

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره چهل و هشتم، تیر و مرداد ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



بزهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## مطالعه‌ی خمیدگی گراف‌های حاصل از چند عمل گرافی

زهرا براتی<sup>۱\*</sup>، مژگان افخمی<sup>۲</sup>، کاظم خشیارمنش<sup>۳</sup>

<sup>(۱)</sup>، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران

<sup>(۳)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۰۸

### چکیده

گراف  $G = (V, E)$  را مسطح می‌گوییم هرگاه بتوان آن را بر روی صفحه چنان ترسیم کرد که یال‌های آن فقط در رئوس‌شان اشتراک داشته باشند. همچنین خمیدگی گراف  $G$ ، که آن را با نماد  $sk(G)$  نمایش می‌دهیم، برابر است با کمترین تعداد یالی که با حذف آنها از گراف  $G$ ، گراف حاصل یک گراف مسطح شود. در نظریه گراف، از این عدد به عنوان معیاری برای سنجش دوری یا نزدیکی یک گراف از مسطح بودن استفاده می‌شود. در این مقاله، خمیدگی الحاق گراف‌ها با مسیرها و دورها مورد مطالعه قرار گرفته است. در روند مطالعاتی‌مان، ابتدا، خمیدگی گراف‌های بادبزنی تعمیم یافته و گراف چرخ  $n$ -فولد را به طور کامل محاسبه کرده‌ایم. سپس چند قضیه در مورد الحاق گراف‌ها با مسیرها اثبات کرده‌ایم که با استفاده از آن‌ها خمیدگی الحاق گراف‌های کامل، گراف‌های ستاره و گراف‌های دوبخشی کامل با مسیرها، به طور کامل محاسبه شده‌اند. همچنین در مورد محاسبه‌ی خمیدگی کرونای رأسی و یالی دو گراف نیز فرمول‌های مفیدی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: خمیدگی،  $\pi$ -خمیده، الحاق دو گراف، کرونای رأسی، کرونای یالی.

۱- مقدمه

یک ترسیم<sup>۲</sup> از یک گراف  $G = (V, E)$ ، نگاشتی مانند  $D$  است که به هر رأس از گراف نقطه‌ای متمایز بر روی صفحه نسبت می‌دهد و به هر یال از گراف یک خط پیوسته (می‌تواند راست یا خمیده باشد) نسبت می‌دهد که دو رأس یال را به هم وصل می‌کند ولی از هیچ یک از رئوس دیگر عبور نمی‌کند. گراف  $G$  را مسطح<sup>۳</sup> می‌گوییم هرگاه ترسیمی داشته باشد که یال‌های آن فقط در رئوسشان اشتراک داشته باشند. چنین ترسیم مسطحی از گراف را یک ترسیم مسطح<sup>۴</sup> یا یک گراف مسطح شده<sup>۵</sup> می‌گوییم.

خمیدگی<sup>۶</sup> گراف  $G$ ، برابر است با کمترین تعداد یالی که با حذف آنها از گراف  $G$ ، گراف حاصل یک گراف مسطح شود. این عدد را با نماد  $sk(G)$  نمایش می‌دهیم. این معیار، معیار بسیار مهمی است که با آن می‌توان میزان نزدیکی یا دوری یک گراف از مسطح بودن را اندازه‌گیری کرد. خمیدگی یک گراف از نظر محاسباتی، مکمل مسأله زیرگراف مسطح بیشین است. در مسأله زیرگراف مسطح بیشین، این سؤال مطرح می‌شود که در گراف داده شده، زیرگراف مسطحی را بیابیم که بیشترین تعداد ممکن یال را داشته باشد [۱]. ثابت شده است که مسأله محاسبه‌ی خمیدگی گراف‌ها یک مسأله NP-سخت است [۲، ۳]. اما خمیدگی یک تعداد از خانواده گراف‌ها نظیر گراف‌های کامل، دوبخشی کامل، سه‌بخشی کامل و چهاربخشی کامل محاسبه شده‌اند [۴]. همچنین خمیدگی یک سری از گراف‌های پترسن تعمیم یافته نیز محاسبه شده‌اند [۵، ۶].

کمر<sup>۷</sup> گراف  $G$  را برابر با طول کوتاه‌ترین دور در گراف تعریف می‌کنیم و اگر گراف هیچ دوری نداشته باشد، آن را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$G$  یک گراف همبند با  $p$  رأس و  $q$  یال باشد و نیز کمر آن برابر  $g$  باشد. در ابتدا بیابید فرض کنیم که  $G$  یک گراف مسطح همبند با  $f$  وجه باشد. با توجه به فرمول اولر داریم:

$$q - p + f = 2.$$

چون تعداد یال هر وجه گراف، حداقل برابر با  $g$  است، با استفاده از لم دست دادن می‌توان نتیجه گرفت که  $2q \geq gf$ . بنابراین داریم:

$$q \leq \frac{g}{g-2}(p-2).$$

در نتیجه، در هر گراف نامسطح  $G$  باید داشته باشیم:

$$q - sk(G) \leq \frac{g}{g-2}(p-2).$$

و این نتیجه می‌دهد که

$$sk(G) \geq \left\lceil q - \frac{g}{g-2}(p-2) \right\rceil.$$

حال قرار می‌دهیم

$$\pi(G) = \left\lceil q - \frac{g}{g-2}(p-2) \right\rceil.$$

یکی از طبیعی‌ترین سؤال‌هایی که به نظر باید پرسیده شود این است که با چه شرایطی تساوی  $sk(G) = \pi(G)$  برقرار خواهد بود. گراف‌هایی که در آنها تساوی  $sk(G) = \pi(G)$  برقرار است را گراف‌های  $\pi$ -خمیده<sup>۸</sup> می‌گویند. دسته‌هایی از گراف‌های  $\pi$ -خمیده، گراف‌های کامل و گراف‌های کامل دوبخشی هستند [۷]. همچنین گراف‌های  $n$ -مکعبی  $Q_n$ ، نیز  $\pi$ -خمیده هستند [۸].

روند مطالعاتی ما در این مقاله به این صورت می‌باشد. در بخش دوم، تعاریف و قضایایی که مورد نیاز است را یادآوری می‌کنیم. در بخش سوم، خمیدگی برخی از گراف‌هایی که از الحاق با مسیرها و دورها به دست می‌آیند را بررسی خواهیم کرد. در این بخش

<sup>۱</sup>-skewness

<sup>۷</sup> - girth

<sup>۸</sup> -  $\pi$ -skew

<sup>۲</sup> -drawing

<sup>۳</sup> -planar

<sup>۴</sup> -plane drawing

<sup>۵</sup> -plane graph

دقت کنیم که اگر  $G \in \Pi_3$ ، در این صورت زیرگراف مسطح  $D$  به دست آمده از حذف یال‌ها، همان زیرگراف بیشین مسطح خواهد بود که هر وجه آن مثلثی است. به چنین ترسیمی یک ترسیم فراگیر مثلثی<sup>۹</sup> می‌گوییم و در آن، رابطه  $q_D = 3p - 6$  بین یال‌ها و رئوس برقرار است.

در تعریف زیر، سه تکنیک مهم را بیان کرده‌ایم که در محاسبات خمیدگی گراف‌ها بسیار به کار می‌روند [۳].

**تعریف ۲-۱:** فرض کنید  $D$  یک ترسیم مسطح از گراف  $G$  باشد.

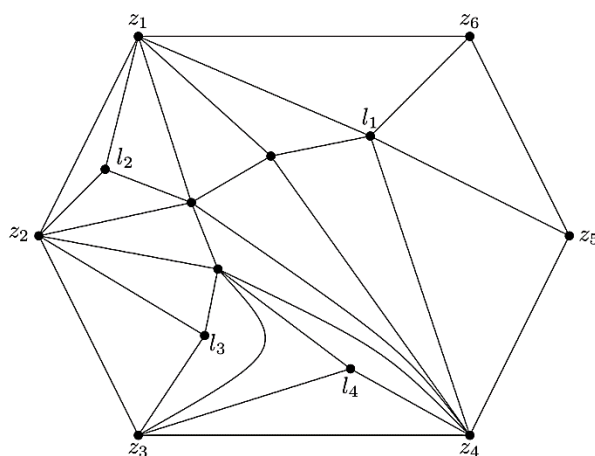
الف) برای  $f \in F(D)$ ، منظور از رأس-مثلث سازی<sup>۱۰</sup> وجه  $f$ ، قرار دادن یک رأس جدید در داخل وجه  $f$  و رسم تمامی یال‌هایی است که آن رأس جدید را به رئوس وجه  $f$  متصل می‌کند.

ب) فرض کنید  $uv$  یک یال از وجه  $f$  در  $D$  باشد. ساختن یک واکنشی<sup>۱۱</sup> بر روی این یال به این صورت انجام می‌شود که یک رأس جدید به  $D$  می‌افزاییم و سپس دو یال جدید به  $D$  اضافه می‌کنیم که این رأس را به دو سر یال  $uv$  متصل می‌کند.

خمیدگی گراف بادبزنی تعمیم یافته و چرخ  $n$ -فولد را به طور کامل محاسبه می‌کنیم. در ادامه‌ی بخش سوم در مورد الحاق گراف مسیر با گراف‌های کامل، گراف‌های ستاره و گراف‌های کامل دوبخشی صحبت خواهیم کرد. در بخش چهارم، در مورد خمیدگی کرونا‌ی رأسی و یالی دو گراف نتایج کاملی را ارائه می‌کنیم.

## ۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

در کل این مقاله، همیشه فرض می‌کنیم که  $G$  یک گراف همبند با  $p$  رأس،  $q$  یال و کمر  $g$  باشد. فرض کنیم  $D$  یک ترسیم مسطح از  $G$  باشد و  $F(D)$  مجموعه‌ی تمام وجوه  $D$  باشد. فرض کنیم  $C$  یک دور باشد.  $f \in F(D)$  را یک  $C$ -وجه می‌گوییم هرگاه مرز آن، دور  $C$  باشد. درجه  $f$ ، که آن را با نماد  $d_D(f)$  نمایش می‌دهیم، برابر با تعداد یال‌هایی تعریف می‌شود که بر روی مرز  $f$  قرار دارند، اما با این شرط که در این شمارش، هر یال از  $f$  که پل است، دو بار شمرده شود. فرض کنیم که  $G$  یک گراف  $\pi$ -خمیده با کمر  $g$  باشد. در این صورت می‌نویسیم:  $G \in \Pi_g$ . باید



شکل (۱):  $T$ -مثلث سازی یک  $C$ -وجه

<sup>۱۰</sup> fetch

<sup>۹</sup> Spanning triangulation

<sup>۱۱</sup> vertex-triangulation

فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف باشند. در این صورت الحاق<sup>۱۲</sup> این دو گراف، که آن را با نماد  $G+H$  نمایش می‌دهیم، گرافی است که در آن

$$V(G+H) = V(G) \cup V(H)$$

و مجموعه یال‌های آن به صورت زیر خواهد بود:

$$E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv; u \in V(G), v \in V(H)\}.$$

لم ۳-۱: [۴] فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف همبند به ترتیب با  $n$  و  $m$  رأس باشند. در این صورت

$$sk(G_1 + G_2) \geq sk(G_1) + sk(G_2) + (m-2)(n-2).$$

در این بخش، می‌خواهیم در مورد الحاق گراف‌ها با مسیرها و دورها صحبت کنیم. در ابتدا این نکته را یادآوری می‌کنیم که به ازای هر  $n, m \in \mathbb{N}$ ،  $P_n + P_m \in \Pi_3$  [۹] و با استفاده از گزاره ۲-۲ قسمت (پ)، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $m \geq 3$ ،  $P_n + C_m \in \Pi_3$ . کار خود در این بخش را با الحاق گراف تهی از یال با مسیرها و دورها شروع می‌کنیم. گراف تهی از یال از مرتبه  $n$ ، گرافی است شامل  $n$  رأس که مجموعه یال‌های آن تهی است. این گراف را با نماد  $\bar{K}_n$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۳-۲:** گراف بادبزن تعمیم یافته گرافی است که از الحاق گراف تهی از یال  $\bar{K}_n$  و گراف مسیر  $P_m$  به دست می‌آید. این گراف را با نماد  $F_{n,m}$  نمایش می‌دهیم.

**قضیه ۳-۳:** فرض کنید  $F_{n,m}$  یک بادبزن تعمیم یافته باشد به طوری که  $n \geq 1$  و  $m \geq 2$ . در این صورت

$$sk(F_{n,m}) = \begin{cases} 0 & n = 1, 2 \\ (m-2)(n-2) & n \geq 3 \end{cases}$$

(پ) فرض کنید  $f$  یک  $C$ -وجه و  $T$  یک درخت باشد که تعداد برگ‌های آن برابر با  $l(T)$  است و همچنین داشته باشیم:  $l(T) \leq d_D(f) - T$ . مثلث سازی وجه  $f$  به این صورت انجام می‌شود که ابتدا درخت  $T$  را در درون وجه  $f$  قرار می‌دهیم و سپس یال‌هایی را بین رئوس  $T$  و  $C$  به گونه‌ای رسم می‌کنیم که باعث شود درون وجه  $f$  به وجوه مثلثی تقسیم شود.

فرض کنید  $f$  یک  $C$ -وجه باشد. روند  $T$ -مثلث سازی وجه  $f$ ، با فرض  $C_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  و  $l(T) = \{l_1, l_2, \dots, l_t\}$  که در آن  $t \leq n$  به این صورت خواهد بود. فرض کنید رئوس  $C_n$  در خلاف جهت عقربه‌های ساعت چیده شده باشند. برای  $i = 1, 2, \dots, t$ ، رأس  $z_i$  را به تمامی رئوسی که بر روی مسیر یکتای بین  $l_i$  و  $l_{i+1}$  قرار دارند، وصل می‌کنیم و در این روند فرض این است که  $l_{i+1} = l_i$ . همچنین برای  $t+1 \leq i \leq n$ ،  $z_i$  را به  $l_1$  وصل می‌کنیم. مثالی از این عملیات برای  $n = 6$  و  $t = 4$  در شکل ۱ نشان داده شده است.

در گزاره‌ی زیر، در مورد روابط بین خمیدگی گراف و زیرگراف‌هایش نتایجی را بیان کرده‌ایم که در روند اثبات قضایا از آن‌ها استفاده خواهیم کرد.

**گزاره ۲-۲:** الف) [۷] اگر  $H$  زیرگرافی از  $G$  باشد، آنگاه

$$sk(H) \leq sk(G).$$

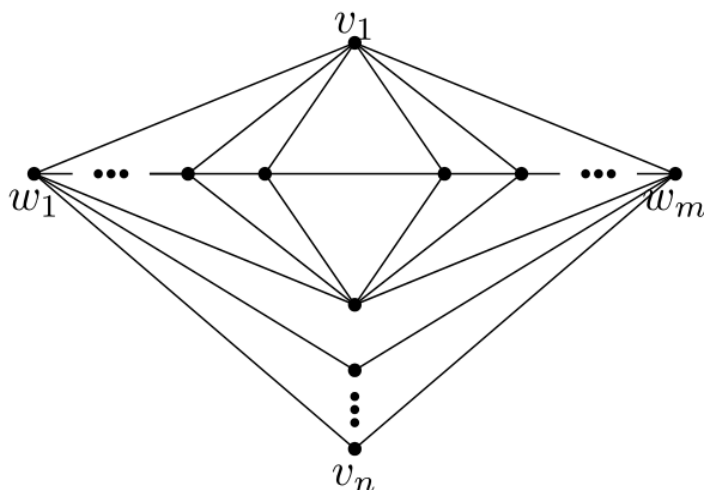
ب) [۷] اگر  $H$  زیرگراف مسطحی از  $G$  باشد، آنگاه

$$sk(G) \leq |E(G)| - |E(H)|.$$

(پ) [۹] فرض کنید  $G$  یک گراف با کمر  $g$  و  $H$  یک زیرگراف فراگیر از  $G$  باشد به طوری که  $H \in \Pi_g$ . در این صورت  $G \in \Pi_g$ .

### ۳- الحاق گراف‌ها با مسیرها و دورها

<sup>۱۲</sup> Join

شکل (۲): زیرگراف مسطح  $H$  از گراف  $F_{n,m}$ 

**تعریف ۳-۴:** الف) گراف چرخ  $W_m$  گرافی است که از قرار دادن یک رأس (که آن را مرکز می‌نامیم) در درون دور  $C_m$  و رسم تمامی یال‌های بین این رأس و رئوس دور به دست می‌آید. بنا به تعریف، می‌توان دید  $W_m = \bar{K}_1 + C_m$ .

ب) گراف چرخ  $n$ -فولد  $W_m^n$ ، گرافی است که از قرار دادن  $n$  رأس در درون دور  $C_m$  و افزودن تمامی یال‌های بین این رئوس و رئوس دور به دست می‌آید. بنابراین می‌توان  $W_m^n$  را به صورت الحاق گراف تهی از یال  $\bar{K}_n$  و گراف دور  $C_m$  نیز در نظر گرفت.

**قضیه ۳-۵:** فرض کنید  $W_m^n$  یک چرخ  $n$ -فولد باشد به طوری که  $n \geq 1$  و  $m \geq 3$ . در این صورت

$$sk(W_m^n) = \begin{cases} 0 & n = 1, 2 \\ (m-2)(n-2) & n \geq 3 \end{cases}$$

**اثبات:** برای  $n = 1, 2$ ، حکم واضح است. فرض کنیم  $n \geq 3$ . در این صورت چون

$$F_{n,m} = \bar{K}_n + P_m,$$

پس بنا به لم ۱-۳ داریم:

$$sk(F_{n,m}) \geq (m-2)(n-2).$$

بنابراین کافی است نشان دهیم که

$$sk(F_{n,m}) \leq (m-2)(n-2).$$

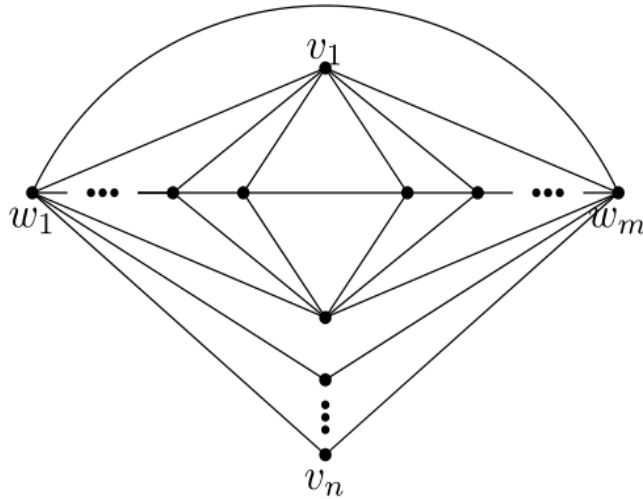
فرض کنیم  $V(P_m) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  و

$$V(\bar{K}_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

شده در شکل ۲ از گراف  $F_{n,m}$  را در نظر می‌گیریم.

حال، بنا به گزاره ۲-۲ بخش (ب) داریم:

$$\begin{aligned} sk(F_{n,m}) &\leq |E(F_{n,m})| - |E(H)| \\ &= (m-2)(n-2). \end{aligned}$$



شکل (۳): زیرگراف مسطح  $H$  از گراف  $W_m^n$

**قضیه ۳-۶:** [۴] فرض کنید  $G$  گرافی با  $p$  رأس باشد و  $G \in \Pi_3$ . در این صورت

$$sk(G + \bar{K}_n) = \begin{cases} \pi(G + \bar{K}_n) & n \leq 2(p-4) \\ \pi(G + \bar{K}_n) + n - 2p + 4 & n > 2(p-4) \end{cases}$$

**قضیه ۳-۷:** الف) فرض کنید  $F_{n,m}$  یک بادبزن تعمیم یافته باشد که در آن  $n \geq 1$  و  $m \geq 2$ . در این صورت

$$sk(F_{n,m} + P_t) = \begin{cases} \pi(F_{n,m} + P_t) & n \leq 2(t+m-4) \\ \pi(F_{n,m} + P_t) + n - 2(t+m) + 4 & n > 2(t+m-4) \end{cases}$$

ب) فرض کنید  $W_m^n$  یک چرخ  $n$ -فولد باشد که در آن  $n \geq 1$  و  $m \geq 3$ . در این صورت

**اثبات:** برای  $n = 1, 2$ ، حکم واضح است، زیرا در این دو حالت گراف  $W_m^n$  مسطح است. فرض کنید  $n \geq 3$ . در این صورت چون  $W_m^n = \bar{K}_n + C_m$ ،

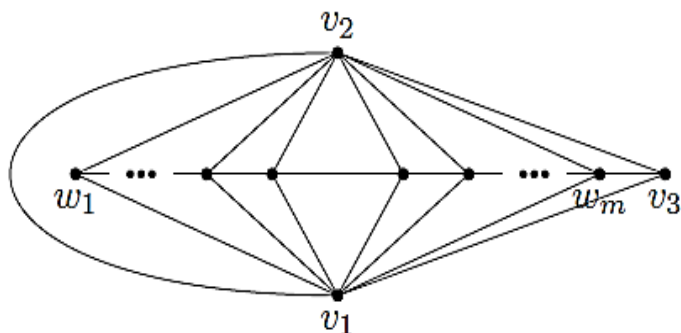
پس بنا به لم ۳-۱ داریم:

$$sk(W_m^n) \geq (m-2)(n-2).$$

فرض کنیم  $V(C_m) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  و  $V(\bar{K}_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . تصویر شده در شکل ۳ از گراف  $W_m^n$  را در نظر بگیریم. حال، بنا به گزاره ۲-۲ قسمت (ب) داریم:

$$sk(W_m^n) \leq |E(W_m^n)| - |E(H)| = (m-2)(n-2).$$

در ادامه‌ی این بخش، خمیدگی الحاق گراف‌های بادبزن تعمیم یافته و چرخ  $n$ -فولد با مسیرها را مطالعه خواهیم کرد. برای انجام این کار نیاز به قضیه زیر داریم که در مورد خمیدگی الحاق گراف  $\pi$ -خمیده با کمر ۳ با گراف تهی از یال است.

شکل (۴):  $P_m$ -مثلث سازی وجه  $f$ 

$f = \{v_1, v_2, v_3\}$  را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم

$$P_m = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

حال با قرار دادن مسیر  $P_m$  در داخل وجه  $f$  و استفاده از تکنیک  $P_m$ -مثلث سازی وجه انتخاب شده (شکل ۴) یک زیرگراف فراگیر مثلثی از گراف  $G + P_m$  به دست خواهیم آورد. در نتیجه

$$G + P_m \in \Pi_3$$

یک مسیر همیلتونی<sup>۱۴</sup> یا مسیر قابل تعقیب، مسیری است که هر رأس از گراف در آن دقیقاً یک بار دیده شود. گرافی را که دارای مسیر همیلتونی باشد، گراف قابل تعقیب<sup>۱۵</sup> یا نیمه همیلتونی می‌نامند. قضیه‌ی زیر در خصوص الحاق دو گراف قابل تعقیب در مرجع [۹] اثبات شده است.

**قضیه ۳-۹:** [۹] فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف قابل تعقیب باشند. در این صورت

$$G_1 + G_2 \in \Pi_3$$

**گزاره ۳-۱۰:** فرض کنید  $G_1 \in \Pi_3$  و  $G_2$  گرافی قابل تعقیب باشند. در این صورت

$$G_1 + G_2 \in \Pi_3$$

$$sk(W_n^* + P_r) = \begin{cases} \pi(W_n^* + P_r) & n \leq 2(t+m-4) \\ \pi(W_n^* + P_r) + n - 2(t+m) + 4 & n > 2(t+m-4) \end{cases}$$

**اثبات:** هر دو قسمت این قضیه با استفاده از قضیه‌ی ۳-۵ و این نتایج که  $P_n + P_m \in \Pi_3$  و  $C_n + P_m \in \Pi_3$  به دست می‌آیند.

در ادامه‌ی این بخش، با هدف محاسبه‌ی خمیدگی الحاق گراف‌های کامل و دوبخشی کامل با مسیرها و دوره‌ها، مطالعه‌ی خود را ادامه می‌دهیم. لم‌ها و گزاره‌های زیر در انجام محاسبات به ما کمک خواهند کرد. اولین لم، در مورد الحاق مسیر به گراف‌های  $\pi$ -خمیده با کمر ۳ است.

**لم ۳-۸:** فرض کنید  $G \in \Pi_3$ . در این صورت، برای هر  $m \geq 1$ ، داریم:  $G + P_m \in \Pi_3$ .

**اثبات:** چون  $G \in \Pi_3$ ، پس یک ترسیم فراگیر مثلثی مانند  $D$  دارد. اگر  $m=1$ ، آنگاه با قرار دادن تنها رأس  $P_m$  در درون یک وجه از  $D$  و استفاده از تکنیک رأس-مثلث سازی، می‌توان یک زیرگراف فراگیر مثلثی از  $G + P_m$  به دست آورد. پس  $G + P_m \in \Pi_3$  در غیر این صورت  $m \geq 2$ . در این حالت یکی از وجوه مثلثی از گراف  $D$  مانند

<sup>۱۵</sup> -tracable

<sup>۱۴</sup> -Hamiltonian path

در گزاره‌ی زیر، خمیدگی گراف‌های ستاره با مسیره‌ها به طور کامل بررسی و محاسبه شده است.

**قضیه ۳-۱۳:** فرض کنیم  $r, n \in \mathbb{N}$  و

$G = K_{1,n} + P_r$ . در این صورت

$$sk(K_{1,n} + P_r) = \begin{cases} 0 & n=1, r=1 \\ (r-1)(n-2) & 2 \leq r < n \\ \pi(G) & 2 \leq n \leq r \end{cases}$$

**اثبات:** حکم برای حالت‌های  $n=1$  و  $r=1$  واضح است. فرض کنیم

$V(K_{1,n}) = \{a, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  که در آن  $a$

مرکز گراف ستاره است و

$V(P_r) = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$  با توجه به مقدار

$r$  یکی از حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۱. فرض کنیم  $2 \leq r < n$ . در ابتدا دقت

داریم که  $K_{1,r,n}$  زیرگراف  $K_{1,n} + P_r$  است و

$2 \leq r$ ، پس بنا به قضیه ۳-۱۲ و گزاره ۲-۲ قسمت

(الف) داریم:

$$sk(K_{1,r,n}) = (r-1)(n-2) \leq sk(K_{1,n} + P_r).$$

در ادامه نشان می‌دهیم که

$$sk(K_{1,n} + P_r) \leq (r-1)(n-2).$$

ابتدا فرض کنیم  $r=2$ . در این حالت ابتدا با استفاده

از یکی از رأس‌های  $P_r$  و اتصال این رأس به تمامی

رئوس  $K_{1,n}$  یک گراف سه بخشی کامل  $K_{1,1,n}$

می‌سازیم. سپس در این گراف مسطح که تعداد وجوه

آن برابر  $n+1$  است و به جز یکی از وجوه‌ها، تمامی

وجوه دیگر آن مربع هستند، با استفاده از رأس باقی

مانده، یکی از وجوه‌های مربعی را مثلث سازی

می‌کنیم. در این صورت این زیرگراف مسطح دارای

$2n+5$  یال خواهد بود.

**اثبات:** فرض کنیم  $G_2$  یک گراف قابل تعقیب با  $m$

رأس باشد. اگر  $m=1$ ، آنگاه  $V(G_2) = \{a\}$ . چون

$G_1 \in \Pi_3$ ، پس یک ترسیم فراگیر مثلثی مانند  $D$

دارد. حال با استفاده از تکنیک رأس-مثلث سازی،

می‌توان یک زیرگراف فراگیر مثلثی از گراف

$G_1 + G_2 \in \Pi_3$  به دست آورد. پس  $G_1 + G_2$ .

حال فرض کنیم که  $m \geq 2$  و قرار می‌دهیم

$V(G_2) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  وجه دلخواهی

مانند  $f = \{v_1, v_2, v_3\}$  را از بین یکی از وجوه

مثلثی  $D$  انتخاب می‌کنیم. چون  $G_2$  قابل تعقیب

است، پس مسیر  $P_m$  در گراف  $G_2$  وجود دارد. حال،

با قرار دادن مسیر  $P_m$  در داخل وجه  $f$  و استفاده

از تکنیک  $P_m$ -مثلث سازی وجه انتخاب شده، یک

زیرگراف فراگیر مثلثی از  $G_1 + G_2$  به دست خواهیم

آورد. در نتیجه  $G_1 + G_2 \in \Pi_3$ .

**نتیجه ۳-۱۱ (الف):** فرض کنید  $G \in \Pi_3$ . در این

صورت برای هر  $m \geq 3$ ،  $G + C_m \in \Pi_3$ .

(ب) برای هر  $m \geq 1$  و  $n \geq 3$ ،  $K_n + P_m \in \Pi_3$ .

**اثبات:** (الف) چون  $G \in \Pi_3$  و  $C_m$  گرافی قابل

تعقیب است، بنا به گزاره ۳-۱۰ واضح است.

(ب) چون برای هر  $n \geq 3$ ،  $K_n \in \Pi_3$  و همچنین

$P_m$  گرافی قابل تعقیب است، حکم بنا به گزاره‌ی

۳-۱۰ برقرار است.

برای محاسبه‌ی خمیدگی الحاق گراف مسیر با

گراف‌های ستاره و دو بخشی کامل، به قضیه‌ی زیر در

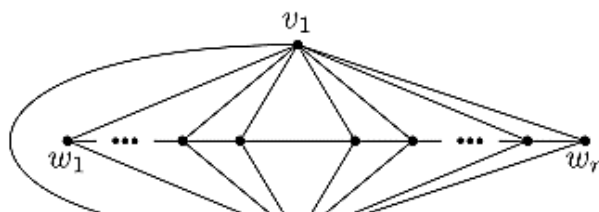
مورد خمیدگی گراف‌های سه بخشی کامل نیاز داریم.

**قضیه ۳-۱۲:** [۴] فرض کنیم  $m \leq n \leq r$  و

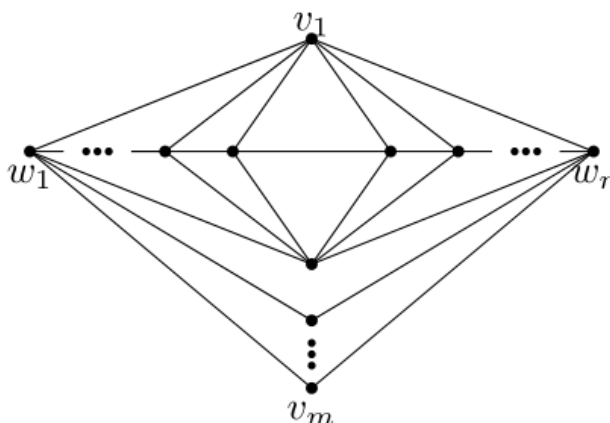
$G = K_{m,n,r}$ . در این صورت

$$sk(K_{m,n,r}) = \begin{cases} 0 & m=n=1 \\ \pi(G) + r - 1 & m=1, n \geq 2 \\ \pi(G) & 2 \leq m, r \leq m+n-2 \\ \pi(G) + r + 2 - m - n & 2 \leq m, r > m+n-2 \end{cases}$$





شکل (۵): زیرگراف مسطحی از گراف  $K_{1,n} + P_r$



شکل (۶): زیرگراف مسطحی از گراف  $K_{m,n} + P_r$

از  $K_{1,n} + P_r$  خواهیم داشت که تعداد یال‌هایش برابر  $2(r-1) + 2(r+n) + 1$  است و لذا بنا به گزاره ۲-۲ قسمت (ب) داریم:

$$\begin{aligned} & sk(K_{1,n} + P_r) \\ & \leq |E(K_{1,n} + P_r)| - (2(r-1) + 2(r+n) + 1) \\ & = (r-1)(n-2). \end{aligned}$$

حالت ۲. فرض کنیم  $2 \leq n \leq r$ . می‌خواهیم نشان دهیم که  $K_{1,n} + P_r \in \Pi_3$ . در این صورت ابتدا گراف مسطح شکل ۵ را در نظر می‌گیریم. سپس  $r-1$  وجه به صورت  $\{a, w_i, w_{i+1}\}$  (به ازای هر  $1 \leq i \leq r-1$ ) را با رئوس باقی مانده از گراف ستاره مثلث سازی می‌کنیم. پس گراف  $K_{1,n} + P_r$  شامل یک زیرگراف فراگیر مسطح مثلثی است و لذا داریم:  $K_{1,n} + P_r \in \Pi_3$ .

حال بنا به گزاره ۲-۲ قسمت (ب) داریم:

$$\begin{aligned} sk(K_{1,n} + P_2) & \leq 3(n+1) - (2n+5) \\ & = n-2. \end{aligned}$$

پس نامساوی

$$sk(K_{1,n} + P_r) \leq (r-1)(n-2)$$

برای حالت  $r=2$  برقرار است.

اگر  $r > 2$ ، آنگاه به این صورت عمل می‌کنیم. ابتدا گراف مسطح شکل ۵ را در نظر می‌گیریم. در این گراف  $r-1$  وجه به صورت  $\{a, w_i, w_{i+1}\}$  (به ازای هر  $1 \leq i \leq r-1$ ) داریم که می‌توان با  $r-1$  رأس از رئوس باقی مانده از گراف ستاره، آنها را مثلث سازی کرد. حال چون  $r < n$ ، با رئوس باقی مانده از گراف ستاره روی یال  $aw_1$  عملیات واکنشی را انجام می‌دهیم. با این کار زیرگراف فراگیری

است. لذا بنا به گزاره ۲-۲ قسمت (پ) می‌توان نتیجه گرفت که  $K_{m,n} + P_r \in \Pi_3$ .

حالت ۲. فرض کنیم  $r \leq n$ . در این حالت ابتدا زیرگراف تصویر شده در شکل ۶ را با استفاده از رئوس مسیرمان و  $m$  رأس  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  می‌سازیم. سپس حالت‌های پیش روی ما حالت‌های زیر خواهند بود:

حالت ۲-۱. اگر  $n \leq 2r + m - 3$ ، آنگاه با استفاده از  $n$  رأس باقی مانده و استفاده از تکنیک رأس-مثلی می‌توان زیرگرافی فراگیر و مثلی در گراف  $K_{m,n} + P_r$  یافت. پس  $K_{m,n} + P_r \in \Pi_3$ .

حالت ۲-۲. فرض کنیم  $n > 2r + m - 3$ . در این صورت با استفاده از گام‌های زیر و انجام آنها بر روی گراف شکل ۶ یک زیرگراف فراگیر مسطح از  $K_{m,n} + P_r$  می‌سازیم.

گام اول. با استفاده از  $2r - 2$  رأس از رئوس  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ، وجوه مثلی را رأس‌مثلی‌سازی می‌کنیم.

گام دوم. با  $m - 1$  رأس از  $n - (2r - 2)$  رأس باقی مانده،  $m - 1$  وجه مربعی را با استفاده از تکنیک رأس-مثلی‌سازی، مثلی می‌کنیم.

گام سوم.  $n - (2r - m - 1)$  رأس باقی مانده را با استفاده از تکنیک واکنشی بر روی یال  $v_1 w_1$  به گراف می‌افزاییم.

گراف ساخته شده یک گراف مسطح فراگیر از  $K_{m,n} + P_r$  خواهد بود که تعداد یال‌های آن برابر است با

$$5(r-1) + 4(m-1) + 2n.$$

لذا بنا به گزاره ۲-۲ قسمت (ب) داریم:

$$\begin{aligned} sk(K_{m,n} + P_r) &\leq |E(K_{m,n} + P_r)| \\ &= 5(r-1) + 4(m-1) + 2n \\ &= rm + rn + mn - 3(r+m+n) \\ &\quad - (r+m) + n + 2 \\ &= \pi(K_{m,r,n}) + n + 2 - m - r. \end{aligned}$$

**قضیه ۳-۱۴:** فرض کنیم  $2 \leq m \leq n$  و  $r \geq 1$ . در این صورت

$$sk(K_{m,n} + P_r) = \begin{cases} \pi(K_{m,n} + P_r) & n \leq r \\ \pi(K_{m,n} + P_r) & r \leq n \leq 2r + m - 3 \\ \pi(K_{m,r,n}) + n + 2 - m - r & r \leq n, n > 2r + m - 3 \end{cases}$$

**اثبات:** فرض کنیم

$$V(P_r) = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$$

و

$V(K_{m,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_n\}$  و همچنین فرض کنیم  $D$  زیرگراف فراگیر مسطح  $K_{m,n}$  باشد که از حذف  $sk(K_{m,n}) = (m-2)(n-2)$  یال به دست آمده است. دقت داریم که چون گراف  $D$ ،  $m+n$  رأس و  $2(m+n-2)$  یال دارد، تعداد وجوه آن برابر  $m+n-2$  است و تمامی وجوه آن مربعی هستند. حال با توجه به مقدار  $r$  حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۱. فرض کنیم  $n \leq r$ . دو حالت زیر پیش خواهد آمد:

حالت ۱-۱. فرض کنیم  $r \leq m+n-2$ . در این صورت بنا به قضیه ۳-۱۲،

$sk(K_{m,n,r}) = \pi(K_{m,n,r})$  چون  $K_{m,n,r} \in \Pi_3$  است و  $K_{m,n} + P_r$  است و  $K_{m,n,r} \in \Pi_3$ ، پس بنا به گزاره ۲-۲ قسمت (پ) داریم:

$$K_{m,n} + P_r \in \Pi_3$$

حالت ۲-۱. فرض کنیم  $r > m+n-2$ . در این صورت ابتدا با  $m+n-3$  رأس از مسیر که به ترتیب آنها را انتخاب می‌کنیم، تمامی وجوه گراف  $D$  به جز یکی از آنها را مثلی می‌کنیم. سپس با بخش باقی مانده از مسیرمان و استفاده از تکنیک  $T$  - مثلی‌سازی، وجه باقی مانده را مثلی می‌کنیم. زیرگراف حاصل، یک زیرگراف فراگیر از  $D$  و مثلی

که در آن  $h_{j,i}$  برای نمایش رأس  $j$ -ام از  $i$ -امین کپی  $H$  به کار می‌رود. کرونا‌ی رأسی دو گراف، یکی از اعمال روی گراف‌هاست که توجه‌ی محققان زیادی را به خود جلب کرده است. در این بخش، ابتدا می‌خواهیم خمیدگی کرونا‌ی رأسی دو گراف را مطالعه و بررسی کنیم.

**گزاره ۴-۱:** فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف همبند

به ترتیب از مرتبه  $n$  و  $m$  باشند. در این صورت

$$sk(GoH) \geq sk(G) + nsk(H).$$

**اثبات:** چون در گراف  $GoH$ ، یک کپی از گراف  $G$  و  $n$  کپی از  $H$  داریم، بنابراین بایستی حداقل  $sk(G)$  یال از گراف  $G$  و حداقل  $nsk(H)$  یال از هر کدام از کپی‌های  $H$  حذف کنیم. لذا حکم برقرار است.

در قضیه بعد، فرمول محاسبه‌ی خمیدگی کرونا‌ی دو گراف را ارائه می‌کنیم. برای اثبات این قضیه به کم‌ترین نیاز داریم.

**لم ۴-۲:** فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف مجزا از یال باشند. در این صورت

$$sk(G \cup H) \geq sk(G) + sk(H).$$

**اثبات:** واضح است.

**قضیه ۴-۳:** فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف همبند

به ترتیب از مرتبه  $n$  و  $m$  باشند. در این صورت

$$sk(GoH) = sk(G) + nsk(H + K_1).$$

**اثبات:** واضح است که برای هر  $1 \leq i \leq n$ ، زیرگراف القایی بر روی

$$\{h_{1,i}, h_{j,i}; h_l h_j \in E(H), 1 \leq i \leq n\}$$

$$\cup \{h_{l,i} g_i; 1 \leq l \leq n, 1 \leq i \leq n\}$$

یکریخت با  $H_i = H + K_1$  است. همچنین برای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $H_i$  ها و  $G$  گراف‌های دو به دو مجزا از یال هستند، پس بنا به لم ۴-۲ داریم:

از طرفی چون  $2 \leq m$  و  $n > m + r - 2$  و گراف سه بخشی کامل  $K_{m,r,n}$  زیرگراف  $K_{m,n} + P_r$  است، پس بنا به قضیه ۳-۱۲ داریم:

$$sk(K_{m,r,n}) = \pi(K_{m,r,n}) + n + 2 - m - r \leq sk(K_{m,n} + P_r).$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که

$$sk(K_{m,n} + P_r) = \pi(K_{m,r,n}) + n + 2 - m - r.$$

#### ۴- خمیدگی حاصلضرب کرونا‌ی دو گراف

فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف به ترتیب از مرتبه  $n$  و  $m$  باشند. کرونا‌ی<sup>۱۶</sup> این دو گراف، که آن را با نماد  $GoH$  نمایش می‌دهیم، گرافی است که از یک کپی از  $G$  و  $n$  کپی از  $H$  تشکیل می‌شود که به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $i$ -امین رأس از  $G$  به تمام رئوس در  $i$ -امین کپی از  $H$  وصل می‌شود. به این عمل گرافی، گاهی کرونا‌ی رأسی دو گراف نیز می‌گویند. فرض کنید که

$$V(G) = \{g_i; 1 \leq i \leq n\}$$

و

$$V(H) = \{h_i; 1 \leq i \leq m\}.$$

در این صورت مجموعه رئوس و یال‌های گراف  $GoH$  را به صورت زیر نشان خواهیم داد.

$$V(GoH) = V(G) \cup$$

$$\left[ \bigcup_{i=1}^n \{h_{1,i}, h_{2,i}, \dots, h_{m,i}\} \right].$$

$$E(GoH) = E(G) \cup$$

$$\{h_{l,i} h_{j,i}; h_l h_j \in E(H), 1 \leq i \leq n, 1 \leq l \neq j \leq m\}$$

$$\cup \{h_{l,i} g_i; 1 \leq l \leq m, 1 \leq i \leq n\}$$

<sup>۱۶</sup> corona

9

$$\pi(GoH) = |E(G)| + n(|E(H)| - 2m - 3) + 6$$

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که

$$sk(GoH) = \pi(GoH) + 3n.$$

فرض کنیم  $G$  یک گراف با  $q$  یال و  $H$  گرافی ساده باشد. کرونا یالی این دو گراف، که آن را با نماد  $G \diamond H$  نمایش می‌دهیم، گرافی است که از یک کپی از  $G$  و  $q$  کپی از  $H$  تشکیل می‌شود که به ازای هر  $1 \leq i \leq q$ ، هر دو رأس انتهایی  $i$ -امین یال از  $G$  به تمامی رئوس در  $i$ -امین کپی از  $H$  وصل می‌شود. به راحتی می‌توان با روش اثباتی که در قضیه ۴-۴ برای کرونا یالی گراف‌ها به کار برده شده است، نتایجی در مورد کرونا یالی دو گراف نیز ارائه کرد. چون روند اثبات‌ها مشابه است، از بیان آن‌ها صرف نظر شده است.

**گزاره ۴-۵:** فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف همبند باشند و داشته باشیم  $|E(G)| = q$ . در این صورت  $sk(G \diamond H) \geq sk(G) + qsk(H)$ .

**قضیه ۴-۶:** فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف همبند باشند و داشته باشیم  $|E(G)| = q$ . در این صورت  $sk(G \diamond H) = sk(G) + qsk(H + K_2)$ .

**قضیه ۴-۷:** فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف همبند به ترتیب از مرتبه  $n$  و  $m$  باشند و  $|E(H)| = q'$  و  $|E(G)| = q$ . همچنین فرض کنیم  $H$  گرافی  $\pi$ -خمیده از کمر ۳ باشد. در این صورت  $sk(G \diamond H) = sk(G) + q(q' - m)$ .

### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، خمیدگی الحاق گراف‌ها با مسیرها و دورها مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مطالعه، ابتدا خمیدگی گراف‌های خاصی مانند بادبزنی تعمیم یافته و گراف چرخ  $n$ -فولد به طور کامل محاسبه شده‌اند. همچنین الحاق گراف‌های کامل، گراف‌های

$$sk(GoH) \geq sk(G) + \sum_{i=1}^n sk(H_i).$$

حال چون به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $H_i = H + K_1$  پس  $sk(H_i) = sk(H + K_1)$  لذا داریم:

$$sk(GoH) \geq sk(G) + nsk(H + K_1).$$

برای اثبات عکس نامساوی اخیر، در گراف  $GoH$ ، ابتدا از  $G$ ،  $sk(G)$  یال حذف می‌کنیم و سپس در هر زیرگراف  $H_i$ ، به اندازه  $sk(H_i)$  یال حذف می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید که با توجه به ساختار کرونا یالی دو گراف، گراف حاصل از این عملیات مسطح خواهد بود. لذا داریم:

$$sk(GoH) \leq sk(G) + nsk(H + K_1).$$

**قضیه ۴-۴:** فرض کنیم  $G$  و  $H$  دو گراف همبند به ترتیب از مرتبه  $n$  و  $m$  باشند و  $H$  یک گراف قابل تعقیب یا یک گراف  $\pi$ -خمیده از کمر ۳ باشد. در این صورت

$$sk(GoH) = sk(G) + n(|E(H)| - 2m + 3).$$

به خصوص، اگر  $G \in \Pi_3$ ، آنگاه

$$sk(GoH) = \pi(GoH) + 3n.$$

**اثبات:** اگر  $H$  یک گراف قابل تعقیب باشد، آنگاه بنا به گزاره ۳-۱۰ داریم:  $H + K_1 \in \Pi_3$ . همچنین اگر  $H \in \Pi_3$ ، آنگاه بنا به لم ۳-۸، داریم  $H + K_1 \in \Pi_3$ . از طرفی بنا به قضیه ۴-۳ داریم:  $sk(GoH) = sk(G) + nsk(H + K_1)$ .

چون  $H + K_1 \in \Pi_3$ ، پس

$$sk(H + K_1) = \pi(H + K_1) = |E(H)| - 2m + 3.$$

بنابراین داریم:

$$sk(GoH) = sk(G) + n(|E(H)| - 2m + 3).$$

حال اگر  $G \in \Pi_3$ ، آنگاه چون

$$\pi(G) = |E(G)| - 3n + 6$$

ستاره و گراف‌های دوبخشی کامل با مسیرها مطالعه و محاسبه شده‌اند. به‌علاوه در مورد محاسبه‌ی خمیدگی کرونای رأسی و یالی دو گراف فرمول‌های مفیدی ارائه شده است.

در نظریه گراف، خمیدگی گراف به عنوان معیاری برای سنجش دوری یا نزدیکی گراف از مسطح بودن استفاده می‌شود. همچنین در نظریه گراف، گراف‌های خاصی وجود دارند که از عمل‌های گرافی حاصل می‌شوند. لذا محاسبه‌ی این عدد برای گراف‌های حاصل از عمل‌های گرافی، می‌تواند برای محاسبه‌ی خمیدگی این گراف‌ها مفید باشد. با توجه به اینکه عمل‌های گرافی متنوعی بین دو گراف تعریف و مطالعه شده‌اند، می‌توان مطالعات را برای عمل‌های گرافی دیگر ادامه داد.

## منابع:

- [۱] A. Liebers, Planarizing graphs—a survey and annotated bibliography, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, ۵: ۱-۱۷ (۲۰۰۱).
- [۲] P. C. Liu, R. C. Geldmacher, On the deletion of nonplanar edges of a graph, *Congressus Numerantium*, ۲۴: ۷۲۷-۷۳۸ (۱۹۷۹).
- [۳] M. Yannakakis, Edge-deletion problems, *SIAM Journal on Computing*, ۱۰: ۲۹۷-۳۰۹ (۱۹۸۱).
- [۴] G. L. Chia, K. A. Sim, On the skewness of the join of graphs, *Discrete Applied Mathematics*, ۱۶۱: ۲۴۰۵-۲۴۰۸ (۲۰۱۳).
- [۵] G.L. Chia, C.L. Lee, Crossing numbers and skewness of some generalized Petersen graphs, in: *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. ۳۳۳۰, Springer-Verlag, ۸۰-۸۶ (۲۰۰۵).
- [۶] G.L. Chia, C.L. Lee, Skewness of some generalized Petersen graphs and related graphs, *Frontiers of Mathematics in China*, ۷: ۴۲۷-۴۳۶ (۲۰۱۲).
- [۷] G.L. Chia, C.L. Lee, Skewness and crossing numbers of graphs, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, ۵۵: ۱۷-۳۲ (۲۰۰۹).
- [۸] R.J. Cimikowski, Graph planarization and skewness, *Congressus Numerantium*, ۸۸: ۲۱-۳۲ (۱۹۹۲).
- [۹] Z.D. Ouyang, F.M. Dong, R.X. Zhang, E.G. Tay, Properties of  $\pi$ -skew Graphs with Applications, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, ۳۷: ۶۴۱-۶۵۶ (۲۰۲۱).