دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی تقارنی‌های کلاسیک گروه لی و ارائه چند جواب دقیق معادله دیفرانسیل کسری (۱+۲) بعدی زاخاروف کوزنتسو بهبود یافته* (mZK)

میرسجاد هاشمی[۱†]، علی حاجی بدلی[۲]، فرزانه علیزاده[۳]

[۱و۲و۳] گروه ریاضی، دانشگاه بناب، آذربایجان شرقی، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۰۹   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۱۱

چکیده

در این مقاله به تجزیه و تحلیل تقارنی‌های کلاسیک گروه لی معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی زاخاروف کوزنتسو بهبود یافته (modified Zakharov–Kuznetsov) که به اختصار با نماد mZK نمایش داده می‌شود می‌پردازیم. در واقع، از گروه تقارنی‌های کلاسیک برای معادله سه بعدی mZK کسری غیرخطی با مشتقات جزئی استفاده کرده و با استفاده از تبدیلات بی‌نهایت کوچک و جواب‌های ناوردای مربوط به آنها معادله فوق را به معادله دو بعدی کاهش داده و در نهایت برخی از جواب‌های دقیق معادله مربوطه استخراج می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: تقارنی‌های لی، زاخاروف کوزنتسو بهبود یافته، معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی، تقارنی‌های کلاسیک.

* modified Zakharov–Kuznetsov

† عهده‌دار مکاتبات:
Email: hashemi_math396@yahoo.com

۱. مقدمه

در اوایل قرن ۱۹ تبدیلات گروه لی توسط ریاضی دان نروژی سوفوس لی[۳] برای اولین بار مطرح شد. این تبدیلات یکی از قدرتمندترین ابزارهای جهانی برای مطالعه معادلات دیفرانسیل هستند و نقش اساسی در تجزیه و تحلیل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل دارند [۴-۱]. محاسبات کسری، که قدمت آن به ۱۶۹۵ باز می‌گردد، در دهه‌های اخیر پیشرفت چشمگیری داشته است. نظریه محاسبات کسری به دلیل ویژگی‌های برجسته و چشمگیر، توجه دانشمندان را به خود جلب کرده است تا از طریق آن بتوانند پدیده‌های مختلف و گاهاً غیر عادی فیزیکی و فرآیندهای پیچیده در علوم مهندسی را دقیقتر توصیف کنند، زیرا محاسبات کلاسیک از توانایی کافی برای توصیف این پدیده‌ها برخوردار نبوده است [۹-۵]. در واقع با استفاده از نظریه‌های مختلف محاسبات کسری، پدیده‌های غیر عادی در دنیای واقعی را از طریق معادلات دیفرانسیل انتگرالی یا کسری مدل‌سازی کرده‌اند.

در حقیقت، اپراتورهای کسری به ابزاری قدرتمند برای توسعه مدل‌های دقیق‌تر از انواع کلاسیک تبدیل شده‌اند. اخیراً برخی از تعاریف جدید در مورد اپراتورهای کسری پیشنهاد شده است و برای مدل سازی رویدادهای پیچیده استفاده می‌شود [۱۵-۱۰]. به‌طور کلی، دستیابی به جواب‌های دقیق از معادلات دیفرانسیل کسری کار دشوار یا گاهی غیرممکن است. بسیاری از دانشمندان در مورد ساخت و گسترش روش‌های قابل اعتماد عددی یا نیمه تحلیلی که با معادلات کسری سر و کار دارند تحقیق کرده‌اند [۱۸-۱۶]

در این کار، معادله mZK کسری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}+auu_x+bu^2u_x+cu_{xxx}+du_{xyy}=0, \quad (1)$$

که در آن $(0<\alpha\le 1)$ و $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}(\cdot)$ نشان دهنده اپراتور مشتق جزئی وابسته به متغیر t است که می‌تواند از نوع ریمان-لیوویل[۴]

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau\right) & 0<\alpha<1\\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) & \alpha=1,\end{cases}$$

یا کاپوتو[۵] [۷]

$$\frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t\frac{\frac{\partial}{\partial t}u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau\right) & 0<\alpha<1\\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) & \alpha=1,\end{cases}$$

باشد که درآن $\Gamma(\cdot)$ نشان دهنده تابع گاما است. برای $\alpha=1$، این مدل به معادله کلاسیک mZK تبدیل می‌شود [۸].

با توجه به ارتباط بین این دو مشتق، مشتق کسری کاپوتو را می‌توان بر حسب مشتق کسری ریمان لیوویل به صورت زیر نوشت

$$\frac{{}^C\partial}{\partial t}u=\frac{\partial}{\partial t}\left(u-T_{n-1}[u;0]\right)$$

که در آن $T_{n-1}[u;0]$ نشان دهنده بسط چند جمله‌ای تیلور از درجه $n-1$ حول نقطه صفر است.

۲. تجزیه و تحلیل تقارنی‌های لی و جواب‌های دقیق معادله کسری mZK

در این بخش با استفاده از آنالیز گروه لی، خاصیت ناوردایی معادله کسری mZK بررسی می‌شود. همچنین از تجزیه و تحلیل گروه لی برای کاهش مدل کسری معادله اصلی استفاده می‌شود. برای این منظور، در مرحله اول جزئیات اصلی تجزیه و تحلیل

[3] Sophus Lie

[4] Riemann–Liouville

[5] Caputo

تقارن لی برای معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی[۶] (FPDE) وابسته به زمان به‌طور خلاصه شرح داده شده است.

۱-۲. شرح تجزیه و تحلیل تقارنی‌های لی برای معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی (FPDEs)

دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی ذیل با دو متغیر مستقل را در نظر بگیرید.

$$\Delta \equiv \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} - F(x,t,\mathrm{y},u,u_x,u_y,\ldots) = 0, \quad (۲)$$

که در آن $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}(\cdot)$ نشان دهنده اپراتور مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α $(0<\alpha\le 1)$ است. $\{u(x,t,y)\}$ و $\{x,t,y\}$ به ترتیب متغیرهای وابسته و مستقل هستند و اندیس‌ها مشتقات جزئی صحیح را نشان می‌دهند.
با توجه به تجزیه و تحلیل تقارن لی، فرض می‌کنیم معادله (۲) تحت تبدیلات یک پارامتری زیر ناوردا باشد.

$$\begin{aligned}
&x^* = x + \varepsilon\xi(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\
&t^* = t + \varepsilon\tau(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\
&y^* = y + \varepsilon\zeta(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\
&u^* = u + \varepsilon\eta(x,t,\mathrm{y},u) + O(\varepsilon^2),\\
&\frac{\partial^{\alpha} u^*}{\partial t^{*\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} + \varepsilon\eta^{\alpha,t}(x,t,\mathrm{y},u) + O(\varepsilon^2),\\
&\frac{\partial^{j} u^*}{\partial x^{*j}} = \frac{\partial^{j} u}{\partial x^{j}} + \varepsilon\eta^{j,x}(x,t,\mathrm{y},u) + O(\varepsilon^2), \quad j=1,2,3,\ldots
\end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن ε پارامتر گروه لی است و جبر لی مرتبط با آن توسط میدان برداری زیر تولید می‌شود.

$$\begin{aligned}
V = {}&\xi(x,t,\mathrm{y},u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,\mathrm{y},u)\frac{\partial}{\partial t}\\
&+ \zeta(x,t,\mathrm{y},u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,\mathrm{y},u)\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned} \quad (۴)$$

[۶] Fractional partial differential equations

$\{\xi,\tau,\zeta,\eta\}$ مجموعه‌ای از بی‌نهایت کوچک‌ها و به ترتیب $\eta^{\alpha,t}$ و $\eta^{j,x}$ برای $(j=1,2,\ldots)$ بسط‌های بی‌نهایت کوچک از مرتبه α و j هستند. میدان برداری (۴) تقارن معادله (۲) را تولید می‌کند اگر و تنها اگر شرط ناوردایی تبدیلات بی‌نهایت کوچک زیر برقرار باشد:

$$Pr^{(\alpha,m)}V(\Delta)|_{\Delta=0} = 0, \quad (۵)$$

که در آن m نمایانگر مرتبه صحیح معادله دیفرانسیل کسری (۲) است و اپراتور پرولانگیشن کسری تعمیم یافته $Pr^{\alpha,3}V(\cdot)$ به شرح زیر تعریف شده است. [۴]

$$\begin{aligned}
Pr^{(\alpha,3)}V = V &+ \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial(\partial u_t^{\alpha})} + \eta^{x}\frac{\partial}{\partial u_x}\\
&+ \eta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \eta^{xyy}\frac{\partial}{\partial u_{xyy}}.
\end{aligned} \quad (۶)$$

بسط مرتبه صحیح بی‌نهایت کوچک‌های $\eta^{j,x}$ صریحاً به شرح زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\eta^{j,x} = {}& D_x\eta^{j-1,x} - (D_x\xi)\frac{\partial^{j} u}{\partial x^{j}} - (D_x\tau)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}}\Big)\\
&- (D_x\zeta)\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}}\Big), \qquad j=1,2,\ldots
\end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن D_x اپراتور مشتق کامل وابسته به متغیر x است.

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots \quad (۸)$$

بنابراین $\eta^{\alpha,t}$ نشان دهنده بسط مرتبه α -ام اپراتور بی‌نهایت کوچک است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\eta^{\alpha,t} = {}& \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t}\eta + \xi\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t}(u_x) - \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t}(\xi u_x)\\
&+ \zeta\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t}(u_y) - \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t}(\zeta u_y) + \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t}\big(D_t(\tau)u\big)\\
&- \frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial t}(\tau u) + \tau\frac{\partial^{\alpha+1}}{\partial t}(u).
\end{aligned}$$

D_t^α نشان دهنده مشتق کسری کامل نسبت به t از مرتبه α است. با استفاده از قانون لایب نیتز و قاعده زنجیری بسط مرتبه α -ام بی‌نهایت کوچک $\eta^{\alpha,t}$ به روشنی به شرح زیر نشان داده می‌شود [۶و۷]:

$$\begin{aligned}\eta^{\alpha,t} &= \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + \left(\eta_u - \alpha D_t(\tau)\right)\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u\frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^i \eta_u}{\partial t^i} - \binom{\alpha}{i+1}D_t^{i+1}(\tau)\right]D_t^{\alpha-i}(u) \\ &- \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}D_t^i(\xi)D_t^{\alpha-i}(u_x) \\ &- \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}D_t^i(\zeta)D_t^{\alpha-i}(u_y) + \mu,\end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن

$$\mu = \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\left[\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)} \times (-1)^s u^s \frac{\partial^j(u^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\eta}{\partial t^{i-j}\partial u^r}\right],$$

با توجه به اینکه η نسبت به متغیر وابسته u خطی است از رابطه (۹) نتیجه می‌شود $\mu=0$. چون رابطه فوق شامل مشتقات $\frac{\partial^i \eta}{\partial^i u}$ به ازای $i \geq 2$ هستند.

بعلاوه تبدیلات یک پارامتری (۳) برای مشتق کسری کاپوتو به صورت

$$\begin{aligned}x^* &= x + \varepsilon\xi(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\ t^* &= t + \varepsilon\tau(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\ y^* &= y + \varepsilon\zeta(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\ u^* &= u + \varepsilon\eta(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\ \frac{{}^C\partial^\alpha u^*}{\partial t^{*\alpha}} &= \frac{{}^C\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon\, {}^C\eta^{\alpha,t}(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2),\\ \frac{{}^C\partial^j u^*}{\partial x^{*j}} &= \frac{{}^C\partial^j u}{\partial x^j} + \varepsilon\, {}^C\eta^{j,x}(x,t,y,u) + O(\varepsilon^2), \quad j=1,2,3,\ldots\end{aligned}$$

می‌باشد و توسیع مرتبه α-ام بی‌نهایت کوچک ${}^C\eta^{\alpha,t}$ به شرح زیر است [۱۹].

$$\begin{aligned}{}^C\eta^{\alpha,t} &= \frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t}\eta + \xi\frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t}(u_x) - \frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t}(\xi u_x) \\ &+ \zeta\frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t}(u_y) - \frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t}(\zeta u_y) + \frac{{}^C\partial^\alpha}{\partial t}\left(D_t(\tau)u\right) \\ &- \frac{{}^C\partial^{\alpha+1}}{\partial t}(\tau u) + \tau\frac{{}^C\partial^{\alpha+1}}{\partial t}(u).\end{aligned}$$

با توجه به روابط فوق در محاسبات ذکر شده شرط مرزی معادلات کسری تاثیر علمی ندارد و تنها در تعبیر فیزیکی معادلات دخیل می‌باشد. ما در ادامه به بررسی روش تقارنی‌های لی با استفاده از مشتق کسری لیوویل می‌پردازیم.

۱-۱-۲. تقارنی‌های کلاسیک

شرط ناوردایی بی‌نهایت کوچک در تجزیه و تحلیل تقارن لی برای معادله داده شده (۲) به صورت زیر می‌باشد

$$Pr^{(\alpha,m)}V\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - F(x,t,y,u,u_x,u_{xx},\ldots)\right)\Big|_{(2)} = 0, \quad (۱۰)$$

از رابطه (۱۰) شرط ناوردایی برای دستگاه معادلات اصلی (۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Pr^{(\alpha,3)}V\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + auu_x + bu^2\,\mathrm{u}_x + \mathrm{c}u_{xxx} + \mathrm{d}u_{xyy}\right)\Big|_{(1)} = 0,$$

از رابطه فوق دستگاه معادلات مشخصه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\binom{\alpha}{n}\frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau) = 0, \qquad n=1,2,\ldots\\ &D_t^n(\xi) = 0, \qquad n=1,2,\ldots\\ &\tau_x = \tau_u = \tau_y = 0,\\ &\xi_u = \zeta_u = 0,\\ &\eta_{uu} = 0,\\ &\alpha d\tau_t - d\zeta_x - 2d\zeta_y = 0,\\ &\alpha c\tau_t - 3c\xi_x = 0,\\ &\mathrm{d}\eta_{xu} - 2d\zeta_{xy} = 0,\\ &3c\eta_{xu} - 3c\xi_{xx} - d\xi_{yy} = 0,\end{aligned}$$

$$-3c\zeta_x - d\xi_x - 2d\xi_y = 0,$$
$$-3c\zeta_{xx} + 2d\eta_u - 2d\xi_{xy} - d\zeta_{yy} = 0,$$

بنابراین مولدهای بی‌نهایت کوچک را به صورت زیر داریم:

$$V_1 = f(t)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad V_2 = g(t)\frac{\partial}{\partial y},$$

به عنوان مثال، متغیر تشابه و تبدیلات تشابه مربوط به مولد بی‌نهایت کوچک $V_1 = f(t)\frac{\partial}{\partial x}$ را می‌توان با حل معادله مشخصه مرتبط با آن یعنی

$$\frac{dx}{f(t)} = \frac{dt}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{0}$$

به صورت $u(x,t,y) = F(t,y)$ بدست آورد که این جواب ناوردا معادله کسری با مشتقات جزئی mZK را به معادله دیفرانسیل کسری زیر تبدیل می‌کنند:

$$\partial_t^\alpha \mathrm{F}(t,y) = 0,$$

و جواب دقیق معادله فوق به صورت $\mathrm{F}(t,y) = \mathrm{h}(y)t^{\alpha-1}$ می‌باشد، که در آن h(y) تابع دلخواه است. (شکل ۱و۲)

تبدیلات تشابه مربوط به مولد بی‌نهایت کوچک $V_2 = g(t)\frac{\partial}{\partial y}$را می‌توان با حل معادله مشخصه مرتبط با آن یعنی

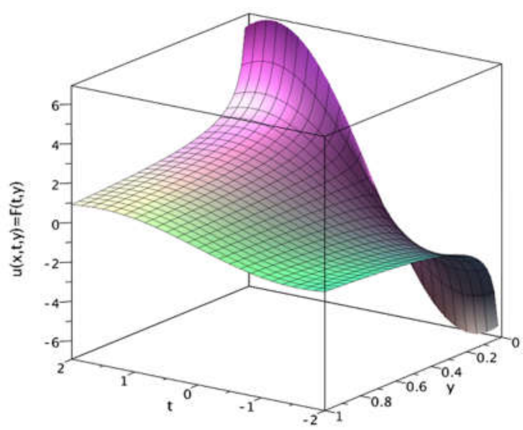
$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{dy}{g(t)} = \frac{du}{0}$$

به‌صورت $u(x,t,y) = G(x,t)$ بدست آورد که این جواب ناوردا معادله کسری با مشتقات جزئی mZK را به معادله دیفرانسیل کسری زیر تبدیل می‌کنند:

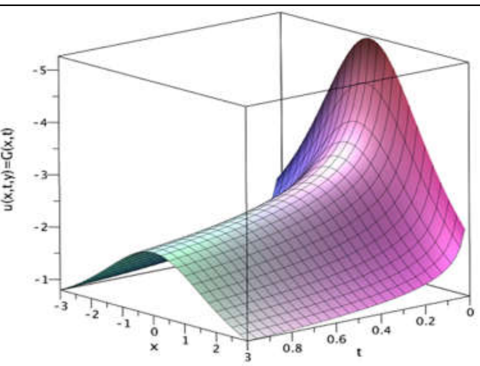
$$\partial_t^\alpha G + aGG_x + bG^2G_x + cG_{xxx} = 0,$$

و یکی از جواب‌های دقیق معادله فوق به‌صورت زیر می‌باشد.

$$G(\mathrm{x},t) = \frac{-12ac}{a^2x^2 + 6bc}\mathrm{t}^{\alpha-1}.$$



شکل۱. جواب دقیق معادله (۱) مربوط به میدان برداری V_1 به ازای $y = [-2,2],\ \mathrm{t} = [0,1]$ **و** $h(y) = \sin(y)$.



شکل۲. جواب دقیق معادله (۱) مربوط به میدان برداری V_2 به ازای $x=[-3,3],\ \mathrm{t}=[0,1]$.

همچنین برای مولد بی‌نهایت کوچک $V = V_1 + V_2$ تبدیلات تشابه را می‌توان با حل معادله مشخصه مرتبط با آن بدست آورد:

$$\frac{dx}{f(t)}=\frac{dt}{0}=\frac{dy}{g(t)}=\frac{du}{0}.$$

رابطه بالا نتیجه می‌دهد $u(x,t,y)=H\left(t,\varsigma\right)$ که در آن $\varsigma=\frac{f(t)\,\mathrm{y}-\mathrm{g(t)\,x}}{f(t)}$. با فرض اینکه $f\left(t\right)=g\left(t\right)$ باشد، معادله (۱) به معادله کسری زیر تبدیل می‌شود.

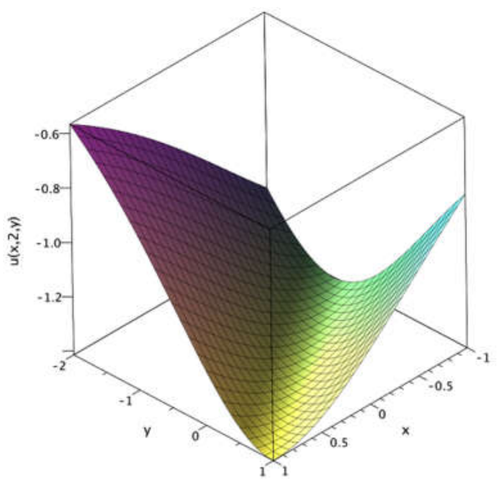
$$\partial_t^\alpha \mathrm{H}-\mathrm{aHH}_\varsigma-bH^2H_\varsigma-cH_{\varsigma\varsigma\varsigma}-dH_{\varsigma\varsigma\varsigma}=0,$$

که یکی از جواب‌های دقیق معادله به صورت زیر می‌باشد

$$\mathrm{H}(t,\varsigma)=\frac{-12a(c+d)}{a^2\varsigma^2+6b(c+d)},$$

در نتیجه جواب دقیق معادله دیفرانسیل کسری mZK را به صورت زیر داریم:

$$u(x,t,y)=\frac{-12a(c+d)\,\mathrm{t}^{\alpha-1}}{a^2(y-x)^2+6b(c+d)}.$$



شکل۳. جواب دقیق معادله (۱) مربوط به میدان برداری V_1+V_2 به ازای $x=[-1,1],\ y=[-2,1]$ **و در زمان** $t=2$ **رسم شده است.**

۳. نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، تجزیه و تحلیل تقارنی‌های کلاسیک گروه لی معادله کسری (۱+۲) بعدی mZK را بررسی کردیم و معادله کسری وابسته به زمان حاکم از طریق جواب‌های ناوردای بدست آمده به یک معادله کسری دو بعدی کاهش پیدا کرد و برخی از جواب‌هایی دقیق آن محاسبه گردید.

فهرست مراجع

[1] G. Bluman, S. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Vol. 154, Springer Science and Business Media, 2008.

[2] N. H. Ibragimov, CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 3, CRC press, 1995.

[3] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Vol. 107, Springer Science & Business Media, 2000.

[4] M. S. Hashemi, D. Baleanu, Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equations, Chapman and Hall/CRC, 2020.

[5] K. Oldham, J. Spanier, The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, Elsevier, 1974.

[6] K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, 1993.

[7] A. Kilbas, Theory and applications of fractional differential equations.

[8] C. Park, M. M.A. Khater, A-H. Abdel-Aty, R. A.M. Attia, D. Lu, On new computational and numerical solutions of the modified Zakharov–Kuznetsov equation arising in electrical engineering, A. E. J, 59 (2020) 1099–1105 .

[9] V. V. Uchaikin, Fractional derivatives for physicists and engineers, Vol. 2, Springer, 2013.

[10] J. F. Gómez-Aguilar, A. Atangana, V. F. Morales-Delgado, Electrical circuits rc, lc, and rl described by atangana-baleanu fractional derivatives, International Journal of Circuit Theory and Applications 45 (11) (2017) 1514–1533.

[11] M. Heydari, A. Atangana, A cardinal approach for nonlinear variable order time fractional schrüodinger equation defined by Atangana-baleanu-caputo derivative, Chaos, Solitons & Fractals 128 (2019) 339–348.

[12] A. Atangana, Modelling the spread of covid-19 with new fractal fractional operators: Can the lockdown save mankind before vaccination, Chaos, Solitons & Fractals 136 (2020) 109860.

[13] R. L. Magin, Fractional calculus in bioengineering, Vol. 2, Begell House Redding, 2006.

[14] R. Hilfer, et al., Applications of fractional calculus in physics, Vol. 35, World scientific Singapore, 2000.

[15] D. Baleanu, J. A. T. Machado, A. C. Luo, Fractional dynamics and control, Springer Science & Business Media, 2011.

[16] S. Kheybari, Numerical algorithm to Caputo type time–space fractional partial differential equations with variable coefficients, Math. Comput. Simul. 182 (2021) 66–85.

[17] S. Kheybari, M.T. Darvishi, M.S. Hashemi, A semi-analytical approach to Caputo type time-fractional modified anomalous sub-diffusion equations, Appl. Numer. Math. 158 (2020) 103–122.

[18] S. Kheybari, M.T. Darvishi, M.S. Hashemi, Numerical simulation for the

space-fractional diffusion equations, Appl. Math. Comput. 348 (2019) 57–69.

[19] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk, Symmetry properties of fractional diffusion equations, Phys. Scr. T136 (2009) 014016 (5pp).