

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## حل شبه تحلیلی معادله دیفرانسیل فازی پینلیو

سمانه محمدزاده<sup>۱</sup>، محمد ادبی تبار فیروزجاه<sup>۲\*</sup>، علی حسین‌زاده<sup>۱</sup>، بهرام عاقلی<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان، لاهیجان، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائمشهر، قائمشهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۳/۲۶

### چکیده

در این مقاله معادله دیفرانسیل پینلیو نوع اول را در نظر می‌گیریم که مقادیر شرایط مرزی در این مقاله مقدار فازی هستند و هدف محاسبه جواب تقریبی برای آن می‌باشد. برای این منظور ابتدا با استفاده از اعمال حسابی روی داده‌های فازی، معادله دیفرانسیل پینلیو را به سه دستگاه معادلات دیفرانسیل با داده‌های دقیق تبدیل می‌کنیم و در ادامه با استفاده از روش تمیمی و انصاری (TAM)، جواب تقریبی دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل شده را محاسبه و به جواب تقریبی فازی از معادله دیفرانسیل پینلیو می‌رسیم. در پایان خطا و همگرایی را با یافتن جواب تقریبی نشان می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** معادله دیفرانسیل پینلیو، معادله دیفرانسیل فازی، روش تکراری.

۱. مقدمه

بسیاری از معادلات دیفرانسیل وجود دارند که ارتباط بین زمینه‌های مختلف ریاضیات و فیزیک نظری را برقرار می‌کنند. از جمله معادلات دیفرانسیل معروف مرتبه دوم در این زمینه، معادلات دیفرانسیلی است که توسط پانول پینلیو (Paul Painlevé) در سال‌های بین ۱۹۱۰-۱۸۹۵ معرفی گردید و مورد بررسی قرار گرفت [۱،۲]. معادلات دیفرانسیل در نظر گرفته شده توسط این دانشمند فرانسوی یک کلاس از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی می‌باشد.

پینلیو با مطالعه و بررسی مقالاتی که در سال‌های ۱۸۹۳ به مدت ده سال منتشر شده بود به این حقیقت دست یافت که ۴۴ معادله از ۵۰ معادله قابل کاهش یافتن هستند و فقط حل شش تای از آن معادلات نیاز به معرفی توابع خاص جدید دارند. این شش معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی به معادلات دیفرانسیل پینلیو معروف هستند. این معادلات و راه حل آنها می‌تواند نتایج خوبی در زمینه فیزیک و ریاضیات و ارتباط بین آنها برقرار کند. نمونه‌هایی از کاربردهای این معادلات عبارتند از: مکانیک آماری، فیزیک پلاسما، امواج غیر خطی، گرانش کوانتومی، نظریه پراکندگی، نسبیت عام و فیبرهای نوری [۳-۸].

اولین معادله دیفرانسیل پینلیو عبارت است از [۹،۱۰]:

$$PI : w''(z) = 6w^2(z) + z$$

با شرایط مرزی

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1.$$

از جمله کاربردهای مهم معادله دیفرانسیل می‌توان در مدل‌سازی شوک‌های چسبناک (Viscous shock) در جریان هله شاو (Hele schow) و همچنین پدیده‌های استوکس (stocks) [۱۱].

انشعاب در مدل غیرانتگرالی غیرخطی [۱۲]. مدل‌های ماتریسی جاذبه کوانتومی با محدودیت پیوستگی [۱۳،۱۴] اشاره کرد.

از طرفی را می‌توان از معادله دیفرانسیل بوسینک (Boussinesq equation) [۱۵،۱۶]

$$u_{tt} = u_{xx} - 6(u^2)_{xx} + u_{xxx},$$

با تغییر متغیر و فرض که یک ثابت دلخواه می‌باشد به دست آورد. لذا خواهیم داشت

$$w''(z) = 6w^2(z) + (c^2 - 1)w(z) + Az + B,$$

که و ثابت‌های انتگرال‌گیری می‌باشند.

دومین معادله دیفرانسیل پینلیو عبارت است از:

$$PII : w''(z) = 2w^3(z) + zw(z) + \mu,$$

با شرایط مرزی

$$w(0) = 1, \quad w'(0) = 0,$$

که  $\mu$  مقدار ثابتی می‌باشد.

از جمله تحقیقات انجام شده برای نوع  $PI$  می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

در [۱۷] سریاپورتا و نونز از روش مجانبی هموتوپی بهینه (OHAM) برای محاسبه جواب‌های تقریبی استفاده کردند. راجا و همکارانش روش عددی تصادفی ارائه کردند که در آن فرموله‌بندی ریاضی به کمک شبکه‌های عصبی (ANNs) صورت گرفته است [۱۸]. روش محاسباتی دیگر توسط راجا و همکارانش از سه مدل متفاوت شبکه‌های عصبی در [۱۹] ارائه شده است. سه روش تکراری انصاری و تیمیمی (TAM)، دفتردار و جعفری (DJM) و روش انقباض باناخ (BCM) سه روشی هستند که توسط ال جاوری و همکارانش برای محاسبه جواب‌های تقریبی پیشنهاد شدند [۲۰]. کلوونینسکی و قوینی به منظور به دست آوردن حل عددی، یک الگوی تقسیم مقارن استفاده نمودند [۲۱]. در [۲۲] روش

با شرایط مرزی

$$\tilde{w}(0) = \tilde{I}, \quad \tilde{w}'(0) = \tilde{O}, \quad (2)$$

که  $\tilde{w}(z)$  تابع فازی،  $\tilde{O}$  صفر فازی و  $\tilde{I}$  عدد یک فازی می‌باشد.

## ۲- مقدمات

در این بخش برخی نمادها، تعاریف و نتایج را که در ادامه مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند، ذکر می‌شوند.

تعریف ۱-۲ عدد فازی، نگاشتی است بصورت

$$u: \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \quad \text{که در روابط زیر صادق می‌باشد} \quad (32)$$

(۱)  $u$  نیم پیوسته بالایی است.

(۲) خارج از  $[c,d] \subset \mathbb{R}$  داریم  $u(t) = 0$ .

(۳) اعداد حقیقی  $a$  و  $b$  وجود دارند به طوری که  $c \leq a \leq b \leq d$  در این صورت

i.  $u(t)$  یکنوا افزایشی روی  $[c,a]$  است.

ii.  $u(t)$  یکنوا کاهشی روی  $[b,d]$  است.

iii.  $u(t) = 1$  یکنوا کاهشی روی  $a \leq t \leq b$  است.

تعریف ۲-۲ عدد فازی  $\tilde{u}$  را ذوزنقه‌ای گوئیم هرگاه

تابع عضویت آن به صورت زیر باشد [۳۲]:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t-c}{a-c} & c \leq t \leq a \\ 1 & a \leq t \leq b \\ \frac{d-t}{d-b} & b \leq t \leq d \\ 0 & t \notin [c,d] \end{cases}$$

و با  $\tilde{u} = (c, a, b, d)$  نشان می‌دهیم. اگر

$a = b$  باشد عدد فازی را مثلثی گوئیم و با

$\tilde{u} = (c, a, d)$  نشان می‌دهیم.

تکراری تغییرات (VIM) و روش اختلال هموتوپیی (HPM) برای تهیه جواب‌های تقریبی توسط حسام الدینی و پیروی به کار گرفته شده‌اند. پیین و همکارانش در [۲۳] ترکیبی از موجک لژاندر و روش تکراری پیکارد جهت یافتن جواب‌های تقریبی ارائه دادند. در یک مطالعه عرفانیان و منصوره جهت یافتن جواب‌های تقریبی از ویژگی‌های توابع هار گویا شده و ماتریس عملگر استفاده کردند [۲۴]. در [۲۵] ساکا و سولیه به کمک روش تبدیل دیفرانسیل تیلور جواب‌های عددی معادله را ارائه کردند. همچنین علاقه مندان مقالات می‌توانند روش‌های دیگری را در مراجع [۲۶-۲۹] مطالعه کنند.

مفهوم و نظریه مجموعه‌های فازی توسط زاده معرفی شد [۳۰، ۳۱] و در ادامه اعداد فازی و اعمال محاسباتی مطرح گردید. از جمله کاربردهای مهم اعداد فازی که در همان ابتدا مورد توجه قرار گرفت به کارگیری آن در کنترل فازی و مسایل استدلال تقریبی می‌باشد [۳۲].

در فرموله کردن معادلات دیفرانسیل، پارامترها، متغیرها و شرایط اولیه و شرایط مرزی به‌طور دقیق تعیین یا تعریف می‌شوند. اما در حقیقت، به دلیل خطاهای آزمایشی و اندازه‌گیری، این پارامترها ممکن است مبهم و نامشخص باشند، که منجر به معادلات دیفرانسیل فازی می‌شوند. در سال‌های اخیر، به دلیل کاربرد فراوان معادلات دیفرانسیل فازی در بسیاری از مسایل علوم و مهندسی به‌طور مفصل مورد توجه و مطالعه محققان قرار گرفته‌اند. برخی از این مقالات و یافته‌ها را می‌توان در مطالعات قبلی یافت [۳۳-۴۲].

انگیزه اصلی این مقاله استفاده از روش تمیمی و انصاری TAM [۲۰] برای معادله دیفرانسیل فازی پینلیو نوع

$$FPI: \tilde{w}''(z) = 6\tilde{w}^2(z) + z, \quad (1)$$

$$\tilde{u} = (u(1), u_*, u^*)$$

و

$$\tilde{v} = (v(1), v_*, v^*)$$

چهار عمل اصلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۲]

$$\tilde{u} * \tilde{v} = (u(1) * v(1), \max\{u_*, v_*\}, \max\{u^*, v^*\})$$

که \* یکی از چهار عمل اصلی است.

### ۳- روش تمیمی و انصاری و معادله دیفرانسیل

#### فازی پینلیو

روش‌های تقریبی زیادی توسط محققین و دانشمندان برای معادلات دیفرانسیل نوشته شده‌اند. خوانندگان علاقمند می‌توانند مراجع را مطالعه کنند [۴۳-۴۶]. در این بخش روش تمیمی و انصاری و حل عددی معادله دیفرانسیل فازی پینلیو به کمک آن بیان می‌گردد.

#### ۳-۱. روش تمیمی و انصاری TAM

در این زیر بخش به معرفی روش TAM پرداخته خواهد شد. با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل غیرخطی

$$L[w(z)] = N[w(z)] + h(z),$$

با شرایط مرزی  $B\left(w, \frac{dw}{dz}\right) = 0$  که

$L[w(z)]$  قسمت خطی تابع مجهول  $w(z)$ ،  $N[w(z)]$  قسمت غیرخطی تابع مجهول  $w(z)$  و تابع  $h(z)$  تابع معلوم برحسب متغیر مستقل  $z$  می‌باشند.

در روش TAM برای یافتن جواب‌های تکراری (۱) از فرض اولیه  $w_0(z)$  شروع کرده و دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شود:

تعریف ۲-۳ برای  $0 < r \leq 1$  -تراز عدد فازی  $\tilde{u}$  را با  $[\tilde{u}]^r$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\tilde{u}]^r = \{t \in \mathbb{R} \mid u(t) \geq r\}.$$

برای عدد فازی ذوذنقه‌ای  $\tilde{u} = (c, a, b, d)$ ،  $[\tilde{u}]^r = [c + (a-c)r, d + (b-d)r]$  و برای عدد فازی مثلثی  $[\tilde{u}]^r = [c + (a-c)r, d + (a-d)r]$ ،  $\tilde{u} = (c, a, d)$

تعریف ۲-۴ فرم پارامتری یک عدد فازی به صورت زوج مرتب  $\tilde{u} = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$  نمایش داده می‌شود که در شرایط زیر صادق می‌باشد [۳۲].

i. تابع  $\bar{u}(r)$  روی  $[0, 1]$  تابع چپ پیوسته، کران دار و نازولی می‌باشد.

ii. تابع  $\underline{u}(r)$  روی  $[0, 1]$  تابع چپ پیوسته، کران دار و نازولی می‌باشد.

iii. برای  $0 \leq r \leq 1$  نامساوی زیر برقرار است:

$$\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r).$$

تعریف ۲-۵ برای عدد فازی

$$\tilde{u} = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$$

عدد

$$u(1) = \frac{1}{2}(\underline{u}(1) + \bar{u}(1))$$

شاخص مرکزی عدد فازی  $\tilde{u}$  نامیده می‌شود و تابع چپ پیوسته نازولی  $u_* = u(1) - \underline{u}(r)$  تابع شاخص فازی شده چپ و تابع چپ پیوسته نازولی  $u^* = \bar{u}(r) - u(1)$  تابع شاخص فازی شده راست نامیده می‌شود [۳۲].

با توجه به تعریف ۲-۳ هر عدد فازی را می‌توان به صورت  $\tilde{u} = (u(1), u_*, u^*)$  نمایش داد.

تعریف ۲-۶ برای دو عدد فازی دلخواه

$$\tilde{\beta} = (\beta(1), \beta_*, \beta^*)$$

$$\alpha_* = \alpha(1) - \underline{\alpha}(r),$$

$$\alpha^* = \bar{\alpha}(r) - \alpha(1)$$

$$\beta_* = \beta(1) - \underline{\beta}(r),$$

$$\beta^* = \bar{\beta}(r) - \beta(1)$$

$$w_*(z) = w(1, z) - \underline{w}(r, z),$$

$$w^*(z) = \bar{w}(r, z) - w(1, z).$$

$$L[\tilde{w}(z)] = (w''(1, z), w_*''(z), w^{*''}(z))$$

$$w_*''(z) = w''(1, z) - \underline{w}''(r, z),$$

$$w^{*''}(z) = \bar{w}''(r, z) - w''(1, z)$$

$$N[\tilde{w}(z)] = 6(w^2(1, z), w_*(z), w^*(z)).$$

با جایگذاری در به کمک مجموع و برابری دو عدد فازی خواهیم داشت:

$$E_1 : \begin{cases} w''(1, z) = 6\tilde{w}^2(1, z) + z, \\ w(1, a) = \alpha(1), \\ w'(1, a) = \beta(1) \end{cases}$$

$$E_2 : \begin{cases} w_*''(z) = 6(w_*(z)), \\ w_*(a) = \alpha_*, \\ w_*'(a) = \beta_* \end{cases}$$

$$E_3 : \begin{cases} w^{*''}(z) = 6(w^*(z)), \\ w^*(a) = \alpha^*, \\ w^{*'}(a) = \beta^* \end{cases}$$

با بکارگیری روش TAM برای  $E_1, E_2$  و  $E_3$  سه دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر برای  $n = 0, 1, 2, \dots$  حاصل می‌شود:

که

و

و

لذا

$$\begin{cases} L[w_0(z)] + h(z) = 0, \\ B\left(w_0, \frac{dw_0}{dz}\right) = 0, \\ L[w_1(z)] = N[w_0(z)] + h(z), \\ B\left(w_1, \frac{dw_1}{dz}\right) = 0, \\ L[w_2(z)] = N[w_1(z)] + h(z), \\ B\left(w_2, \frac{dw_2}{dz}\right) = 0, \\ \vdots \\ L[w_{n+1}(z)] + N[w_n(z)] + h(z) = 0, \\ B\left(w_{n+1}, \frac{dw_{n+1}}{dz}\right) = 0. \end{cases}$$

برای حل تقریبی کفایت حد زیر در نظر گرفته شود:

$$w(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z).$$

### ۲-۳. معادله دیفرانسیل فازی پینلیو

در این زیر بخش معادله دیفرانسیل فازی پینلیو را به صورت کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$FPI : \begin{cases} \tilde{w}''(z) = 6\tilde{w}^2(z) + z, \\ \tilde{w}(a) = \tilde{\alpha}, \tilde{w}'(a) = \tilde{\beta} \end{cases}$$

که  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  دو عدد فازی معلوم و

$$L[\tilde{w}(z)] = \tilde{w}''(z),$$

$$N[\tilde{w}(z)] = 6\tilde{w}^2(z),$$

و هدف تقریب تابع

$$\tilde{w}(z) = (w(1, z), w_*(z), w^*(z))$$

می‌باشد. فرض کنید:

$$\tilde{\alpha} = (\alpha(1), \alpha_*, \alpha^*)$$

$$\begin{cases} w''_{n+1}(1, z) = 6\tilde{w}''_n(1, z) + z, \\ w_{n+1}(1, 0) = 0, \\ w'_{n+1}(1, 0) = 1, \\ w''_0(1, z) = z \end{cases}$$

$$w_0(1, z) = \frac{z^3}{6} + z,$$

$$w_1(1, z) = \frac{z^8}{336} + \frac{z^6}{15} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^3}{6} + z,$$

$$w_2(1, z) = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{15} + \frac{z^7}{7}$$

$$+ \frac{z^8}{336} + \frac{z^9}{40} + \frac{z^{10}}{60} + \frac{71z^{11}}{46200} + \frac{z^{12}}{330} +$$

$$\frac{z^{13}}{26208} + \frac{187z^{14}}{764400} + \frac{z^{16}}{100800}$$

$$+ \frac{z^{18}}{5757696},$$

$$\vdots$$

به کمک حل دستگاه  $TAM E_2$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} w''_{n+1^*}(z) = 6(w_n^*(z)), \\ w_{n+1^*}(0) = 1-r, \\ w'_{n+1^*}(0) = 1-r, \\ w''_0(z) = 0 \end{cases}$$

$$w_{0^*}(z) = (1-r)z + 1-r,$$

$$w_{1^*}(z) = (1-r)z^3 + 3(1-r)z^2$$

$$+ (1-r)z + 1-r,$$

$$w_{2^*}(z) = \frac{3}{8}(1-r)z^5 + \frac{3}{2}(1-r)z^4$$

$$+ (1-r)z^3 + 3(1-r)z^2$$

$$+ (1-r)z + 1-r,$$

$$\vdots$$

به کمک حل دستگاه  $TAM E_3$ ، خواهیم داشت:

$$TAM E_3 : \begin{cases} w''_{n+1^*}(z) = 6(w_n^*(z)), \\ w_{n+1^*}(0) = 1-r, \\ w'_{n+1^*}(0) = 1-r, \\ w''_0(z) = 0 \end{cases}$$

$$TAM E_1 : \begin{cases} w''_{n+1}(1, z) = 6\tilde{w}''_n(1, z) + z, \\ w_{n+1}(1, a) = \alpha(1), \\ w'_{n+1}(1, a) = \beta(1), \\ w''_0(1, z) = z \end{cases}$$

$$TAM E_2 : \begin{cases} w''_{n+1^*}(z) = 6(w_n^*(z)), \\ w_{n+1^*}(a) = \alpha_*, \\ w'_{n+1^*}(a) = \beta_*, \\ w''_0(z) = 0 \end{cases}$$

$$TAM E_3 : \begin{cases} w''_{n+1^*}(z) = 6(w_n^*(z)), \\ w_{n+1^*}(a) = \alpha^*, \\ w'_{n+1^*}(a) = \beta^*, \\ w''_0(z) = 0. \end{cases}$$

که  $w_0(1, z)$  و  $w_{n+1}(1, z)$  از  $TAM E_1$  حاصل می‌شوند.

#### ۴- حل عددی مساله

در این بخش به محاسبه حل عددی معادله دیفرانسیل فازی پینلیو نوع  $FPI$  به کمک روش TAM می‌پردازیم.

۱-۳ مثال معادله دیفرانسیل فازی پینلیو نوع  $FPI$  زیر را در نظر بگیرید:

$$FPI : \begin{cases} \tilde{w}'(z) = 6\tilde{w}''(z) + z, \\ \tilde{w}(0) = (-1, 0, 1), \tilde{w}'(0) = (0, 1, 2) \end{cases}$$

برای یافتن جواب عددی به کمک روش TAM می‌توان نوشت:

$$\tilde{w}(0) = (-1, 0, 1) = (0, 1-r, 1-r),$$

$$\tilde{w}'(0) = (0, 1, 2) = (1, 1-r, 1-r),$$

$$L[\tilde{w}(z)] = \tilde{w}''(z),$$

$$N[\tilde{w}(z)] = 6\tilde{w}''(z).$$

به کمک حل دستگاه، خواهیم داشت:

بیان شده است.

نمودار جواب واقعی و تقریبی در ۱-تراز در نمودار ۱-۱ و نمودار تابع چپ  $(w_-(1,z))$ ، نمودار تابع راست  $(w_+(1,z))$  و تابع وسط  $(w(1,z))$  در ۱-۱ تراز نیز در نمودار ۱-۲ نمایش داده شده‌اند. شکل جواب فازی در تکرار پنجم در نمودار ۱-۳ و در نهایت خطای مطلق آن در نمودار ۱-۴ نشان داده شده است.

$$w_0^*(z) = (1-r)z + 1-r,$$

$$w_1^*(z) = (1-r)z^3 + 3(1-r)z^2 + (1-r)z + 1-r,$$

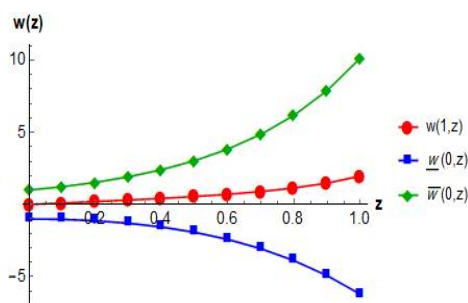
$$w_2^*(z) = \frac{3}{8}(1-r)z^5 + \frac{3}{2}(1-r)z^4 + (1-r)z^3 + 3(1-r)z^2 + (1-r)z + 1-r,$$

$$\vdots$$

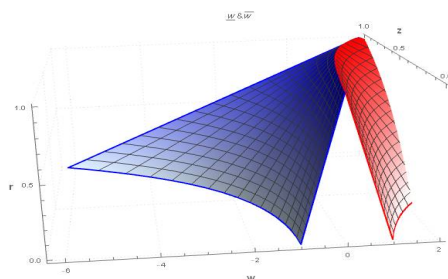
تقریب جواب مثال ۱-۳ تا تکرار ۵ را در جدول ۱-۱

جدول ۱-۱: نتایج عددی تقریب مثال ۱-۳ تا تکرار ۵

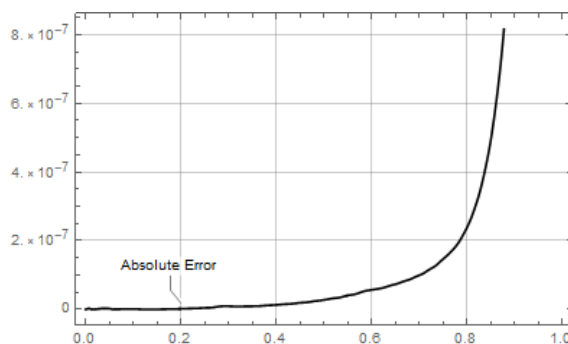
$z$	$w_-(0,z)$	$w_+(0,z)$	$w(1,z)$	Mathematica	Absolut Error
$z = 0$	-1	1	0	0	0
$z = 0.2$	-1.12838	1.53266	0.202139	0.202139	$1.8554 \times 10^{-9}$
$z = 0.4$	-1.56281	2.41078	0.4239	0.4239	$13.0158 \times 10^{-9}$
$z = 0.6$	-2.42105	3.83796	0.708462	0.708462	$57.1301 \times 10^{-9}$
$z = 0.8$	-3.89192	6.18473	1.14653	1.14653	$238.246 \times 10^{-9}$
$z = 1.0$	-6.21779	10.1415	1.96313	1.96313	$11.1833 \times 10^{-6}$



نمودار ۱-۲: نتایج عددی تقریب مثال ۱-۳ تا تکرار ۵ برای ۱-تراز



نمودار ۱-۳: نتایج عددی تقریب مثال ۱-۳ تا تکرار ۵



نمودار ۴-۱: نمودار خطای مطلق تقریب مثال ۳-۱ تا تکرار ۵.

جدول ۲-۱: مقایسه عددی روش‌های VIM, HPM, MHPM, FTAM (n=۳) و متمتیکا برای مثال ۳-۱.

$z$	VIM	HPM	MHPM	$w(1, z)$
$z = 0$	0	0	0	0
$z = 0.1$	0.1002167477	0.1002167477	0.1002167477	0.1002167477
$z = 0.2$	0.2021394527	0.2021394527	0.2021394527	0.2021394527
$z = 0.3$	0.3086307490	0.3086307492	0.3086307492	0.3086307489
$z = 0.4$	0.4239862788	0.4239862896	0.4239862896	0.4239862788
$z = 0.5$	0.5543399110	0.5543401181	0.5543401190	0.5543399112

مزیت این روش در این است که به کمک یک فرمول تکراری با تعداد تکرار کم می‌توان جواب تقریبی مناسبی برای معادله دیفرانسیل در نظر گرفته شده پیدا کرد. ما بر این عقیده هستیم که با روش ارائه شده می‌توان به حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی دیگر و همچنین معادلات دیفرانسیل با مشتقات غیر صحیح نیز این روش را تعمیم داد.

همچنین جواب تقریبی این روش در ۱-تراز با بعضی از روش‌های دیگر مقایسه شده است که می‌توان در جدول ۲-۱ مشاهده نمود.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله روش روش تمیمی و انصاری (TAM) برای حل شبه تحلیلی معادله دیفرانسیل پینلیو نوع ۱ با شرایط اولیه فازی استفاده شده است. با استفاده از اعمال حسابی روی داده‌های فازی، معادله دیفرانسیل پینلیو فازی به سه دستگاه معادلات دیفرانسیل با داده‌های دقیق تبدیل شده است. با حل این سه دستگاه، جواب تقریبی فازی از معادله دیفرانسیل پینلیو محاسبه گردید.



- [10] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 2010.
- [11] S.-Y. lee, R. Teodorescu, P. Wiegmann, Viscous shocks in Hele-Shaw flow and stokes phenomena of Painlevé I transcendent, *Physica D* (2011), <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2010-09.017>.
- [12] Haberman R (1979) Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems. *SIAM J Appl Math* 37:69–106.
- [13] Fokas AS, Its AR, Kitaev AV (1991) Discrete painlevé equations and their appearance in quantum gravity. *Comm Math Phys* 142(2):313–344.
- [14] Paniak LD, Szabo RJ (2001) Fermionic quantum gravity. *Nucl Phys B* 593:671–725.
- [15] Ablowitz MJ, Segur H (1981) Solitons and the inverse scattering transform. SIAM, Studies in Applied Mathematics 4, Philadelphia.
- [16] Turcotte DL, Spence DA, Bau HH (1982) Multiple solutions for natural convective flows in an internally heated, vertical channel with viscous dissipation and pressure work. *Int J Heat Mass Transfer* 25(5):699-706.
- [17] Sierra-Porta, D., & Nunez, L. A. (2017). On the polynomial solution of the first Painlevé equation. *Int. J. of Applied Mathematical Research*, 6(1), 34-38.
- [18] Raja, M. A. Z., Khan, J. A., & Qureshi, I. M. (2013). Numerical treatment for Painlevé equation i using neural networks and stochastic solvers. In *Innovations in intelligent machines-3* (pp. 103-117). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [1] Painlevé, P. (1900). Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 28, 201-261.
- [2] Painlevé, P. (1902). Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme. *Acta mathematica*, 25, 1-85.
- [3] Tracy, C.A. and Widom, H., Painlevé Functions in Statistical Physics, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 2011, vol. 47, iss. 1, pp. 361–374.
- [4] Rajeev, S.G., Exact Solution of the Landau–Lifshitz Equations for a Radiating Charged Particle in the Coulomb Potential, *Ann. Phys.*, 2008, vol. 323, iss. 11, pp. 2654–2661.
- [5] Kudryashov, N.A., Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations, 2nd ed., Moscow: Institute of Computer Investigations, 2004.
- [6] Lukashovich, N.A. and Gromak, V.I., Analytical Properties of Solutions to Painlevé Equations, Moscow: Moscow Univ., 1990.
- [7] Golubev, V.V., Lectures on Analytical Theory of Differential Equations, Moscow: GITTL, 1941.
- [8] Conte, R., The painlevé Approach to Nonlinear Ordinary Differential Equations, in *The Painlevé Property. One Century Later*, Springer, 1999, pp. 77–180.
- [9] P.A. Clarkson, Painlevé Equations – Nonlinear Special Functions, *Lecture Notes in Mathematics*, 1883, Springer, Berlin, 2006.

- [26] Fornberg, B., & Weideman, J. A. C. (2011). A numerical methodology for the Painlevé equations. *Journal of Computational Physics*, 230(15), 5957-5973.
- [27] Dai, D., & Zhang, L. (2010). On tronquee solutions of the first Painlevé hierarchy. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 368(2), 393-399.
- [28] Joshi, N., & Kitaev, A. V. (2001). On Boutroux's tritronquee solutions of the first Painlevé equation. *Studies in Applied Mathematics*, 107(3), 253-291.
- [29] Novokshenov, V. Y. (2009). Pade approximations for Painlevé I and II transcendents. *Theoretical and Mathematical Physics*, 159(3), 853-862.
- [30] Chang, S. S., & Zadeh, L. A. (1996). On fuzzy mapping and control. In *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh*, 180-184.
- [31] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.
- [32] Ma, M., Friedman, M., & Kandel, A. (1999). A new fuzzy arithmetic. *Fuzzy sets and systems*, 108(1), 83-90.
- [33] Ahmadian, A., Salahshour, S., Chan, C. S., & Baleanu, D. (2018). Numerical solutions of fuzzy differential equations by an efficient Runge–Kutta method with generalized differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*, 331, 47-67.
- [34] Razvarz, S., Jafari, R., & Yu, W. (2018). Numerical solution of fuzzy differential equations with Z-numbers using fuzzy Sumudu transforms. *Adv. Sci. Technol. Eng. Syst. J.(ASTESJ)*, 3, 66-75.
- [19] Raja, M. A. Z., Khan, J. A., Siddiqui, A. M., Behloul, D., Haroon, T., & Samar, R. (2015). Exactly satisfying initial conditions neural network models for numerical treatment of first Painlevé equation. *Applied Soft Computing*, 26, 244-256.
- [20] Al-Jawary, M. A., Adwan, M. I., & Radhi, G. H. (2018). Three iterative methods for solving second order nonlinear ODEs arising in physics. *Journal of King Saud University-Science*.
- [21] Glowinski, R., & Quaini, A. (2014). On the numerical solution to a nonlinear wave equation associated with the first painlevé equation: an operator-splitting approach. In *Partial differential equations: theory, control and approximation* (pp. 243-264). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [22] Hesameddini, E., & Peyrovi, A. (2009). The use of variational iteration method and homotopy perturbation method for Painlevé equation I. *Applied Mathematical Sciences*, 3(37-40), 1861-1871.
- [23] Yin, F. K., Han, W. Y., Song, J. Q., & Cao, X. Q. (2013). Legendre wavelets-Picard iteration method for solution of nonlinear initial value problems. *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, 3(2), 127.
- [24] Erfanian, M., & Mansoori, A. (2019). Rationalized Haar wavelet bases to approximate the solution of the first Painlevé equations. *Journal of Mathematical Modeling*, 7(1), 107-116.
- [25] SAKKA, A., & SULAYH, A. (2019). On Taylor Differential Transform Method for the first painlevé equations. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS)*, 12(3), 391-408.

- [۴۲] پرنیدین، نورالدین. (۱۳۹۸). حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه  $n$  با استفاده از روش آدامز-بشفورث. پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۱۷(۵)، ۸۵-۹۴.
- [۴۳] درزی، رحمت، عاقلی، بهرام. (۱۳۹۶). یک روش تحلیلی بهینه برای حل مسائل مقدار مرزی غیرخطی بر پایه روش تغییر پارامتر پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۱۲(۳)، ۷۰-۵۵.
- [۴۴] نوروزی، خدیجه، آل‌عمرانی نژاد، سید محمد علی، سلیمانی، مهدی، فرنام، بهناز. (۱۳۹۶). محاسبه ترازهای انرژی معادلات شرودینگر خطی به روش سینک. پژوهش‌های نوین در ریاضی ۳(۱۱)، ۸۱-۹۰.
- [۴۵] بهروزی فر، محمود. (۱۳۹۸). ارائه دو مدل برای تحلیل عددی جواب معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری و مقایسه آنها. پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۵ (۲۰)، ۳۱-۴۸.
- [۴۶] عبادی، محمد علی، هاشمی‌زاده، الهام السادات، رفاهی شیخانی، امیرحسین. (۱۳۴۸). حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی منفرد غیرخطی حاصل شده در بیولوژی، از طریق ماتریس عملیاتی چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی. پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۵ (۱۹)، ۱۳۹-۱۵۰.
- [35] Jameel, A. F., Saaban, A., Altaie, S. A., Anakira, N. R., Alomari, A. K., & Ahmad, N. (2018). Solving first order nonlinear fuzzy differential equations using Optimal Homotopy Asymptotic Method. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 118(1), 49-64.
- [36] Bertone, A. M., Jafelice, R. M., de Barros, L. C., & Gomide, F. (2018). Granular approximation of solutions of partial differential equations with fuzzy parameter. *Granular Computing*, 3(1), 1-7.
- [37] da Costa, T. M., Chalco-Cano, Y., Lodwick, W. A., & Silva, G. N. (2018). A new approach to linear interval differential equations as a first step toward solving fuzzy differential. *Fuzzy Sets and Systems*, 347, 129-141.
- [38] Khastan, A., & Rodríguez-López, R. (2015). On periodic solutions to first order linear fuzzy differential equations under differential inclusions' approach. *Information Sciences*, 322, 31-50.
- [39] Ahmadian, A., Suleiman, M., Salahshour, S., & Baleanu, D. (2013). A Jacobi operational matrix for solving a fuzzy linear fractional differential equation. *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 104.
- [40] Allahviranloo, T., & Ghanbari, B. (2020). On the fuzzy fractional differential equation with interval Atangana-Baleanu fractional derivative approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 130, 109397.
- [۴۱] الهویرنلو، توفیق، احمدی، نازنین، احمدی، الهام. (۱۳۹۵). جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول تحت مشتق تعمیم یافته پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۳(۹)، ۳۳-۴۴.

