دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام برای معادله دیفرانسیل تاخیری

نسرین اقبالی[1*]، لیلا ساجدی[2]

[۱و۲] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۳/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۰۶

چکیده

در این مقاله، ابتدا به تعریف مفاهیم پایداری میتاگ- لفلر- یرز- اولام و پایداری میتاگ- لفلر- یرز- اولام-راسیاس می‌پردازیم و سپس با استفاده از روش نقطه ثابت برای معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری مرتبه اول زیر، پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام و میتاگ-لفلر-یرز-اولام-راسیاس را ثابت می‌کنیم:

$$y' = F\left(t, y(t), y(t-\tau)\right)$$

که در آن، F تابع کراندار و پطوسته و $\tau > 0$ یک ثابت حقیقی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل تاخیری، پایداری میتاگ-لفلر- یرز-اولام، پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام-راسیاس.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:nasrineghbali@gmail.com

۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی در یک دهه گذشته با توجه به کاربردهای اساسی آن در فیزیک و ریاضی بسطار مورد توجه ریاضی دانان و فطزیک دانان قرار گرفته است.

مساله پایداری در سال۱۹۴۰[۵] با سوال معروف اولام در کنفرانسی در دانشگاه ویسکانسین شروع شد. در سال ۱۹۴۱ یرز[۳] به این سوال پاسخ داد. این مساله بعد از مقاله سال ۱۹۷۸ راسیاس[۴] به پایداری یرز-اولام-راسیاس معروف شد.

آلسینا و گر اولین افرادی بودند که در زمینه پاطداری معادلات دیفرانسیل کار کردند[۱]. معادله دیفرانسیل تأخیری در زمینه‌های مهندسی و علوم از اهمیت برخوردار است. زیرا معادلات دیفرانسیل در مدل‌سازی پدیده‌ها و بررسی رفتار آن‌ها همواره مورد استفاده است و رفتار دستگاه تحت تأثیر رفتار گذشته و حال آن می‌باشد.

در این مقاله با استفاده از روش معرفی شده در مقاله[۲]، به تعریف و بررسی پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام و پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام-راسیاس معادله دیفرانسیل تاخیری مرتبه اول می‌پردازیم.

۲- تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در اینجا به بیان مطالبی می‌پردازیم که در ادامه بحث از آنها استفاده خواهد شد.

تعریف۲٫۱. فرض کنید یک مجموعه باشد. تابع $d: X\times X \to [0,\infty]$ متر تعمیم یافته روی X نامیده می‌شود اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف. به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$،

ب. به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y)=d(y,x)$،

ج. به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

توجه کنید که فرق بین متر تعمیم یافته و متریک معمولی در این است که برد متر تعمیم یافته شامل $+\infty$ می‌باشد.

قضیه ۲٫۲. فرض کنید (X,d) فضای متریک کامل تعمیم یافته باشد و $\Lambda: X \to X$ یک عملگر اکیدا انقباضی با ثابت لیپشیتز $L<1$ باشد. اگر ثابت نامنفی k وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x\in X$، $(\Lambda^{k+1}x, \Lambda^k x)<\infty$، در این صورت خواص زیر برقرار است:

۱. دنباله‌ی $\{\Lambda^n x\}$ به نقطه‌ی ثابت x^* از Λ همگراست.

۲. x^* نقطه‌ی ثابت یکتا از Λ در X^* است که $X^* = \{y\in X : d(\Lambda^k x, y)<\infty\}$

۳. اگر $y\in X^*$ در این صورت $d(y,x^*)\le \frac{1}{1-L} d(\Lambda y, y)$.

۳. پایداری میتاگ- لفلر- یرز- اولام

ابتدا به تعریف مفهوم پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام می‌پردازیم و سپس نشان می‌دهیم که معادله دیفرانسیل تاخیری مرتبه اول دارای پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام است.

تعریف ۳٫۱. فرض کنید $F: I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع و تابع پیوسته‌ی $y: I\to\mathbb{R}$ در

$$\begin{cases} |y'(t)-F(t,y(t),y(t-\tau))| \\ <\varepsilon E_q(t), t\in[t_0,\mathrm{T}], \\ |y(t)-\psi(t)| \\ <\varepsilon E_q(t), t\in[t_0-\tau,\mathrm{t}_0] \end{cases}$$

صدق کند که E_q تابع میتاگ- لفلر است. در این صورت اگر تابع پیوسته‌ی منحصربه فرد $y_0: I\to\mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $t\in I$:

$$\begin{cases} y_0'(t)=F(t,y_0(t),y_0(t-\tau)), \\ t\in[t_0,\mathrm{T}], \\ y_0(t)=\psi(t), \\ t\in[t_0-\tau,\mathrm{t}_0] \end{cases}$$

و

$$|y(t)-y_0(t)|<\frac{\varepsilon E_q(t^q)}{1-T(L_1+L_2)}$$

گوییم معادله دیفرانسیل تاخیری مرتبه اول دارای پایداری میتاگ-لفلر-یرز-اولام است.

قضیه۳,۲. برای $I=[-\tau,T]$، فرض کنید $F:I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد که در شرط لیپشیتز زیر

$$F(t,x,y)-F(t,\mathrm{z},\mathrm{w})\le \mathrm{L}_1|x-z|+L_2|y-w|$$

برای هر $(t,x,y),(t,z,w)\in I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و $0<T(L_1+L_2)<1$ صدق کند. فرض کنید L_1,L_2 و $\psi\in C[t_0-\tau,t_0],\varepsilon\ge 0,$ ثابت‌های مثبت هستند. فرض کنید تابع پیوسته‌ی $y:I\to\mathbb{R}$ در

$$|y'(t)-F(t,y(t),y(t-\tau))|<\varepsilon E_q(t),t\in[t_0,\mathrm{T}],$$
$$|y(t)-\psi(t)|<\varepsilon E_q(t),t\in[t_0-\tau,\mathrm{t}_0]$$

صدق کند که E_q تابع مطتاگ- لفلر است، در این صورت تابع پیوسته ی منحصربه فرد $y_0:I\to\mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه برای هر $t\in I$:

$$\begin{cases} y_0'(t)=F(t,y_0(t),y_0(t-\tau)),\\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\\ y_0(t)=\psi(t),\\ t\in[t_0-\tau,\mathrm{t}_0]\end{cases} \qquad (۳,۱)$$

و

$$|y(t)-y_0(t)|<\frac{\varepsilon E_q(t^q)}{1-T(L_1+L_2)} \qquad (۳,۲)$$

برهان. فرض کنید S مجموعه‌ی توابع پیوسته به صورت

$$S=\{\varphi: I\to\mathbb{R},\varphi \text{ پیوسته است}\} \qquad (۳,۳)$$

باشد. S با متر زیر یک فضای متریک تعمیم یافته است.

$$d_1(\varphi,\mu)=$$
$$\inf\{M\in[0,\infty):|\varphi(t)-\mu(t)|\le M\varphi(t),\forall t\in I\}.$$

عملگر $\Lambda:S\to S$ را برای هر $\varphi\in S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}(\Lambda\varphi)(t)=\psi(t),\\ t\in[t_0-\tau,\mathrm{t}_0]\\ (\Lambda\varphi)(t)=\psi(t_0)+\int_{t_0}^{t}F(u,\varphi(u).\varphi(u-\tau))du,\\ t\in[t_0,\mathrm{T}]\end{cases} \qquad (۳,۴)$$

چون φ پیوسته است، $\Lambda\varphi$ نیز پیوسته است؛ پس $\Lambda\varphi\in S$. برای هر $\varphi,\mu\in S$ و

$$M_{\varphi,\mu}\in\{M\in[0,\infty);|\varphi(t)-\mu(t)|\le M,\forall t\in I\}$$

از رابطه (۳,۴) داریم:

$$\begin{aligned}&|(\Lambda\varphi)(t)-(\Lambda\mu)(t)|\\ &=\left|\int_{t_0}^{t}\{F(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau))-F(u,\mu(u),\mu(u-\tau)\}du\right|\\ &\le\int_{t_0}^{t}\left|\{F(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau))-F(u,\mu(u),\mu(u-\tau)\}\right|du\\ &\le L_1\int_{t_0}^{t}|\varphi(u)-\mu(u)|du+L_2\int_{t_0}^{t}|\varphi(u-\tau)-\mu(u-\tau)|du\\ &\le((\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2)TM_{\varphi,\mu},t\in[t_0,T]\end{aligned}$$

و

$$|(\Lambda\varphi)(t)-(\Lambda\mu)(\mathrm{t})|=\psi(t)-\psi(t)=0,t\in[t_0-\tau,\mathrm{t}_0]$$

بنابراین

$$|(\Lambda\varphi)(t)-(\Lambda\mu)(t)|\le(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2)\,\mathrm{T}\mathrm{d}_1(\varphi,\mu).$$

چون $0<T(L_1+L_2)<1$، Λ انقباضی اکید روی S است.

فرض کنید $\xi\in S$ داده شده باشد. از کرانداری $\xi(t)$ و $F(t,\xi(t),\xi(t-\tau))$، نشان می‌دهیم $d_1(\Lambda\xi,\xi)<\infty$. بااستفاده از قضیه ۲,۲ تابع پیوسته $y_0:I\to\mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه در

(S,d_1)، $\Lambda^n\xi \to y_0$ و $\Lambda y_0 = y_0$ یعنی y_0 در

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t-\tau)), t \in [t_0, \mathrm{T}], \\ y_0(t) = \psi(t), t \in [t_0 - \tau, \mathrm{t}_0] \end{cases}$$

صدق می‌کند. چون g, ξ در I کراندارند، پس $d_1(\xi, g) < \infty$. لذا به وضوح برای هر $t \in [t_0, T]$:

$$-\varepsilon E_q(\mathrm{t}^q) \le \mathrm{y}'(\mathrm{t}) - \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{y}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}-\tau)) \le \varepsilon \mathrm{E}_q(t^q).$$

اگر از طرفین نامساوی بالا از t_0 تا t انتگرال بگیریم، داریم:

$$-\varepsilon \int_{t_0}^{t} E_q(\mathrm{u}^q) du \le \int_{t_0}^{t} y'(\mathrm{u}) du - \int_{t_0}^{t} F(\mathrm{u}, y(t), y(\mathrm{u}-\tau)) du$$
$$\le \varepsilon \int_{t_0}^{t} E_q(\mathrm{u}^q) du$$

و لذا

$$|(\Lambda y)(t) - y(t)| \le \varepsilon \int_{t_0}^{t} E_q(u^q) du$$
$$= \int_{t_0}^{t} \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{kq}}{\Gamma(kq+1)} du = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(kq+1)} \int_{t_0}^{t} u^{kq} du$$
$$= \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{kq+1} - t_0^{kq+1}}{\Gamma(kq+2)} \le \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{kq}}{\Gamma(kq+1)} = \varepsilon E_q(t^q)$$
$$= d_1(y, y_0) \le \frac{1}{1 - T(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)} d_1(\Lambda y, y)$$
$$\le \frac{\varepsilon E_q(t^q)}{1 - T(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)}$$

و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

در قضیه‌ی زیر نرم بیلکی را که به صورت زیر تعریف می‌شود را به کار می‌بریم.

$$\|x\|_B := \max_{t \in J} \left\{ |x(t)| e^{-\theta t}; \theta > 0; J \subset \mathbb{R}_+ \right\}$$

قضیه ۳،۳. برای $I = [-\tau, T]$، فرض کنید $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد که در شرط لیپشیتز زیر

$$F(t,x,y) - F(t,\mathrm{z},\mathrm{w}) \le \mathrm{L}_1 |x - z| + L_2 |y - w|$$

برای هر $(t,x,y),(t,z,w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و $0 < T(L_1 + L_2) < 1$ صدق کند $\varepsilon \ge 0$ ، $\psi \in C[t_0 - \tau, t_0]$ و L_1, L_2 ثابت‌های مثبت هستند. فرض کنید تابع پیوسته‌ی $y: I \to \mathbb{R}$ در

$$\left| y'(t) - F(t, y(t), y(t-\tau)) \right| < \varepsilon \mathrm{E}_q(\mathrm{t}^q), t \in [t_0, \mathrm{T}],$$
$$|y(t) - \psi(t)| < \varepsilon \mathrm{E}_q(\mathrm{t}^q), t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

صدق کند که $\mathrm{E_q}$ تابع میتاگ- لفلر است، در این صورت معادله‌ی (۱،۱) پایدار میتاگ- لفلر- یرز- اولام با نرم بیلکی می‌باشد.

برهان. اثبات قطعه مشابه اثبات قضیه‌ی ۳،۲ می‌باشد، کافیست نشان دهیم که Λ تعریف شده یک نگاشت انقباضی اکید روی S نسبت به نرم بیلکی است. به عبارتی

$$|(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)|$$
$$\le \left| \int_{t_0}^{t} \{ F(u, \varphi(u), \varphi(u-\tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u-\tau)) \} du \right|$$
$$\le \int_{t_0}^{t} \left| \{ F(u, \varphi(u), \varphi(u-\tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u-\tau)) \} \right| du$$
$$\le L_1 \int_{t_0}^{t} e^{\theta u} |\varphi(u) - \mu(u)| e^{-\theta u} du$$
$$+ L_2 \int_{t_0}^{t} e^{\theta u} |\varphi(u-\tau) - \mu(u-\tau)| e^{-\theta u} du$$
$$\le (L_1 + L_2) \|\varphi - \mu\|_B \int_{t_0}^{t} e^{\theta u} du$$
$$\le \frac{(L_1 + L_2)}{\theta} \|\varphi - \mu\|_B e^{\theta t}$$

در اینصورت برای هر $t \in I$:

$$|(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| e^{-\theta t} \le \frac{(L_1 + L_2)}{\theta} \|\varphi - \mu\|_B .$$

بنابراین

$$d_1(\Lambda\varphi, \Lambda\mu) \le \frac{(L_1 + L_2)}{\theta} \|\varphi - \mu\|_B .$$

پس می‌توان نتیجه گرفت برای هر $\varphi, \mu \in S$،

$$d_1(\Lambda\varphi, \Lambda\mu) \le \frac{(L_1+L_2)}{\theta} d_1(\varphi, \mu)$$

با توجه به فرض $0 < \frac{(L_1+L_2)}{\theta} < 1$ می‌توان نتیجه گرفت که Λ نگاشت انقباضی اکید است و با روندی مشابه روند قضیه‌ی ۳,۲ داریم:

$$d_1(y,y_0) \le \frac{\theta}{\theta-(L_1+L_2)} d_1(\Lambda y, y) \le \frac{\theta}{\theta-(L_1+L_2)} \varepsilon E_q(t^q)$$

و این نشان می‌دهد که معادله‌ی (۱,۱) میتاگ-لفلر- یرز - اولام پایدار با نرم بیلکی می‌باشد. □

۴. پایداری میتاگ- لفلر- یرز- اولام- راسیاس

در این بخش به بررسی پایداری میتاگ- لفلر- یرز- اولام- راسیاس می‌پردازیم. در ابتدا این مفهوم را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴,۱. برای $I = [-\tau, T]$، فرض کنید $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع و $\varphi: I \to (0,\infty)$ تابعی پیوسته باشد و فرض کنید $\psi \in C[-\tau, 0]$ و K, M, L_1, L_2 ثابت‌های مثبتی باشند که $0 < K(L_1+L_2) < 1$ و برای هر $t \in I = [-\tau, T]$، $\left|\int_0^t \varphi(u)du\right| \le K\varphi(t)$ و $\left|(\int_0^t (\varphi(u))^{\frac{1}{1-p}}du)^{1-p}\right| \le M\varphi(t)$ که E_q تابع میتاگ-لفلر است. همچنین فرض کنید تابع پیوسته‌ی $y: I \to \mathbb{R}$ در

$$\left|y'(t) - F(t, y(t), y(t-\tau))\right| < \varepsilon\varphi(t)E_q(t^q), t \in [t_0, T],$$
$$\left|y(t) - \psi(t)\right| < \varepsilon\varphi(t)E_q(t^q), t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

صدق کند. گوییم معادله دیفرانسیل تاخیری مرتبه اول دارای پایداری میتاگ- لفلر- یرز- اولام- راسیاس است اگر تابع پیوسته‌ی منحصربه فرد $y_0: I \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $t \in I$:

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t-\tau)), \\ t \in [0, T] \\ y_0(t) = \psi(t), \\ t \in [-\tau, 0] \end{cases} \qquad (۴,۱)$$

$$\left|y(t) - y_0(t)\right| \le \frac{\varepsilon E_q(t^q)}{1-K(L_1+L_2)} M\varphi(t) \qquad (۴,۲)$$

قضیه ۴,۲. برای $I = [-\tau, T]$، فرض کنید $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد که در شرط لیپشیتز زیر

$$F(t,x,y) - F(t,z,w) \le L_1|x-z| + L_2|y-w|$$

برای هر $(t,x,y), (t,z,w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ صدق کند. فرض کنید $\varphi: I \to (0,\infty)$ تابعی پیوسته باشد و فرض کنید $\psi \in C[-\tau, 0]$ و K, M, L_1, L_2 ثابت‌های مثبتی باشند که $0 < K(L_1+L_2) < 1$ و برای هر $t \in I = [-\tau, T]$ و $\left|\int_0^t \varphi(u)du\right| \le K\varphi(t)$ و $\left|(\int_0^t (\varphi(u))^{\frac{1}{1-p}}du)^{1-p}\right| \le M\varphi(t)$ که E_q تابع میتاگ- لفلر است. در این صورت تابع پیوسته‌ی منحصربه فرد $y_0: I \to \mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه برای هر $t \in I$:

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t-\tau)), t \in [0, T] \\ y_0(t) = \psi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

و

$$\left|y(t) - y_0(t)\right| \le \frac{\varepsilon E_q(t^q)}{1-K(L_1+L_2)} M\varphi(t)$$

برهان. فرض کنید C فضای توابع پیوسته $\varphi: I \to \mathbb{R}$ باشد و مجموعه‌ی S را به صورت

$$S=\{\varphi: I\to\mathbb{R}, \varphi\in C, \varphi(t)=\psi(t), \forall t\in[-\tau,0]\}$$

تعریف می‌کنیم. متر تعمیم یافته روی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(\varphi,\mu)= \inf\left\{\begin{array}{l}M\in[0,\infty): |\varphi(t)-\mu(t)|\le M\varphi(t),\\ \forall t\in I\end{array}\right\} \qquad (۴,۳)$$

در این صورت (S,d) فضای متریک تعمیم یافته است.

عملگر $\Lambda:S\to S$ را برای هر $\varphi\in S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(\Lambda\varphi)(t)=\psi(t), t\in[-\tau,0], \qquad (۴,۴)$$
$$(\Lambda\varphi)(t)= \psi(0)+\int_0^t F(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau))\,du, \quad t\in[0,T]$$

چون φ پیوسته است، $\Lambda\varphi$ نیز پیوسته است، پس $\Lambda\varphi\in S$. برای هر $\varphi,\mu\in S$.

$$\begin{aligned}
&|(\Lambda\varphi)(t)-(\Lambda\mu)(t)|\\
&=\left|\int_0^t\{F(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau))-F(u,\mu(u),\mu(u-\tau))\}du\right|\\
&\le\int_0^t\left|\{F(u,\varphi(u),\varphi(u-\tau))-F(u,\mu(u),\mu(u-\tau))\}\right|du\\
&\le L_1\int_0^t|\varphi(u)-\mu(u)|du+L_2\int_0^t|\varphi(u-\tau)-\mu(u-\tau)|du\\
&\le (L_1+L_2)M\left|\int_0^t\varphi(u)du\right|\\
&\le (L_1+L_2)MK\varphi(t), t\in[0,T]
\end{aligned}$$

و

$$|(\Lambda\varphi)(t)-(\Lambda\mu)(t)|=\psi(t)-\psi(t)=0, t\in[-\tau,0]$$

بنابراین

$$d(\Lambda\varphi,\Lambda\mu)\le K(L_1+L_2)d(\varphi,\mu).$$

چون $0<K(L_1+L_2)<1$، لذا Λ تابع انقباضی اکید روی S است. برای هر $\xi(t)$ و هر $t\in I$ چون $\min_{t\in I}\varphi(t)>0$ و $F(t,\xi(t),\xi(t-\tau))$ و $\xi(t)$ روی I کراندارند و $I=[-\tau,T]$، در این صورت ثابت $0<M<\infty$ وجود دارد به طوریکه

$$\begin{aligned}
&|(\Lambda\xi)(t)-\xi(t)|=\\
&\left|\psi(\cdot)+\int_{\cdot}^t F(u,\xi(u),\xi(u-\tau))du-\xi(t)\right|\\
&\le M\varphi(t)
\end{aligned}$$

از معادله‌ی (۴,۳) نتیجه می‌شود $d(\Lambda\xi,\xi)<\infty$.
طبق قضطه ۲,۲ تابع پیوسته‌ی $y_0:I\to\mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه در (S,d)، $\Lambda^n\xi\to y_0$ و $\Lambda y_0=y_0$ یعنی y_0 در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y_0'(t)=F(t,y_0(t),y_0(t-\tau)), t\in[0,T]\\ y_0(t)=\psi(t), t\in[-\tau,0]\end{cases}$$

اگر نشان دهیم $S=\{g\in S: d(\xi,g)<\infty\}$، قضیه ۲,۲ نشان می‌دهد که تابع پیوسته‌ی منحصربه فرد y_0 در (۴,۱) صدق می‌کند. برای هر $g\in S$ چون g,ξ روی I کراندارند در این صورت $0<M_g<\infty$ وجود دارد به طوریکه برای هر $t\in I$،

$$|\xi(t)-g(t)|\le M_g\varphi(t).$$

این نتیجه می‌دهد که برای $g\in S$، $d(\xi,g)<\infty$ و $S=\{g\in S: d(\xi,g)<\infty\}$. به وضوح برای هر $t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon\varphi(t)E_q(t^q)\le\\
&y'(t)-F(t,y(t),y(t-\tau))\le\\
&\varepsilon\varphi(t)E_q(t^q)
\end{aligned}$$

اگر از طرفین نامساوی بالا از 0 تا t برای هر $t\in I$ انتگرال بگیریم، داریم:

$$|(\Lambda y)(t)-y(t)|\le\int_0^t\varepsilon\varphi(u)E_q(u^q)du$$

$$= \int_0^t \varepsilon\varphi(u)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{kq}}{\Gamma(kq+1)}du$$
$$= \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(kq+1)}\int_0^t \varphi(u)\,\mathrm{u}^{kq}\,du$$
$$\leq \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(kq+1)}\Big(\int_0^t (\varphi(u))^{\frac{1}{1-p}}\,\mathrm{du}\Big)^{1-p}\Big(\int_0^t (\mathrm{u}^{kq})^{\frac{1}{p}}du\Big)^{p}$$
$$\leq \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{kq}}{\Gamma(kq+1)}M\varphi(t)$$
$$\leq \varepsilon M\varphi(t)E_q(t^q).$$

از طرفی $d(\Lambda y, y) \leq \varepsilon M\,\varphi(t)E_q(t^q)$ لذا در نهایت داریم:

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1-K(L_1+L_2)}d(\Lambda y, y)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{1-K(L_1+L_2)}M\varphi(t)E_q(t^q)$$

و این نشان می‌دهد معادله‌ی (۱,۱) میتاگ- لفلر- یرز- اولام- راسیاس پایدار است. □

فهرست منابع

[1] C. Alsina, R. Ger. On some inequalities and stability results related to the exponential function. J. Inequal. Appl. 2: 373-380(1998)

[2] N. Eghbali, V. Kalvandi, J. M. Rassias. A fixed point approach to the Mittag-Leffler-Hyers-Ulam stability of a fractional integral equation. Open Math. 14: 237-246(2016)

[3] D. H. Hyers. On the stability of the linear functional equation. Proc. Nat. Acad. Sci. 27: 222-224(1941)

[4] Th. M. Rassias. On the stability of linear mapping in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 72: 297-300(1978)

[5] S. M. Ulam. A Collection of Mathematical Problems. Interscience Publishers, New York (1968)