مساله بهینه‌سازی خطی استاندارد در [22] ارائه شده است. آن‌ها در حالتی که عدم قطعیت سمت چپ ظاهر می‌شود از یک الگوریتم تصویرسازی بر پایه پوسته‌های محدب⁹ [23] برای توصیف کامل ناحیه شدنی استفاده کرده‌اند و نتایج حاصله از روش‌شان تحت تاثیر نوع الگوریتم تصویرسازی مورد استفاده قرار دارد. در [24] الگوریتمی تقریبی برای حل مسائل mp - MILP در حالت کلی ارائه شده است. آن‌ها با استفاده از آزادسازی مک کورمیک¹⁰، عدم قطعیت سمت چپ را به عدم قطعیت سمت راست تبدیل کرده، همچنین به منظور کاهش تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری، برای افراز فضای پارامتر حالت لگاریتمی را نیز در نظر گرفته‌اند. آن‌ها همچنین با استفاده از تقریب به دست آمده و بر پایه روش دو مرحله‌ای [25]، آزادسازی قطعهای آفینی را برای این دسته مسائل در حالت کلی ارائه کرده‌اند که با افزایش عامل افراز، تعداد زیرمسائلی که باید حل شود در حالت‌های لگاریتمی و خطی بترتیب به صورت خطی و لگاریتمی افزایش می‌یابد. الگوریتمی برای مسائل LP - mp با عدم قطعیت سمت چپ تک پارامتری در [26] ارائه شده است. نویسنده الگوریتم را با استفاده از روش تکرار دو مرحله‌ای برای پیدا کردن مقادیر بهینه برای کل فضای پارامترها توسعه داده است. در مرحله اول روش تقریبی فلیویل - سالکین¹¹ [27] را برای حل معادلات شرایط بهینگی و پیدا کردن نقطه شکست بکار برده است و در مرحله دوم صحت نتایج با استفاده از معادله دقیق وودبری¹² [28] بررسی شده که در صورت لزوم به روزرسانی در جواب را انجام دهد. در [29]، نویسندگان یک الگوریتم با جواب تحلیلی برای حل

¹² Woodbury

¹³ Grobner bases theory

⁹ Convex hull

¹⁰ McCormick relaxation

¹¹ Flavell-Sallkin

محدودیت‌های خطی شده و کران‌های متغیرهای
جمله‌های دوخطی بهبود می‌یابد و در مرحله دوم
تقریب قطعه‌ای آفین از جملات دوخطی با توجه به
روش ارائه شده در [32] و کران‌های بهبود یافته
مرحله قبلی ارائه می‌شود که تقریبی از مساله اصلی
بدست می‌آید که یک RHS-mp-MILP می‌باشد.

جدول ۱- جدول نمادها

نماد	تعریف
c	بردار ضرایب متغیر پیوسته x در تابع هدف
d	بردار ضرایب متغیر دودویی y در تابع هدف
$A(\theta)$	ماتریس ضرایب متغیر x که برحسب θ خطی است.
$E(\theta)$	ماتریس ضرایب متغیر دودویی y که برحسب θ خطی است.
F	ماتریس ضرایب پارامتر عدم قطعیت θ در سمت راست
b	بردار مقادیر سمت راست
A^c	قسمت ثابت ماتریس $A(\theta)$
E^c	قسمت ثابت ماتریس $E(\theta)$
A_l^p	ماتریس ضرایب پارامتر عدم قطعیت در قسمت وابسته به θ در $A(\theta)$
E_l^p	ماتریس ضرایب پارامتر عدم قطعیت در قسمت وابسته به θ در $E(\theta)$
j	شمارنده مولفه‌های متغیر x
k	شمارنده مولفه‌های متغیر y
l	شمارنده مولفه‌های پارامتر θ
x_j^{min} و θ_l^{min}	کران پایین متغیرهای x_j و θ_l
x_j^{max} و θ_l^{max}	کران بالای متغیرهای x_j و θ_l
θ_{ln}^{max} و θ_{ln}^{min}	کران پایین و بالای θ_l در افراز n ام
x_{jln}^{max} و x_{jln}^{min}	کران پایین و بالای x_j وقتی که θ_l در افراز n ام است.
w_{jl}	حاصلضرب متغیر پیوسته x_j و پارامتر عدم قطعیت θ_l
v_{kl}	حاصلضرب متغیر دودویی y_k و پارامتر عدم قطعیت θ_l
γ_n^l	متغیر دودویی برای نمایش فعال بودن θ_l در افراز n ام
λ_q^j	متغیر دودویی برای نمایش فعال بودن x_j در افراز q ام
δ_{lq}^j	متغیر پیوسته متناظر با متغیر x_j و پارامتر θ_l در افراز q ام
N_l	عامل افراز پارامتر θ_l
M_j	عامل افراز x_j
β^j	طول بازه افراز متغیر x_j
BL	مجموعه اندیس‌های (j, l) ای که در جملات دوخطی حضور دارند.
DL	مجموعه اندیس‌های (k, l) ای که در جملات دوخطی حضور دارند.
$X \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$	ناحیه تعریف متغیرهای پیوسته مساله $x \in X$
$\Theta \subseteq \mathbb{R}^{n_\theta}$	ناحیه تعریف پارامتر عدم قطعیت $\theta \in \Theta$

دارند، باشد. متناظر با پارامتر θ_l ، عامل افراز N_l تعریف شده و ناحیه Θ را به N_l زیر بازه یکنواخت تقسیم می‌شود:

$$\theta_l^{\min} + \frac{(\theta_l^{\max} - \theta_l^{\min})(n-1)}{N_l} \leq \theta_l \leq \theta_l^{\min} + \frac{(\theta_l^{\max} - \theta_l^{\min})n}{N_l},$$

$$n = 1, 2, \dots, N_l.$$

فرض کنید θ_{ln}^{\max} و θ_{ln}^{\min} به ترتیب کران‌های پایین و بالای متغیر θ_l وقتی که در افرا n -ام $n = 1, 2, \dots, N_l$ قرار گرفته است، باشند. همچنین در نظر بگیرید $w_{jl} = x_j \theta_l$ و بطور مشابه برای جملات دوخطی حاصل از حاصلضرب متغیر دودویی و پارامتر عدم قطعیت نیز متغیر جدید $v_{kl} = y_k \theta_l$ تعریف شود که مشابه رابطه (3) چهار محدودیت متناظر با آن نیز تعریف می‌شود.

با توجه به مفروضات فوق و جایگزینی هر جمله دوخطی با متغیر جدید و اضافه کردن چهار محدودیت متناظر با آن، آزادسازی قطعه‌ای خطی مک کورمیک از مساله چندپارامتریک (1) با توجه به روابط (2) و (3) بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$z(\theta) = \min_{x_j, y_k, w_{jl}} \sum_{j=1}^{n_x} c_j x_j + \sum_{k=1}^p d_k y_k$$

$$\text{subject to: } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_x} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p e_{ik} y_k + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{n_\theta} \sum_{j=1}^{n_x} a_{ij}^l w_{jl} + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{n_\theta} \sum_{k=1}^p e_{ik}^l v_{kl} \leq \sum_{i=1}^m (b_i + \sum_{l=1}^{n_\theta} f_{il} \theta_l)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{jl} \geq x_j \theta_{ln}^{\min} + x_j^{\min} \theta_l - x_j^{\min} \theta_{ln}^{\min} \\ w_{jl} \geq x_j \theta_{ln}^{\max} + x_j^{\max} \theta_l - x_j^{\max} \theta_{ln}^{\max} \\ w_{jl} \leq x_j \theta_{ln}^{\min} + x_j^{\max} \theta_l - x_j^{\max} \theta_{ln}^{\min} \\ w_{jl} \leq x_j \theta_{ln}^{\max} + x_j^{\min} \theta_l - x_j^{\min} \theta_{ln}^{\max} \end{array} \right\} \forall \{j| (j, l) \in BL\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{kl} \geq y_k \theta_{ln}^{\min} + y_k^{\min} \theta_l - y_k^{\min} \theta_{ln}^{\min} \\ v_{kl} \geq y_k \theta_{ln}^{\max} + y_k^{\max} \theta_l - y_k^{\max} \theta_{ln}^{\max} \\ v_{kl} \leq y_k \theta_{ln}^{\min} + y_k^{\max} \theta_l - y_k^{\max} \theta_{ln}^{\min} \\ v_{kl} \leq y_k \theta_{ln}^{\max} + y_k^{\min} \theta_l - y_k^{\min} \theta_{ln}^{\max} \end{array} \right\} \forall \{k| (k, l) \in DL\}$$

$$\theta_{ln}^{\min} \leq \theta_l \leq \theta_{ln}^{\max}$$

$$\forall \{l| (j, l) \in BL\}$$

$$\forall \{l| (k, l) \in DL\}$$

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \forall \{j| (j, l) \in BL\}$$

پایین متغیرهای تصمیم و پارامتر اضافه شده به مساله اصلی، جایگزین می‌شود. برای مثال به منظور آزادسازی جملات θx ، با در نظر گرفتن متغیر جدید w ، متناظر با دو متغیری که جمله دوخطی ایجاد کرده‌اند، $w = \theta x$ ، نتیجه می‌شود:

$$w \geq x \theta^{\min} + x^{\min} \theta - x^{\min} \theta^{\min}$$

$$w \geq x \theta^{\max} + x^{\max} \theta - x^{\max} \theta^{\max}$$

$$w \leq x \theta^{\min} + x^{\max} \theta - x^{\max} \theta^{\min}$$

$$w \leq x \theta^{\max} + x^{\min} \theta - x^{\min} \theta^{\max}$$

این آزادسازی به صورت مشابه برای جملات θy نیز قابل تعریف است. با توجه به رابطه (3) هر چه کران‌های بالا و پایین دقیق‌تر انتخاب شوند، کیفیت آزادسازی ارائه شده بالاتر می‌رود و فضای جست و جوی جواب کاهش می‌یابد. نویسندگان در [31] نیز نشان داده‌اند که کیفیت آزادسازی مک کورمیک، تحت تاثیر کران‌های بالا و پایین هر یک از متغیرهای ظاهر شده در جمله دوخطی قرار دارد و بر این اساس روش جدیدی برپایه بهبود کران‌های متغیرهای دوخطی و در نتیجه بهبود کارایی آزادسازی مک کورمیک و استفاده از آن در حل مسائل چندپارامتریک در این مقاله ارائه می‌شود.

به منظور کاهش فضای جست و جو در ناحیه شدنی مساله آزادسازی شده نیاز به افراز دامنه مساله نیز هست که می‌توان دامنه یکی از متغیرهایی که در جمله دوخطی حضور دارد و فضای شدنی مساله را بیشتر تحت تاثیر قرار می‌دهد افراز کرد و یا افراز دامنه هر دو متغیر را به طور همزمان انجام داد. این افرازا می‌تواند بطور یکنواخت یا غیریکنواخت انجام شود [31] که در این مرحله از تقریب، افراز دامنه یکی از متغیرها، دامنه پارامتر عدم قطعیت، در نظر گرفته شده است. مساله (1) و پارامتر عدم قطعیت θ_l ، $\theta_l^{\min} \leq \theta_l \leq \theta_l^{\max}$ را در نظر بگیرید همچنین فرض کنید BL مجموعه همه اندیس‌های (j, l) و DL مجموعه همه اندیس‌های (k, l) ای که در جمله‌های دوخطی حضور

لحاظ می‌شود. همچنین با فرض این که پارامتر عدم قطعیت یک متغیر تصمیم باشد، مساله (1) با توجه به رابطه (2) یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی است که جواب آن با یک حل کننده غیرخطی می‌تواند یک کران بالا برای این مساله باشد که با z' نمایش داده شده است. با توجه به این مفروضات پس از حل مساله مینیمم‌سازی (و ماکزیمم‌سازی) زیر

$$\begin{aligned}
 x_{j^*l^*n^*}^{\min} &= \min_{x_j, \theta_l, y_k, w_{jl}} x_{j^*}, \\
 (x_{j^*l^*n^*}^{\max} &= \max_{x_j, \theta_l, y_k, w_{jl}} x_{j^*}) \\
 \text{subject to: } & \sum_{j=1}^{n_x} c_j x_j + \sum_{k=1}^p d_k y_k \leq z' \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_x} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p e_{ik} y_k + \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{n_\theta} \sum_{j=1}^{n_x} a_{ij}^l w_{jl} + \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{n_\theta} \sum_{k=1}^p e_{ik}^l v_{kl} \\
 & \leq \sum_{i=1}^m (b_i + \sum_{l=1}^{n_\theta} f_{il} \theta_l) \quad (7) \\
 & \left. \begin{aligned}
 w_{jl} &\geq x_j \theta_l^{\min} + x_j^{\min} \theta_l - x_j^{\min} \theta_l^{\min} \\
 w_{jl} &\geq x_j \theta_l^{\max} + x_j^{\max} \theta_l - x_j^{\max} \theta_l^{\max} \\
 w_{jl} &\leq x_j \theta_l^{\min} + x_j^{\max} \theta_l - x_j^{\max} \theta_l^{\min} \\
 w_{jl} &\leq x_j \theta_l^{\max} + x_j^{\min} \theta_l - x_j^{\min} \theta_l^{\max}
 \end{aligned} \right\} \forall (j,l) \in BL \\
 & \left. \begin{aligned}
 v_{kl} &\geq y_k \theta_l^{\min} + y_k^{\min} \theta_l - y_k^{\min} \theta_l^{\min} \\
 v_{kl} &\geq y_k \theta_l^{\max} + y_k^{\max} \theta_l - y_k^{\max} \theta_l^{\max} \\
 v_{kl} &\leq y_k \theta_l^{\min} + y_k^{\max} \theta_l - y_k^{\max} \theta_l^{\min} \\
 v_{kl} &\leq y_k \theta_l^{\max} + y_k^{\min} \theta_l - y_k^{\min} \theta_l^{\max}
 \end{aligned} \right\} \forall (k,l) \in DL \\
 & w_{jl}, v_{kl} \in \mathbb{R}, \forall \{(j,l), (k,l) \in BL\}, \\
 & j \in \{1, 2, \dots, n_x\}, k \in \{1, 2, \dots, p\} \\
 & \theta_l^{\min} \leq \theta_l \leq \theta_l^{\max} \\
 & x \in X = \\
 & \{x \in \mathbb{R}^{n_x} | x_k^{\min} \leq x_k \leq x_k^{\max}, k = 1, \dots, n_x\} \\
 & \theta \in \Theta = \\
 & \{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta} | \theta_l^{\min} \leq \theta_l \leq \theta_l^{\max}, l = \\
 & 1, \dots, n_\theta, l \neq l^*\}
 \end{aligned}$$

در صورتی که (هر دو) مساله (7) دارای جواب باشد، کران‌های جدیدی برای متغیر x_{j^*} زمانی که متغیر θ_{l^*} در زیر بازه n^* باشد، بدست می‌آورد. جایگزینی کران‌های x_j^{\min}, x_j^{\max} برای x_{j^*} با کران‌های بهتر $x_{jln}^{\min}, x_{jln}^{\max}$ در افراز n -ام باعث ایجاد یک

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{aligned}
 \theta_{ln}^{\min} &= \theta_l^{\min} + \frac{(\theta_l^{\max} - \theta_l^{\min})(n-1)}{N_l} \\
 \theta_{ln}^{\max} &= \theta_l^{\max} + \frac{(\theta_l^{\max} - \theta_l^{\min})n}{N_l}
 \end{aligned} \right\}, \\
 \forall l \in \{1, 2, \dots, N_\theta\} \\
 \forall n \in \{1, 2, \dots, N_l\} \\
 w_{jl}, v_{kl} \in \mathbb{R}, \forall \{(j,l) \in BL, (k,l) \in DL\}, \\
 j \in \{1, 2, \dots, n_x\}, k \in \{1, 2, \dots, p\} \\
 x \in X = \\
 \{x \in \mathbb{R}^{n_x} | x_k^{\min} \leq x_k \leq x_k^{\max}, k = 1, \dots, n_x\} \\
 y \in \{0, 1\}^p \\
 \Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta} | \theta_l^{\min} \leq \theta_l \leq \theta_l^{\max}, \\
 l = \{1, \dots, n_\theta\}\}
 \end{aligned}$$

در رابطه فوق، برای نشان دادن فعال یا غیر فعال بودن هر زیر افراز از یای منطقی، \forall استفاده شده است که برای تبدیل مساله به حالت خطی، متغیر دودویی γ_n^l بدین صورت تعریف می‌شود که اگر مقدار متغیر θ_l متعلق به افراز n -ام باشد متغیر دودویی γ_n^l مقدار یک را اختیار می‌کند و در غیر اینصورت مقدار آن صفر خواهد بود:

$$\gamma_n^l = \begin{cases} 1 & \theta_l^{\min} \leq \theta_l \leq \theta_l^{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

در ادامه برای بهبود کیفیت آزادسازی قطعه‌ای مک کورمیک ارائه شده (5)، با استفاده از یک مساله ماکزیمم‌سازی و یک مساله مینیمم‌سازی کران‌های بالا و پایین بهتری وابسته به افراز n -ام برای متغیر x_{j^*} دست می‌آید. این کران‌های جدید برخلاف کران‌های پارامتر عدم قطعیت، θ_l با استفاده از کران‌های اصلی مساله و تعداد افرازهای مدنظر محاسبه نمی‌شود، بلکه با استفاده از الگوریتم OBBC¹⁴ که در جدول (2) ارائه شده است [31]، بدست می‌آید. بدین منظور ابتدا یک متغیر $\theta_{l^*} \in \{1, 2, \dots, n_\theta\}$ انتخاب شده و سپس متغیر x_{j^*} بین x_{j^*} هایی که در جملات دوخطی حضور دارند، $\{j^* | (j^*, l^*) \in BL\}$ و یک ناحیه افراز $n^* \in \{1, 2, \dots, N_{l^*}\}$ انتخاب می‌شود. برای این ناحیه از افراز، کران‌های θ_{l^*} با توجه به رابطه (4)، بدست می‌آید و برای دیگر متغیرها کران‌های اصلی مساله

¹⁴ optimality based bound contraction

مسئله mp-MILP (1)، رابطه (2) و $M_j \geq 1$ را به عنوان عامل افراز متغیر تصمیم پیوسته x_j در نظر بگیرید. در بخش قبلی برای متغیر x_j کران‌های بالا و پایین بهبود یافته‌ای طبق الگوریتم OBBC بدست آمد که در این بخش، این کران‌های جدید جایگزین کران‌های اصلی مسئله (1) می‌گردد و در ادامه منظور از x_j^{max} و x_j^{min} خروجی الگوریتم OBBC می‌باشد. ناحیه‌ای که متغیر x_j شدن می‌باشد به M_j بازه به طور یکنواخت تقسیم کرده و لذا طول هر بازه عبارت است از:

$$\beta^j = \frac{x_j^{max} - x_j^{min}}{M_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_x \quad (3)$$

برای نمایش فعال یا غیرفعال بودن هر افراز، مشابه بخش قبلی، رابطه (6)، احتیاج به متغیر دودویی λ_q^j متناظر با متغیر x_j نیز هست که زمانی که متغیر x_j در زیر بازه q ام باشد، مقدار آن یک و در غیراینصورت مقدار آن صفر باشد. و چون متغیر x_j همیشه درون یکی از M_j زیر بازه قرار دارد، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{q=1}^{M_j} \lambda_q^j = 1. \quad (4)$$

آزادسازی ظریف‌تر می‌شود. کران‌های بدست آمده در این مرحله جایگزین کران‌های اصلی مسئله شده و برای تقریب مسئله (1) در بخش بعدی استفاده می‌شود.

3- تقریب خطی از مسئله mp - MILP

در این بخش تقریب قطعه‌ای آفین از جملات دوخطی با استفاده از روش ارائه شده در [32] و کران‌های جدید بدست آمده در بخش قبلی ارائه می‌شود. بکاربردن این روش آزادسازی باعث می‌شود که جملات دوخطی مدل تقریب زده شده و ماتریس ضرایب برحسب متغیرهای تصمیم خطی شده و ماتریسی از ضرایب پارامتر عدم قطعیت را در سمت راست داشته باشیم. به عبارتی در نهایت تقریبی از مسئله اصلی بدست می‌آید که یک RHS-mp-MILP می‌باشد، مسئله تقریبی حاصل بدلیل این که کران‌های ظریف‌تری برای آزادسازی آن استفاده شده است، مسئله‌ای است که ناحیه جست و جوی جواب آن کوچکتر شده است و در نتیجه میزان محاسبات بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

جدول 2- الگوریتم OBBC

گام 1:	فرض کنید $j \in \{1, 2, \dots, n_x\}, l \in \{1, 2, \dots, n_\theta\}$ و N_l تعداد افزای متناظر با θ_l باشد. همچنین x^{min} و θ^{min} کران‌های پایین و x^{max} و θ^{max} کران‌های بالای متغیرهای x و θ باشند.
گام 2:	در مسئله (1) با توجه به رابطه (2)، پارامتر عدم قطعیت θ را به عنوان متغیر تصمیم در نظر بگیرید و آن را با یک حل کننده MINLP حل کنید و جواب آن را به عنوان کران z' در نظر بگیرید. (کران z' با حل کننده BARON در محیط GAMS بدست آمده است)
گام 3:	انتخاب کنید l^* را اولین l ای که در BL حضور دارد $l \in \{1, 2, \dots, n_\theta\}$ و N_{l^*} متناظر با آن را مشخص کنید.
گام 4:	قرار دهید z^* را اولین z ای که $(j^*, l^*) \in BL$.
گام 5:	قرار دهید $n^* = 1$.
گام 6:	تا زمانی که $n^* < N_{l^*}$ مسئله ماکزیم‌سازی و مینیم‌سازی (7) حل کن اگر هر دو مسئله دارای جواب بود کران‌های ظریف‌تر متناظر با $x_{j^*}^{n^*}$ در افراز n^* . $(x_{j^*}^{min}, x_{j^*}^{max})$ بدست آمده است. در غیر اینصورت n^* متناظر با متغیر θ_{l^*} را حذف کنید.
گام 7:	بروز کنید کران‌های متغیر x_{j^*} را با $x_{j^*}^{min} = \min_n x_{j^*}^{min}$ و $x_{j^*}^{max} = \min_n x_{j^*}^{max}$.
گام 8:	اگر j^* آخرین j نیست که $(j^*, l^*) \in BL$ به گام 5 بروید.
گام 9:	اگر l^* آخرین $l \in \{1, 2, \dots, n_\theta\}$ است که در BL حضور دارد توقف کنید در غیر اینصورت به گام 3 بروید.

برای مدل‌سازی دامنه متغیر x_j با استفاده از متغیر λ_q^j می‌توان نوشت [32]:

$$\begin{aligned} x_j^{min} + \beta^j \sum_{q=1}^{M_j} (q-1) \lambda_q^j \\ \leq x_j \leq \\ x_j^{min} + \beta^j \sum_{q=1}^{M_j} q \lambda_q^j \\ j = 1, 2, \dots, n_x. \end{aligned} \quad (5)$$

همچنین نیاز است تا مجموعه‌ای از متغیرهای پیوسته $\delta_{l,q}^j$ تعریف شود که شرایط زیر برای آن‌ها برقرار است [32]:

$$\begin{aligned} \theta_l = \theta_l^{min} + \sum_{q=1}^{M_j} \delta_{l,q}^j, \\ 0 \leq \delta_{l,q}^j \leq (\theta_l^{min} - \theta_l^{max}) \lambda_q^j \\ l = 1, \dots, n_\theta, \\ j = 1, \dots, n_x, \\ q = 1, \dots, M_j. \end{aligned} \quad (11)$$

رابطه (11) تخمینی برای میزان انحراف متغیر θ_l از کران پایینی، زمانی که متغیر x_j در زیر بازه q قرار دارد می‌باشد. حال جمله‌های غیرخطی مساله (1) با توجه به رابطه (2) با استفاده از انولاپ‌های مک کورمیک تخمین زده می‌شود. انولاپ‌های مک کورمیک شامل انولاپ‌های محدب و مقعری هستند که برای جمله θx وابسته به کران‌های بالا و پایین متغیرهای x و θ می‌باشند. انولاپ محدب یک تابع بر روی یک مجموعه محدب، بزرگترین تابع محدبی است که در هرجایی تخمین پایینی برای آن تابع باشد. انولاپ محدب θx بر روی $[x^{min}, x^{max}]$ و $[\theta^{min}, \theta^{max}]$ به صورت زیر تعریف می‌شود [33]:

$$\begin{aligned} cvx_{env} = \\ \max_{x, \theta} \{ \theta^{min} x + x^{min} \theta - x^{min} \theta^{min}, \\ \theta^{max} x + x^{max} \theta - x^{max} \theta^{max} \} \end{aligned} \quad (12)$$

انولاپ مقعر یک تابع بر روی یک مجموعه محدب، کوچکترین تابع محدبی است که در هرجایی تخمین بالایی برای آن تابع باشد. انولاپ مقعر θx در

تعریف می‌شود [33]:

$$ccv_{env} = \min_{x, \theta} \{ \theta^{min} x + x^{max} \theta - x^{max} \theta^{min}, \theta^{max} x + x^{min} \theta - x^{min} \theta^{max} \} \quad (13)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌های (10)، (11)، (12) و (13) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} x_j \theta_l \leq \max \left\{ \begin{aligned} &x_j \theta_l^{min} + \\ &\sum_{q=1}^{M_j} (x_j^{min} + \beta^j (q-1)) \delta_{l,q}^j, \\ &x_j \theta_l^{max} + \sum_{q=1}^{M_j} (x_j^{min} + \beta^j q) \\ &(\delta_{l,q}^j - (\theta_l^{max} - \theta_l^{min}) \lambda_q^j) \end{aligned} \right\}, \\ x_j \theta_l \geq \min \left\{ \begin{aligned} &x_j \theta_l^{min} + \\ &\sum_{q=1}^{M_j} (x_j^{min} + \beta^j q) \delta_{l,q}^j, \\ &x_j \theta_l^{max} + \sum_{q=1}^{M_j} (x_j^{min} + \beta^j (q-1)) \\ &(\delta_{l,q}^j - (\theta_l^{max} - \theta_l^{min}) \lambda_q^j) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

در این صورت با جایگذاری جملات دوخطی مساله (1) با استفاده از رابطه (14) یک تقریب قطعه‌ای آفین از مساله اصلی بدست می‌آید. مساله تقریبی به دست آمده یک مساله $mp - MILP$ است که جملات دوخطی آن تقریب زده شده‌اند و تبدیل به یک مساله $RHS - mp - MILP$ شده است.

برای حل مسائل $RHS - mp - MILP$ ، شمارش همه ترکیبات احتمالی متغیرهای دودویی، حل زیرمسائل $mp - LP$ و مقایسه جواب‌های بدست آمده با یکدیگر، کافی است [34-35] اما مشخص است که این رویکرد برای تعداد متغیرهای دودویی زیاد، از نظر محاسباتی سخت است. بنابراین، بیشتر محققان روش‌های کاهش تعداد ترکیبات متغیرهای دودویی را بررسی کردند. دو نوع تحقیق دنبال شده در این دسته از مسائل، راهبرد شاخه و کران [36] و الگوریتم مبتنی بر تجزیه [34]، [37] هستند. جعبه ابزارهای [38] MPT و [39] POP برپایه این دو روش طراحی شده‌اند که در این کار برای حل نهایی

ملاحظه 1.3. بدلیل اینکه با افزایش مقدار عامل افراز، M ، تعداد ناحیه‌های بحرانی که در هر تکرار باید مورد بررسی قرار گیرد افزایش می‌یابد، مقدار عامل افراز تاثیر مستقیمی بر افزایش میزان محاسبات مساله دارد. البته این نکته قابل ذکر است که با افزایش مقدار عامل افراز در برخی مواقع هم علی‌رغم این که اندازه مساله بزرگ می‌شود، عمق هر تکرار کاهش می‌یابد بنابراین باید M بگونه‌ای انتخاب شود که ضمن این که جواب تقریبی خوبی بدست آید، اندازه مساله خیلی بزرگ نشود.

4- مثال‌های عددی

در این بخش دو مثال ارائه می‌دهیم که روش فوق را روی آنها پیاده‌سازی شده و مقادیر جواب تقریبی به همراه ناحیه‌های بحرانی نظیر آن گزارش شده است.

مثال 1-4: مساله LHS-mp-MILP زیر با دو متغیر پیوسته (x_1, x_2) ، دو متغیر دودویی (y_1, y_2) و دو پارامتر عدم قطعیت (θ_1, θ_2) ، که جملات دوخطی $\theta_1 x_2$ و $\theta_2 x_1$ در مقادیر سمت چپ محدودیت‌های آن وجود دارد را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} z(\theta) = \min_{x,y} & (-2x_1 - x_2 + y_1 + y_2) \\ & x_1 + (3 + \theta_1)x_2 + y_1 \leq 9 \\ & (2 + \theta_2)x_1 + x_2 - y_2 \leq 8 \\ & x_1 - y_1 + y_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 40 \\ & 0 \leq x_2 \leq 40 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \\ & y_j \in \{0,1\} \quad j = 1,2 \\ & 0 \leq \theta_l \leq 10, \quad l = 1,2 \end{aligned} \quad (6)$$

برای حل این مثال قرار دهید $N = (2,2)$ (ابتدا با بکارگیری آزادسازی مک کورمیک و قراردادن $w_1 = \theta_1 x_2$ و $w_1 = \theta_2 x_1$ نتیجه می‌شود:

مساله از جعبه ابزار MPT استفاده شده است. در هر دو روش ذکر شده برای حل زیرمسائل LP - mp نتیجه شده از روش یکسانی استفاده است. جواب این دسته از مسائل LP - mp با تقسیم فضای شدنی پارامتر به ناحیه‌های چندوجهی و بدست آوردن جواب بهینه و مقدار بهینه تابع هدف مرتبط با هر یک از این ناحیه‌ها بدست می‌آید. تعداد ناحیه‌های بحرانی جواب مساله (1) وابسته به الگوریتمی که برای حل زیرمسائل LP - mp استفاده می‌شود دارد. طبق قضیه (10.7) مرجع [41] ناحیه‌های بحرانی جواب مساله تقریبی mp-MILP - RHS بصورت اجتماعی متناهی از چند وجهی‌های محدب نوشته می‌شود، همچنین مقادیر بهینه تابع هدف و متغیرهای مساله توابعی قطعه‌ای آفین بر روی هر یک از این ناحیه‌ها می‌باشند. در صورتی که مساله به ازای یک θ ثابت دارای جواب متناهی باشد، به ازای هر θ در ناحیه بحرانی یا دارای جواب بهینه متناهی است و یا جواب ندارد. علاوه بر این در طی فرآیند الگوریتم حل مساله LP - mp احتیاج به مقایسه جواب‌ها و محاسبه ناحیه‌های باقیمانده در هر مرحله داریم که ناحیه‌های باقیمانده هر مرحله نیز طبق قضیه (3.5) مرجع [41] بصورت اجتماع متناهی از چندوجهی‌های محدب نوشته می‌شود که این اجتماع‌ها علاوه بر متناهی بودن با یکدیگر اشتراک نیز ندارند بنابراین الگوریتم جدید ارائه شده نهایتاً در تعداد متناهی گام خاتمه می‌یابد.

در ادامه برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده دو مثال ارائه و حل شده است و جواب‌های بدست آمده از این روش با روش‌های دیگر ارائه شده مقایسه شده است. لازم به ذکر است که برای حل این مثال‌ها از نرم افزار GAMS 23.3، Matlab و Cplex 12.1 بر روی سیستم عامل ویندوز 7 (Intel(R) Core(TM) i5, 2.5 GHZ, 2GB RAM) استفاده شده است.

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}^2 - 10\lambda_1^2 &\leq 0 \\ \delta_{1,2}^2 - 10\lambda_2^2 &\leq 0 \\ \delta_{(2,1)}^1 - 10\lambda_1^1 &\leq 0 \\ \delta_{2,2}^1 - 10\lambda_2^1 &\leq 0 \\ -\delta_{1,1}^1 - \delta_{1,2}^1 - \theta_1 &\leq 0 \\ \delta_{1,1}^1 + \delta_{1,2}^1 + \theta_1 &\leq 0 \\ -\delta_{2,1}^2 - \delta_{2,2}^2 - \theta_2 &\leq 0 \\ \delta_{2,1}^2 + \delta_{2,2}^2 - \theta_2 &\leq 0 \\ \delta_{1,q}^1 \geq 0, \delta_{2,q}^1 \geq 0, \\ \lambda_q^1, \lambda_q^2 \in \{0,1\} \quad q = 1,2 \\ y_k \in \{0,1\}, \quad k = 1,2 \\ 0 \leq \theta_l \leq 10, \quad l = 1,2. \end{aligned}$$

مساله جدید یک مساله RHS – mp – MILP می‌باشد که تقریبی از مساله اصلی (15) است. در جدول (3)، تعداد زیرمسایلی که لازم است برای حل این مساله پارامتریک مورد استفاده قرار گیرد و همچنین تعداد ناحیه‌های بحرانی استخراج شده، نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در روش ارائه شده تعداد ناحیه‌های بحرانی و همچنین تعداد زیرمسائلی که برای حل مساله مورد نیاز است با افزایش M خیلی کمتر از روش ارائه شده از [24] می‌باشد. برای $M = (2,2)$ ، $M = (4,4)$ و $M = (8,8)$ ، افزای فضای پارامتر و مقدار تقریبی تابع هدف به ترتیب در شکل‌های (1)، (2) و (3) نشان داده شده است. در جدول (4) و (5) مقادیر بهینه متغیرها، مقدار تابع هدف و معادلات ناحیه بحرانی به ترتیب برای روش ارائه شده و روشی که در [29]، از طریق حل تحلیلی معادلات حاصل از شرایط KKT بدست آمده است، ارائه شده است.

$$\begin{aligned} z(\theta) = \min_{x,y,w} &(-2x_1 - x_2 + y_1 + y_2) \\ x_1 + 3x_2 + y_1 + w_1 &\leq 9 \\ 2x_1 + x_2 - y_2 + w_2 &\leq 8 \\ x_1 - y_1 + y_2 &\leq 4 \\ 10x_2 + 3\theta_1 - w_1 &\leq 30 \\ w_1 - 3\theta_1 &\leq 0 \\ w_1 - 10x_2 &\leq 0 \\ 10x_1 + 4\theta_2 - w_2 &\leq 40 \\ w_2 - 4\theta_2 &\leq 0 \\ w_2 - 10x_1 &\leq 0 \\ 0 \leq x_1 &\leq 4 \\ 0 \leq x_2 &\leq 3 \\ y_j \in \{0,1\}, j = 1,2 \\ 0 \leq \theta_k &\leq 10, k = 1,2 \\ 0 \leq w_1 &\leq 30 \\ 0 \leq w_2 &\leq 40. \end{aligned} \quad (7)$$

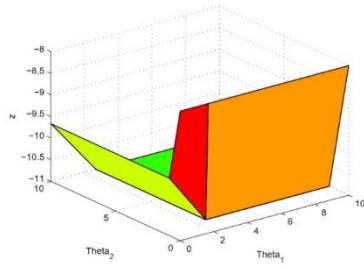
به منظور استفاده از الگوریتم ارائه شده، با حل مساله OBBC متناظر با (16) با استفاده از رابطه (7)، کران‌های متغیرها را بهبود می‌یابد و پس از به روزرسانی کران‌های متغیرهای دوخطی و قرار دادن $M = (2,2)$ آزادسازی قطعه‌ای آفین متناظر با آن را با استفاده از رابطه (14) به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} z(\theta) = \min_{x,y,\lambda,\delta} &(-2x_1 - x_2 + y_1 + y_2) \\ x_1 + 3x_2 + y_1 + 1.5\delta_{1,2}^2 &\leq 5.25 \\ 2x_1 + x_2 - y_2 + 2\delta_{2,2}^1 &\leq 3 \\ x_1 - y_1 + y_2 &\leq 4 \\ x_1 + 13x_2 + y_1 + 1.5\delta_{1,1}^2 + \\ 3\delta_{1,2}^2 - 15\lambda_1^2 - 30\lambda_2^2 &\leq 5.25 \\ 12x_1 + x_2 - y_2 + 2\delta_{2,1}^1 \\ + 4\delta_{2,2}^1 - 20\lambda_1^1 - 40\lambda_2^1 &\leq 3 \\ x_2 - 3\lambda_2^2 - 1.5\lambda_1^2 &\leq 0 \\ -x_2 + 1.5\lambda_2^2 &\leq 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &\leq 1 \\ -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 &\leq -1 \\ x_1 - 4\lambda_2^1 - 2\lambda_1^1 &\leq 0 \\ -x_1 + 2\lambda_2^1 &\leq 0 \\ \lambda_1^1 + \lambda_2^1 &\leq 1 \\ -\lambda_1^1 - \lambda_2^1 &\leq -1 \end{aligned} \quad (8)$$

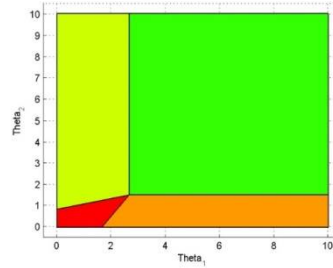
جدول 3- مقایسه تعداد ناحیه‌های بحرانی بدست آمده و تعداد زیرمسائلی که باید در مسیر جواب مثال 4.1 حل شوند در

الگوریتم جدید ارائه شده و الگوریتم مرجع [24]

	الگوریتم جدید ارائه شده			الگوریتم ارائه شده در [24]		
	MINLP	mp - LP	CR	MINLP	mp - LP	CR
$M = (2,2)$	12	1	4	4	1	3
$M = (3,3)$	27	3	10	17	6	11
$M = (4,4)$	35	4	11	52	17	35
$M = (8,8)$	70	11	16	150	33	117

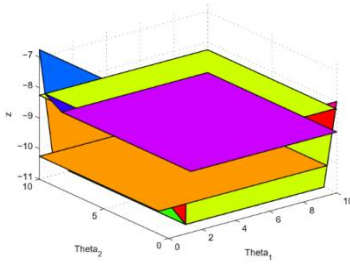


(ب)

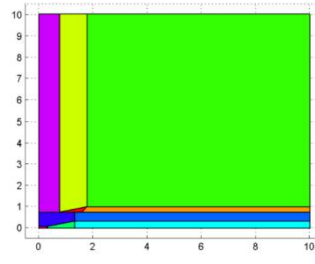


(آ)

شکل 1- (آ) افزایش فضای پارامتر برای $M = (2,2)$ ، (ب) مقدار بهینه تابع هدف برای $M = (2,2)$ مثال 4.1.

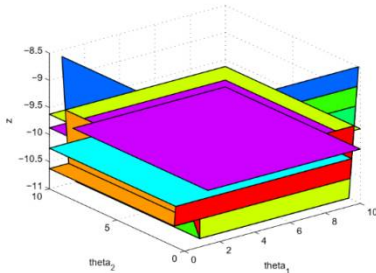


(ب)

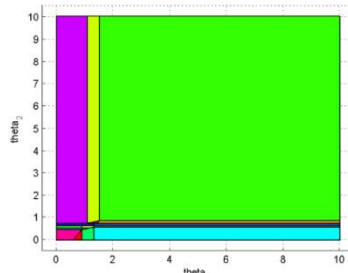


(آ)

شکل 2- (آ) افزایش فضای پارامتر برای $M = (4,4)$ ، (ب) مقدار بهینه تابع هدف برای $M = (4,4)$ مثال 4.1.



(ب)



(آ)

شکل 3- (آ) افزایش فضای پارامتر برای $M = (8,8)$ ، (ب) مقدار بهینه تابع هدف برای $M = (8,8)$ مثال 4.1.

جدول 4- جواب بهینه و ناحیه‌های بحرانی مثال (4.1) با روش جدید ارائه شده

y_1	y_2	x_1	x_2	z	CR
0	0	$-0.3\theta_1 + 1.2\theta_2 + 3$	$0.6\theta_1 + 2$	$-2.4\theta_2 - 8$	$\begin{cases} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0.8321 & -0.5547 \\ -0.2425 & 0.99701 \end{cases} \leq \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1.3868 \\ 0.8085 \end{cases}$
0	0	$\theta_2 + 2.5$	3	$-2\theta_2 - 8$	$\begin{cases} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -0.8321 & 0.5547 \end{cases} \leq \begin{cases} 10 \\ 0 \\ 1.5 \\ -1.3868 \end{cases}$
0	0	4	$0.5\theta_1 + 1.667$	$-0.5\theta_1 - 9.667$	$\begin{cases} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0.2425 & 0.99701 \\ 1 & 0 \end{cases} \leq \begin{cases} 10 \\ 0 \\ -0.8085 \\ 2.667 \end{cases}$
0	0	4	3	-11	$\begin{cases} 1 & -0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{cases} \leq \begin{cases} 10 \\ 10 \\ -1.5 \\ -2.67 \end{cases}$

جدول 5- جواب بهینه و ناحیه‌های بحرانی مثال (4.1) با روش ارائه شده در [29]

y_1	y_2	x_1	x_2	z	CR
0	0	$-8\theta_1 - 15$	$-9\theta_2 - 10$	$-2(-8\theta_1 - 15) - 9\theta_2 - 10$	$\begin{cases} -\frac{5}{6} \leq \theta_1 \leq 0 \\ 0 \leq \theta_2 \leq \frac{-6\theta_1 - 5}{3\theta_1} \\ \theta_1 \geq 0 \\ \theta_2 \geq 0 \end{cases}$
0	0	$\theta_1\theta_2 + 2\theta_1 + 3\theta_2 + 5$	$\theta_1\theta_2 + 2\theta_1 + 3\theta_2 + 5$	$\theta_1\theta_2 + 2\theta_1 + 3\theta_2 + 5$	$\begin{cases} \theta_1 \leq \frac{-5}{6} \\ \theta_2 \geq 0 \\ -\frac{5}{6} \leq \theta_1 \leq 0 \\ \theta_2 \geq \frac{-6\theta_1 - 5}{3\theta_1} \end{cases}$
0	0	4	$-4\theta_2$	$-8 + 4\theta_2$	$\begin{cases} \theta_1 \leq \frac{-4}{3} \\ \frac{-3}{4} \leq \theta_2 \leq 0 \\ \theta_1 \geq \frac{-4}{3} \\ \frac{-5}{12 + 4\theta_1} \leq \theta_2 \leq 0 \end{cases}$
0	0	$-\frac{5}{2 + \theta_2}$	3	$-3 - \frac{10}{2 + \theta_2}$	$\begin{cases} \theta_1 \leq \frac{-4}{3} \\ \theta_2 \leq \frac{-3}{4} \end{cases}$
0	0	4	3	-11	$\begin{cases} \theta_1 \geq \frac{-4}{3} \\ \theta_2 \leq \frac{-3}{4} \end{cases}$
0	0	4	$-\frac{5}{3 + \theta_1}$	$-8 - \frac{5}{3 + \theta_1}$	$\begin{cases} \theta_1 \geq \frac{-4}{3} \\ \theta_2 \leq -\frac{5}{12 + 4\theta_1} \end{cases}$

جدول (6)، تعداد ناحیه‌های بحرانی و همچنین تعداد زیرمسائلی که باید در این ناحیه‌ها حل شود را به ازای M ‌های مختلف نشان می‌دهد. در جدول (7)، مقادیر بهینه متغیرها، مقدار بهینه تابع هدف و معادلات ناحیه بحرانی برای عامل افراز $M = (4,4)$ ارائه شده است. همچنین برای $M = (2,2)$ و $M = (8,8)$ ، مقادیر تقریبی بدست آمده برای تابع هدف و ناحیه‌های بحرانی به ترتیب در شکل‌های (4) و (5) نشان داده شده است.

مثال 4-2: مساله زیر را که داری عدم قطعیت در محدودیت‌ها می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$z(\theta) = \min_{x_1, x_2, y_1, y_2} (-8x_2 + 4y_1 + 2y_2)$$

$$x_1 + \theta_1(1 - x_2) \leq 13(5 + \theta_2)$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 20$$

$$-8x_1 + 22x_2 \leq 121$$

$$-4x_1 - x_2 \leq -8$$

$$x_1 - 10y_1 \leq 0$$

$$x_2 - 15y_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

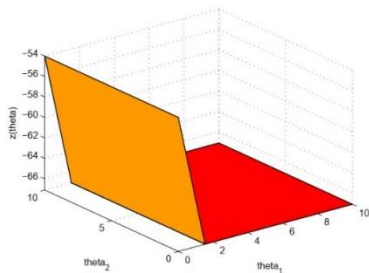
$$0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 10$$
(9)

جدول 6- تعداد زیرمسائل و تعداد ناحیه‌های بحرانی مثال 2.4.

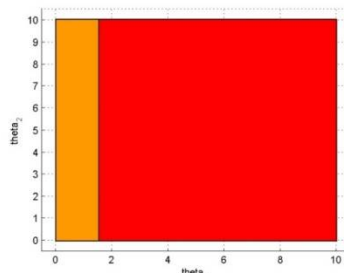
y_1	y_2	x_1	x_2	z	CR
1	1	$4.77\theta_1 + 5.5$	$1.733\theta_1 + 7.5$	$-13.87\theta_1 - 54$	$\begin{cases} 0.4196 \leq \theta_1 \leq 0.9441 \\ 0 \leq \theta_2 \leq 10 \end{cases}$
1	1	10	9.14	-67.09	$\begin{cases} 0.9441 \leq \theta_1 \leq 10 \\ 0 \leq \theta_2 \leq 10 \end{cases}$
1	1	$4.77\theta_1 + 5.5$	$1.733\theta_1 + 7.5$	$-13.87\theta_1 - 54$	$\begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq 0.4196 \\ 0 \leq \theta_2 \leq 10 \end{cases}$

جدول 7- جواب بهینه، مقدار بهینه تابع هدف و ناحیه‌های بحرانی متناظر با مثال 2.4.

	MINLP	mp - LP	CR
$M = (2,2)$	12	2	2
$M = (3,3)$	18	4	3
$M = (4,4)$	25	4	3
$M = (8,8)$	47	6	3

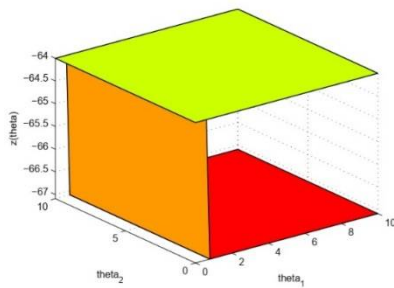


(ب)

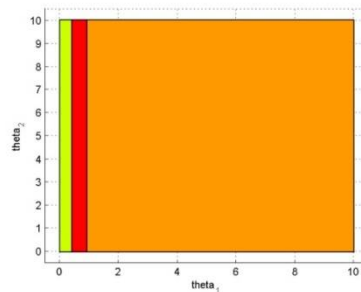


(ا)

شکل 4- افراز فضای پارامتر برای $M=(2,2)$ (ب) مقدار بهینه تابع هدف برای $M=(2,2)$ در مثال 2.4.



(ب)



(ا)

شکل 5- افزایش فضای پارامتر برای $M=(8,8)$ (ب) مقدار بهینه تابع هدف برای $M=(8,8)$ در مثال 4.2

نتیجه‌گیری

ضروری است که اگرچه با افزایش عامل افزایش میزان دقت تقریب ارائه شده را افزایش می‌دهد ولی مقدار آن نمی‌تواند به میزان دلخواه بزرگ انتخاب شود زیرا بالا رفتن مقدار آن باعث زیاد شدن تعداد متغیرهای دودویی مدل تقریبی شده که تاثیر بسزایی در پیچیدگی محاسبات دارد بنابراین باید مقدار آن بگونه‌ای انتخاب شود که ضمن این که جواب تقریبی خوبی بدست آید، اندازه مساله خیلی بزرگ نشود. در مثال‌های ارائه شده تلاش شده است که مقادیر عامل افزایش بگونه‌ای انتخاب شوند که ضمن اینکه مساله تقریبی ارائه شده با کیفیت باشد، میزان محاسبات مورد نیاز برای حل آن نیز زیاد نباشد. از کاربردهای این روش تقریبی می‌توان به مسائل کنترل پیش‌بین صریح که دارای تابع هدف خطی باشند، اشاره کرد.

در این مقاله روشی برای حل مسائل چندپارامتریک با عدم قطعیت در محدودیت‌ها بر پایه کوچک کردن ناحیه جست و جوی جواب، ارائه شد. این الگوریتم شامل دو مرحله است که در مرحله اول جملات دوخطی ماتریس ضرایب را، که از حاصل ضرب متغیر تصمیم و پارامتر عدم قطعیت حاصل شده‌اند، به کمک آزادسازی مک کورمیک تقریب زده و کران‌های متغیرهایی که در جملات دوخطی حضور دارند، به کمک برنامه‌ریزی خطی بهبود داده شده است و بدین ترتیب ناحیه جست و جوی جواب کوچک‌تری ایجاد شد. در مرحله دوم، کران‌های جدید بدست آمده از مرحله قبل بکار گرفته شد و با ارائه تقریبی قطعه‌ای خطی، مساله تبدیل به یک مساله چندپارامتریک شده که عدم قطعیت فقط در سمت راست آن ظاهر می‌شود و مساله تقریبی حاصل شده به کمک الگوریتم کارای موجود برای حل این دسته مسائل، حل شده است. در واقع با بهینه کردن کران متغیرهایی که در جملات دوخطی حضور دارند، تقریبی از مسائل چندپارامتریک با عدم قطعیت در محدودیت‌ها ارائه شد که تعداد زیرمسائلی که باید در طی فرآیند حل مساله، حل شود را کاهش می‌دهد و به تبع آن میزان محاسبات نیز کاهش می‌یابد. اما توجه به این نکته

فهرست منابع

- [9] Pistikopoulos, E. N., Dua, V., Bozinis, N. A., Bemporad, A., and Morari, M. On-line optimization via off-line parametric optimization tools. *Computers & Chemical Engineering*, 24(2):183 – 188, 2000.
- [10] Lu, K., Du, P., Cao, J., Zou, Q., He, T., and Huang, W. A novel traffic signal split approach based on explicit model predictive control. *Mathematics and Computers in Simulation*, 155:105 – 114, 2019.
- [11] Hao, Z., Boel, R., and Li, Z. Model based urban traffic control, part i: Local model and local model predictive controllers. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 97:61-81, 2018.
- [12] Hao, Z., Boel, R., and Li, Z. Model based urban traffic control, part ii: Coordinated model predictive controllers. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 97:23 – 44, 2018.
- [13] Le, T., Vu, H. L., Nazarathy, Y., Vo, Quoc Bao, and Hoogendoorn, Serge. Linear-quadratic model predictive control for urban traffic networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 36:498 - 512, 2013.
- [14] Ryu, J., Dua, V., and Pistikopoulos, E. N. Proactive scheduling under uncertainty: a parametric optimization approach. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46(24):8044–8049, 2007.
- [15] Li, Z. and Ierapetritou, M. Process scheduling under uncertainty: Review and challenges. *Computers & Chemical Engineering*, 32(4):715 – 727, 2008.
- [16] Avraamidou, S. and Pistikopoulos, E. N. A multiparametric mixed-integer bi-level optimization strategy for supply
- [1] Öncü Hazır and Ulusoy, Gündüz. A classification and review of approaches and methods for modeling uncertainty in projects. *International Journal of Production Economics*, p. 107522, 2019.
- [2] Jordehi, A. Rezaee. How to deal with uncertainties in electric power systems? a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 96:145 – 155, 2018.
- [3] طیب نسب، سیده فرخنده، حمیدی، فرهاد، و اله دادی، مهدی. یک روش جدید برای حل مسئله برنامه ریزی خطی دو ترازه تماماً بازه‌ای با قیود تساوی پژوهش‌های نوین در ریاضی، 4 (14): 51-60, 1397.
- [4] رعایت پناه، محمدعلی و آقایی، نازیلا. اندازه‌گیری کارایی سود کلی استوار با در نظر گرفتن عدم قطعیت در بردارهای قیمت ورودی و خروجی، پژوهش‌های نوین در ریاضی، 4 (15): 5-18, 1397.
- [5] آقایی، نازیلا. رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از کارایی متقاطع در حضور خروجی‌های نامطلوب و عدم قطعی داده‌ها پژوهش‌های نوین در ریاضی، 3 (11): 19-30, 1396.
- [6] Oberdieck, R., Diangelakis, N. A., and Pistikopoulos, E. N. Explicit model predictive control: A connected- graph approach. *Automatica*, 76:103 – 112, 2017.
- [7] Oberdieck, R. and Pistikopoulos, E. N. Explicit hybrid model-predictive control: The exact solution. *Automatica*, 58:152-159, 2015.
- [8] Sakizlis, V., Kakalis, N. M.P., Dua, V., Perkins, J. D., and Pistikopoulos, E. N. Design of robust model-based controllers via parametric programming. *Automatica*, 40(2): 189 – 201, 2004.

- of mp-milp problems using piecewise affine relaxation of bilinear terms. *Computers & Chemical Engineering*, 61:136-155, 2014.
- [25] Wittmann-Hohlbein, M. and Pistikopoulos, E. N. A two-stage method for the approximate solution of general multiparametric mixed-integer linear programming problems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51(23):8095–8107, 2012.
- [26] Khalilpour, R. and Karimi, I.A. Parametric optimization with uncertainty on the left hand side of linear programs. *Computers & Chemical Engineering*, 60:31 – 40, 2014.
- [27] Flavell, R. and Salkin, G. R. An approach to sensitivity analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 26(4): 857-866, 1975.
- [28] Searle, H. Henderson and S. On deriving the inverse of a sum of matrices. *SIAM Review*, 23(1):53–60, 1981.
- [29] Charitopoulos, V. M., Papageorgiou, L. G., and Dua, V. Multi-parametric mixed integer linear programming under global uncertainty. *Computers & Chemical Engineering*, 116:279 - 295, 2018.
- [30] Winkler, Burchberger. *Gröbner Bases and Applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998.
- [31] Castro, P.M. Tightening piecewise mccormick relaxations for bilinear problems. *Computers & Chemical Engineering*, 72:300-311, 2015.
- [32] Gounaris, Ch. E., Misener, R., and Floudas, CH. A. Computational comparison of piecewise-linear relaxations for pooling problems. chain planning under demand uncertainty. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):10178 – 10183, 2017.
- [17] Avraamidou, S. and Pistikopoulos, E. N. A multi-parametric optimization approach for bilevel mixed-integer linear and quadratic programming problems. *Computers & Chemical Engineering*, 125:98 – 113, 2019.
- [18] Avraamidou, S. and Pistikopoulos, E. N. Multi-parametric global optimization approach for tri-level mixed-integer linear optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 74(3):443–465, 2019.
- [19] Faísca, N. P., Kouramas, K. I., Saraiva, P. M., Rustem, B., and Pistikopoulos, E. N. A multi-parametric programming approach for constrained dynamic programming problems. *Optimization Letters*, 2:267–280, 2008.
- [20] Gal, T. *Postoptimal analyses, parametric programming, and related topics: degeneracy, multicriteria decision making, redundancy*. 1994.
- [21] Crema, A. The multiparametric 0–1-integer linear programming problem: A unified approach. *European Journal of Operational Research*, 139(3):511- 520, 2002.
- [22] Li, Z. and Ierapetritou, G. M. A new methodology for the general multiparametric mixedinteger linear programming (milp) problems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46(15):5141- 5151, 2007.
- [23] Avis, D. and Fukuda, K. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, 8(3):295-313, 1992.
- [24] Wittmann-Hohlbein, M. and Pistikopoulos, E. N. Approximate solution

Industrial & Engineering Chemistry Research, 48 (12):5742–5766, 2009.

[33] McCormick, G. P. Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part i — convex underestimating problems. *Mathematical Programming*, 10(1):147-175, 1976.

[34] Dua, V. and Pistikopoulos, E. N. An algorithm for the solution of multiparametric mixed integer linear programming problems. *Annals of Operations Research*, 99:123–139, 2000.

[35] Borrelli, F. *Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems*, vol. 290. SpringerVerlag Berlin Heidelberg, 2003.

[36] Acevedo, J. and Pistikopoulos, E. N. An algorithm for multiparametric mixed-integer linear programming problems. *Operations Research Letters*, 24(3):139 – 148, 1999.

[37] Jia, Z. and Ierapetritou, M. Uncertainty analysis on the righthand side for milp problems. *AIChE Journal*, 52:2486 – 2495, 07 2006.

[38] Oberdieck, Richard, Diangelakis, Nikolaos, Papathanasiou, Maria, Nascu, Ioana, and Pistikopoulos, Efstratios. Pop - parametric optimization toolbox. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 55, 07 2016.

[39] Herceg, Martin, Kvasnica, Michal, Jones, Colin, and Morari, Manfred. *Multi parametric toolbox 3.0*. pp. 502–510, 07 2013.

[40] Borrelli, F., Bemporad, A., and M.Morari. *Predictive Control for Linear and Hybrid Systems*. Cambridge University Press, 2017.