

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و ششم، آذر و دی ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## مدل اتورگرسو غیرخطی مرتبه‌ی اول نیمه‌پارامتری با خطاهای وابسته و چوله نرمال

لیلا سخابخش<sup>۱</sup>، رحمان فرنوش<sup>۲\*</sup>، افشین فلاح<sup>۳</sup>، محمدحسن بهزادی<sup>۴</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه آمار، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

<sup>(۳)</sup> گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۱۶

### چکیده

روش‌های متداول برای تحلیل مدل‌های اتورگرسو غیرخطی بر فرض نرمال بودن خطاها بنا نهاده شده است، این در حالی است که در بسیاری از کاربردها، مانده‌ها ساختاری غیرنرمال را نشان می‌دهند و استفاده از این روش‌ها به پیش‌بینی‌های گمراه‌کننده و غیرقابل اعتماد منجر می‌شود. همچنین در این شرایط روش‌های پارامتری و ناپارامتری در برآورد تابع رگرسیون غیرخطی از کارایی لازم برخوردار نیستند. در این مقاله مدل اتورگرسو غیرخطی مرتبه‌ی اول با خطاهای وابسته و چوله نرمال معرفی و یک روش نیمه‌پارامتری برای برآورد قسمت غیرخطی مدل پیشنهاد شده است. پارامترها با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی و با به‌کارگیری الگوریتم EM برآورد شده‌اند. کارایی مدل پیشنهادی با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی و تحلیل یک مجموعه داده واقعی مربوط به داده‌های روزانه نرخ برابری یورو به دلار، مورد بررسی قرار گرفته است.

**واژه‌های کلیدی:** مدل اتورگرسو غیرخطی، خطاهای چوله نرمال، الگوریتم EM، برآورد نیمه‌پارامتری.

## ۱- مقدمه

در تحلیل سری‌های زمانی مدل‌های متفاوتی معرفی و مورد بحث قرار گرفته‌اند که مدل‌های اتورگرسیو خطی و غیرخطی از آن جمله هستند. با توجه به ساختار غیرخطی حاکم بر برخی سری‌های زمانی، مدل‌های اتورگرسیو غیرخطی<sup>۱</sup> مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته‌اند ([۱]، [۲] و [۳]). با توجه به اینکه در این مدل‌ها روش‌های پارامتری و ناپارامتری در برآورد تابع رگرسیونی چندان کارا نیستند، در سال‌های اخیر به توسعه مدل‌های نیمه-پارامتری توجه ویژه‌ای شده است. [۳] یک روش نیمه-پارامتری برای مدل اتورگرسیو غیرخطی ارائه داده‌اند که ترکیبی از روش‌های پارامتری و تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری برای برآورد تابع رگرسیون است. [۴] روش نیمه-پارامتری ارائه شده توسط [۳] را برای مدل اتورگرسیو غیرخطی مرتبه‌ی اول با خطاهای وابسته دارای میانگین صفر و واریانس ثابت، مورد مطالعه قرار داده‌اند. در بسیاری از کاربردها، فرضیه‌ی باقیمانده‌های مستقل مناسب نیستند. به‌عنوان مثال، در مطالعات مالی با نوسانات ریسک با میانگین و واریانس شرطی نا ثابت مدل‌های با خطاهای وابسته کاربرد دارند ([۵]، [۶]). در بیشتر مطالعات، وابستگی خطاها به‌صورت مدل اتورگرسیو مرتبه‌ی اول در نظر گرفته می‌شود یعنی خطاها در یک دوره‌ی زمانی با خطاهای دوره‌ی زمانی قبلی وابستگی دارند. این نوع وابستگی خطا بسیار متداول است زیرا علاوه بر سهولت، طیف وسیعی از مسائل کاربردی از جمله سپرده‌گذاری‌های سالانه بانک‌ها، نرخ برابری یورو به دلار، شاخص قیمت نفت به قیمت گاز و موارد مشابه را در بر می‌گیرد ([۴]).

از طرفی نرمال بودن خطاها فرض متداولی در مدل‌های اتورگرسیو است. اما در کاربردهایی که خطاها دارای ساختاری غیرنرمال هستند، توزیع نامتقارنی که دارای خواصی مشابه توزیع نرمال باشد می‌تواند در تحلیل داده‌ها نقشی اساسی ایفا کند. توزیع چوله نرمال<sup>۲</sup> (آزالینی، ۱۹۸۵) خانواده‌ای چوله-متقارن است که توزیع نرمال را به عنوان یک حالت خاص در بر می‌گیرد [۷]. اخیراً برخی از پژوهشگران به تحقیق در زمینه‌ی تحلیل‌های سری‌های زمانی در شرایطی که فرض نرمال بودن وجود ندارد پرداخته‌اند. [۸] مدل اتورگرسیو غیرخطی با خطاهای مستقل و چوله نرمال را معرفی و با یک روش نیمه-پارامتری قسمت غیرخطی مدل را برآورد کرده‌اند. آن‌ها همچنین پارامترهای نامعلوم مدل را با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی<sup>۳</sup> و با به‌کارگیری الگوریتم EM<sup>۴</sup> برآورده کرده‌اند. [۹] مدل معرفی شده توسط [۸] را برای مدل‌بندی داده‌های رویش سالانه درخت کاج استفاده و پارامترهای مدل را با استفاده از روش کمترین توان‌های دوم غیرخطی شرطی، برآورده نموده‌اند.

هدف از این تحقیق تعمیم مدل معرفی شده [۸] برای خطاهای وابسته با استفاده از روش برآورد نیمه-پارامتری است. همچنین از این مدل جدید برای پیش‌بینی داده‌های روزانه نرخ برابری یورو به دلار<sup>۵</sup> (دوره زمانی ۲۰ ژانویه ۲۰۲۰ تا ۲۳ اکتبر ۲۰۲۰) استفاده شده است. با به‌کارگیری روش نیمه-پارامتری ارائه شده [۳]، ابتدا روش کمترین توان‌های دوم غیرخطی شرطی برای برآورد تابع غیرخطی مدل به‌کار رفته و سپس برای برآورد تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری روش برازش درجه‌ی دوم مورد استفاده قرار گرفته است. در مرحله‌ی بعد، برآوردگرهای ML پارامترهای نامعلوم مدل با استفاده از الگوریتم EM محاسبه و فرم‌های تکراری بسته برای این برآوردگرها به‌دست آمده‌اند.

1. Nonlinear autoregressive models
2. Skew normal distribution
3. Maximum Likelihood
4. Expectation Maximization (EM)
5. Euro (EUR) to US dollar (USD) exchange rate

برقرارند، که در آن‌ها  $\delta(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$  است.  $SK(Z)$  و  $KU(Z)$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی اندازه‌های چولگی<sup>۱</sup> و کشیدگی<sup>۲</sup> هستند [۷].

**تعریف ۲:** متغیر تصادفی  $Y$  دارای توزیع نرمال بریده شده<sup>۳</sup> در فاصله‌ی  $(b_1, b_2)$  است،  $Y \sim TN(\mu, \sigma^2) I_{\{b_1 < Y < b_2\}}$  هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f(y|\mu, \sigma^2) = \left\{ \phi\left(\frac{b_2 - \mu}{\sigma}\right) \phi\left(\frac{b_1 - \mu}{\sigma}\right) \right\}^{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2 \right\}$$

باشد [۱۱].

**لم ۲:** برطبق قضیه‌ی ۱ در [۱۰] و صفحه‌ی ۲۰۱ در [۱۱]، اگر  $U \sim TN(0, \sigma^2) I_{\{u > 0\}}$  و  $V \sim N(0, \sigma^2)$  آنگاه متغیر تصادفی  $Z = \mu + \delta(\lambda)U + V\sqrt{1 - \delta^2(\lambda)}$  دارای توزیع چوله نرمال با پارامترهای  $\mu$ ،  $\sigma^2$  و  $\lambda$  خواهد بود. همچنین تابع چگالی توأم  $Z$  و  $U$  به صورت زیر است:

$$f_{Z,U}(z,u) = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\pi\sigma^2} \times \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \left[ (z - \mu)^2 + (1 + \lambda)^2 \left( u - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}(z - \mu) \right)^2 \right] \right\}.$$

**لم ۳:** اگر  $U \sim TN(0, \sigma^2) I_{\{u > 0\}}$ ،  $V \sim N(0, \sigma^2)$  و متغیر تصادفی  $Z$  به صورت

$$Z = \mu + \delta(\lambda)U + V\sqrt{1 - \delta^2(\lambda)},$$

تعریف شود، آنگاه

$$U|Z = z \sim TN(\mu_U, \sigma_U^2) I_{b_1=0 < u < b_2=\infty}$$

ساختار مقاله به این صورت سازماندهی شده است: در بخش دوم، نمادها و برخی مفاهیم پایه بیان شده‌اند. بخش سوم به معرفی مدل پرداخته و سپس برآورد قسمت غیرخطی مدل با استفاده از روش نیمه‌پارامتری مطرح شده است. بخش چهارم شامل برآورد ML پارامترهای مدل از طریق الگوریتم EM است. در بخش پنجم، یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی به منظور بررسی کارایی مدل اجرا شده است. یک مجموعه داده واقعی مربوط به نرخ روزانه برابری یورو به دلار نیز در بخش ششم مورد بررسی قرار گرفته است. بحث و نتیجه‌گیری پایان‌بخش مقاله است.

## ۲- مفاهیم پایه

**تعریف ۱:** متغیر تصادفی  $Z$  دارای توزیع چوله نرمال با پارامترهای مکان  $\mu$ ، مقیاس  $\sigma^2$  و چولگی  $\lambda \in \mathbb{R}$  است،  $Z \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$ ، هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f_{SN}(Z) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) \phi\left(\lambda \frac{z-\mu}{\sigma}\right) \quad z \in \mathbb{R},$$

باشد، که در آن  $\phi(\cdot)$  و  $\Phi(\cdot)$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی نرمال استاندارد هستند.

به‌ازای  $\lambda = 0$ ، متغیر تصادفی  $Z$  دارای توزیع نرمال با پارامترهای  $\mu$  و  $\sigma^2$  است [۷].

**لم ۱:** اگر  $Z \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$ ، آنگاه روابط

- $E(Z) = \mu + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(\lambda)$ ,
- $Var(Z) = \sigma^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \delta^2(\lambda) \right\}$ ,
- $SK(Z) = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)\lambda^3}{\{\pi+(\pi-2)\lambda^2\}^{1.5}}$ ,
- $KU(Z) = 3 + \frac{8(\pi-3)\lambda^4}{\{\pi+(\pi-2)\lambda^2\}^2}$ ,

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \Theta} \sum_{t=3}^n (z_t - r(z_{t-1}, \beta))^2 \quad \text{و همچنین} \quad (2)$$

$$E(U|Z = z) = \mu_U + \frac{\phi(\frac{\mu_U}{\sigma_U})}{\Phi(\frac{\mu_U}{\sigma_U})} \sigma_U,$$

$$E(U^2|Z = z) = \mu_U^2 + \sigma_U^2 + \frac{\phi(\frac{\mu_U}{\sigma_U})}{\Phi(\frac{\mu_U}{\sigma_U})} \sigma_U \mu_U.$$

استفاده می‌شود، که در آن  $z_1, z_2, \dots, z_n$  مشاهدات متوالی از مدل هستند و بر پایه لم ۱،

$$\mu_{v_t} = \mu + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(\lambda)$$

از آنجا که  $r(x, \beta)$  حدس اولیه‌ای از  $f(x)$  است، در [۲] فرم نیمه‌پارامتری  $r(x, \beta) \xi(x)$  برای تعدیل این تقریب اولیه پیشنهاد شده است که در آن  $\xi(x)$  عامل تعدیل‌کننده<sup>۲</sup> است. بنابراین یک روش ترکیبی پارامتری و تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری برای برآورد تابع اتورگرسیو مدل پیشنهاد شده که به برآورد نیمه‌پارامتری معروف است. به منظور برآورد عامل تعدیل‌کننده‌ی  $\xi(x)$  با استفاده از ایده‌ی مشابه [۳]، [۴] و [۸] برازش چندجمله‌ای درجه‌ی دوم به صورت

$$q_n(x, \xi) = \frac{1}{h_n} \sum_{t=3}^n k\left(\frac{z_{t-1}-x}{h_n}\right) (f(z_{t-1}) - r(z_{t-1}, \hat{\beta})) \xi^2 + \frac{1}{h_n} \sum_{t=3}^n k\left(\frac{z_{t-2}-x}{h_n}\right) (f(z_{t-2}) - r(z_{t-2}, \hat{\beta})) \xi^2, \quad (3)$$

تعریف می‌شود، که در آن  $k(\cdot)$  یک تابع کرنل<sup>۳</sup> و  $n$  پهنای پنجره<sup>۴</sup> هستند. با حداقل کردن (۳) نسبت به  $\xi(x)$ ، برآوردگر ناپارامتری  $\hat{\xi}(x)$  به صورت

$$\hat{\xi}(x) = \frac{\sum_{t=3}^n [A + B]}{\sum_{t=3}^n [K\left(\frac{z_{t-1}-x}{h_n}\right) r^2(z_{t-1}, \hat{\beta}) + K\left(\frac{z_{t-2}-x}{h_n}\right) r^2(z_{t-2}, \hat{\beta})]}$$

به دست می‌آید، که در آن

$$A = K\left(\frac{z_{t-1}-x}{h_n}\right) r(z_{t-1}, \hat{\beta}) f(z_{t-1}),$$

به طوری که

$$\mu_U = \delta(\lambda)(z - \mu),$$

$$\sigma_U = \sigma \sqrt{1 - \delta^2(\lambda)}$$

(برای اثبات به [۱۲] رجوع شود).

### ۳- مدل پیشنهادی و روش برآورد تابع اتورگرسیو غیرخطی

مدل اتورگرسیو غیرخطی مرتبه‌ی اول با خطای وابسته به صورت

$$z_t = f(z_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t, \quad |\rho| < 1,$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $f(\cdot)$  یک تابع اتورگرسیو غیرخطی نامعلوم است،  $\varepsilon_t$  یک فرآیند اتورگرسیو مانای مرتبه‌ی اول  $[AR(1)]$  را نشان می‌دهد و  $v_t \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$ . با توجه به (۱)، می‌توان نوشت

$$\varepsilon_t = z_t - f(z_{t-1}) \rightarrow \varepsilon_{t-1} = z_{t-1} - f(z_{t-2}),$$

بنابراین

$$z_t = f(z_{t-1}) + \rho(z_{t-1} - f(z_{t-2})) + v_t.$$

ابتدا تابع اتورگرسیو  $f(x)$  توسط یک حدس اولیه‌ی  $r(x, \beta)$  برآورد می‌شود که در آن  $\beta$  پارامتری نامعلوم است و برای برآورد آن از روش کمترین توان‌های دوم غیرخطی شرطی<sup>۱</sup> به صورت

3. Kernel function  
4. Window width

1. Conditional nonlinear least squares  
2. Adjustment factor

است، که در آن  $\theta = (\beta, \mu, \sigma^2, \lambda, \rho)$  بردار پارامترهای نامعلوم است و

$$f(z_{t-1}) = r(z_{t-1}, \beta)\xi(z_{t-1}),$$

$$f(z_{t-2}) = r(z_{t-2}, \beta)\xi(z_{t-2}).$$

با توجه به اینکه پیچیدگی تابع درست‌نمایی (۴) مانع از دستیابی به شکل بسته برای برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل است، در ادامه برای برآورد این پارامترها یک الگوریتم EM توسعه داده می‌شود.

با فرض اینکه  $U \sim TN(0, \sigma^2)I_{\{u>0\}}$  و با تعریف  $V \sim N(0, \sigma^2)$

$$z_t = f(z_{t-1}) + \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) + \mu + \delta(\lambda)U_t + \sqrt{1 - \delta^2(\lambda)}V_t,$$

و استفاده از لم ۳، توزیع شرطی مشاهدات در (۱) را می‌توان به صورت

$$Z_t | Z_{t-1}, Z_{t-2} \sim SN\left(\left(f(z_{t-1}) + \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) + \mu\right), \sigma^2, \lambda\right),$$

$$t = 3, 4, \dots, n.$$

نوشت، با در نظر گرفتن  $\{u_t; t = 3, \dots, n\}$  و  $\mathbf{z}$  که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی داده‌های گمشده<sup>۱</sup> و ناقص<sup>۲</sup> هستند و همچنین با استفاده از لم ۲، تابع چگالی توأم داده‌های کامل را می‌توان به صورت

$$f_{Z_t, U_t}(z_t, u_t) = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\pi\sigma^2} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2} \left[ (z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu)^2 + (1 + \lambda)^2 \left( u_t - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} (z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu) \right)^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^2\sqrt{1-\delta^2(\lambda)}} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2(1-\delta^2(\lambda))} \times \left[ (z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu)^2 + 2u_t\delta(\lambda)(z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu) + u_t^2 \right] \right\},$$

$$B = K \left( \frac{z_{t-2}-x}{h_n} \right) r(z_{t-2}, \hat{\beta}) f(z_{t-2}).$$

رابطه‌ی  $\hat{\xi}(x)$  شامل تابع نامعلوم  $f(\cdot)$  است، بنابراین با استفاده از روابط

$$\tilde{\xi}_t = \varepsilon_t \quad \mu_{\varepsilon_t} = z_t \quad f(z_{t-1}) \quad \mu_{\varepsilon_t},$$

$$\tilde{\xi}_{t-1} = \varepsilon_{t-1} \quad \mu_{\varepsilon_{t-1}} = z_{t-1} \quad f(z_{t-2}) \quad \mu_{\varepsilon_{t-1}},$$

و با توجه به این مطلب که خطاهای مدل مقادیر کوچکی هستند رابطه‌ی

$$\hat{\xi}(x) = \frac{\sum_{t=3}^n [C + D]}{\sum_{t=3}^n [K \left( \frac{z_{t-1}-x}{h_n} \right) r^2(z_{t-1}, \hat{\beta}) + K \left( \frac{z_{t-2}-x}{h_n} \right) r^2(z_{t-2}, \hat{\beta})]}$$

به دست می‌آید، که در آن

$$C = K \left( \frac{z_{t-1}-x}{h_n} \right) r(z_{t-1}, \hat{\beta}) (z_t - \mu_{\varepsilon_t}),$$

$$D = K \left( \frac{z_{t-2}-x}{h_n} \right) r(z_{t-2}, \hat{\beta}) (z_{t-1} - \mu_{\varepsilon_{t-1}}).$$

در نهایت، برآوردگر نیمه‌پارامتری تابع اتورگرسیو به صورت

$$\hat{f}(x) = r(x, \hat{\beta}) \hat{\xi}(x).$$

به دست می‌آید.

#### ۴- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

برای برآورد پارامترهای مدل از روش ML استفاده شده است. تابع درست‌نمایی شرطی مدل پیشنهادی به صورت

$$L(\theta | \mathbf{z}) = \prod_{t=3}^n f_{SN}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \theta)$$

$$= \prod_{t=3}^n \frac{2}{\sigma} \phi \left( \frac{z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu}{\sigma} \right) \times \Phi \left( \lambda \left( \frac{z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu}{\sigma} \right) \right)$$

$$= \left( \frac{2}{\sigma} \right)^{n-2} \exp \left\{ \frac{-1}{2} \sum_{t=3}^n (z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu)^2 \right\}$$

$$\times \prod_{t=3}^n \Phi \left( \lambda \left( \frac{z_t - f(z_{t-1}) - \rho(z_{t-1}, f(z_{t-2})) - \mu}{\sigma} \right) \right), \quad (۴)$$

1. Missing data
2. Incomplete data

$$a_{1t} = E_{\hat{\theta}}(U_t | Z_{t-1}, Z_{t-2}) = \mu_{U_t} + \frac{\phi(\frac{\hat{\mu}_{U_t}}{\hat{\sigma}_U})}{\Phi(\frac{\hat{\mu}_{U_t}}{\hat{\sigma}_U})} \hat{\sigma}_U,$$

$$a_{2t} = E_{\hat{\theta}}(U_t | Z_{t-1}, Z_{t-2}) = \mu_{U_t}^2 + \hat{\sigma}_U^2 + \frac{\phi(\frac{\hat{\mu}_{U_t}}{\hat{\sigma}_U})}{\Phi(\frac{\hat{\mu}_{U_t}}{\hat{\sigma}_U})} \hat{\sigma}_U \mu_{U_t},$$

$$\mu_{U_t} = \delta(\hat{\lambda}) \left( z_t \quad \tilde{f}(z_{t-1}) \quad \hat{\rho}(z_{t-1} \quad \tilde{f}(z_{t-2})) \quad \mu \right),$$

$$\hat{\sigma}_U = \hat{\sigma} \sqrt{(1 - \delta^2(\hat{\lambda}))},$$

$$\tilde{f}(z_{t-1}) = r(z_{t-1}, \hat{\beta}) \tilde{\xi}(z_{t-1}),$$

$$\tilde{f}(z_{t-2}) = r(z_{t-2}, \hat{\beta}) \tilde{\xi}(z_{t-2}).$$

گام M از الگوریتم EM، مقادیری از پارامترها را در فضای پارامتری جستجو می‌کند که امید ریاضی شرطی محاسبه شده در گام E را ماکسیم می‌کنند. با در نظر گرفتن برآورد ماکسیم درستنمایی برای پارامتر  $\mu$  در  $k$  امین تکرار، می‌توان برآورد این پارامتر در مرحله  $k+1$  را به صورت

$$\mu^{(k+1)} = \frac{1}{n-2} [\sum_{t=3}^n (z_t \quad \tilde{f}^{(k)}(z_{t-1}) \quad \hat{\rho}^{(k)}(z_{t-1} \quad \tilde{f}^{(k)}(z_{t-2})) \quad \mu) \delta(\hat{\lambda}^{(k)}) \sum_{t=3}^n a_{1t}^{(k)}].$$

به دست آورد. به طور مشابه با مشتق‌گیری از (۶) نسبت به  $\sigma^2$  و به کارگیری مرحله‌ی E برآورد  $\sigma^2$  در مرحله  $k+1$  به صورت

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \frac{1}{2(n-2)(1-\delta^2(\hat{\lambda}^{(k)}))} [\sum_{t=3}^n a_{2t}^{(k)} + 2\delta(\hat{\lambda}^{(k)}) \sum_{t=3}^n a_{1t}^{(k)} (z_t \quad \tilde{f}^{(k)}(z_{t-1}) \quad \hat{\rho}^{(k)}(z_{t-1} \quad \tilde{f}^{(k)}(z_{t-2})) \quad \mu^{(k+1)}) + \sum_{t=3}^n (z_t \quad \tilde{f}^{(k)}(z_{t-1}) \quad \hat{\rho}^{(k)}(z_{t-1} \quad \tilde{f}^{(k)}(z_{t-2})) \quad \mu^{(k+1)})^2].$$

به دست می‌آید. همچنین برآورد پارامتر  $\rho$  در مرحله  $k+1$  به صورت

$$\hat{\rho}^{(k+1)} = \frac{\sum_{t=3}^n C(z_t - \tilde{f}^{(k)}(z_{t-1}) - \hat{\mu}^{(k+1)}) - \delta(\hat{\lambda}^{(k)}) \sum_{t=3}^n a_{1t}^{(k)} C}{\sum_{t=3}^n C^2}$$

نوشت. بنابراین توابع درستنمایی و لگاریتم درستنمایی داده‌های کامل به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} L_C(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{u}) &= \prod_{t=3}^n f_{Z_t, U_t}(z_t, u_t) \\ &= (\pi\sigma^2)^{-(n-2)} (1 - \delta^2(\lambda))^{-\frac{n-2}{2}} \\ &= (\pi\sigma^2)^{-(n-2)} (1 - \delta^2(\lambda))^{-\frac{n-2}{2}} \\ &\quad \times \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2(1-\delta^2(\lambda))} \sum_{t=3}^n [z_t \quad f(z_{t-1}) \quad \rho(z_{t-1} \quad f(z_{t-2})) \quad \mu]^2 + 2u_t \delta(\lambda) (z_t \quad f(z_{t-1}) \quad \rho(z_{t-1} \quad f(z_{t-2})) \quad \mu) + u_t^2] \right\}, \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} l_C(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{u}) &= (n-2) \log(\sigma^2) - \frac{n-2}{2} \log(1 - \delta^2(\lambda)) - \frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2(\lambda))} \\ &\quad \times [\sum_{t=3}^n (z_t \quad f(z_{t-1}) \quad \rho(z_{t-1} \quad f(z_{t-2})) \quad \mu)^2 + 2\delta(\lambda) \sum_{t=3}^n u_t (z_t \quad f(z_{t-1}) \quad \rho(z_{t-1} \quad f(z_{t-2})) \quad \mu) + \sum_{t=3}^n u_t^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

به دست می‌آیند.

در گام E از الگوریتم EM، امید ریاضی شرطی (5) محاسبه می‌شود. بر پایه لم ۳، رابطه

$$U_t | Z_t = z_t \sim TN(\mu_{U_t}, \sigma_U^2) I_{u_t > 0},$$

برقرار است، که در آن

$$\begin{aligned} \mu_{U_t} &= \delta(\lambda) (z_t \quad f(z_{t-1}) \quad \rho(z_{t-1} \quad f(z_{t-2})) \quad \mu), \\ \sigma_U &= \sigma \sqrt{1 - \delta^2(\lambda)}. \end{aligned}$$

بنابراین، امید ریاضی شرطی (5) به صورت

$$\begin{aligned} E[l_C(\hat{\theta} | \mathbf{z}, \mathbf{u}) | \mathbf{z}] &= (n-2) \log(\hat{\sigma}^2) - \frac{(n-2)}{2} \log(1 - \delta^2(\hat{\lambda})) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2(1-\delta^2(\hat{\lambda}))} \\ &\quad [\sum_{t=3}^n (z_t \quad \tilde{f}(z_{t-1}) \quad \hat{\rho}(z_{t-1} \quad \tilde{f}(z_{t-2})) \quad \mu)^2 + 2\delta(\hat{\lambda}) \sum_{t=3}^n a_{1t} (z_t \quad (z_{t-1}) \quad \hat{\rho}(z_{t-1} \quad \tilde{f}(z_{t-2})) \quad \mu) + \sum_{t=3}^n a_{2t}], \end{aligned} \quad (6)$$

محاسبه می‌شود، که در آن

$$\tilde{f}^{(k+1)}(z_{t-2}) = r(z_{t-2}, \hat{\beta}^{(k+1)}) \tilde{\xi}^{(k+1)}(z_{t-2}), \quad \text{است، که در آن}$$

$$C = \left( z_{t-1} \quad \tilde{f}^{(k)}(z_{t-2}) \right).$$

به دست می‌آید.

اکنون با فرض

$$\mu = \mu^{(k+1)}, \sigma^2 = \hat{\sigma}^{2(k+1)} \quad \text{و} \quad \rho = \hat{\rho}^{(k+1)}$$

می‌توان  $\hat{\lambda}^{(k+1)}$  را از حل معادله‌ی

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \arg \max_{\lambda} \sum_{t=3}^n \Phi(\lambda \times D), \quad (7)$$

محاسبه کرد، که در آن

$$D = \frac{z_t - \tilde{f}^{(k)}(z_{t-1}) - \hat{\rho}^{(k+1)}(z_{t-1} - \tilde{f}^{(k)}(z_{t-2})) - \hat{\mu}^{(k+1)}}{\hat{\sigma}^{(k+1)}}$$

و برای حل (7) می‌توان از یک الگوریتم تکراری مانند نیوتن رافسون<sup>۱</sup> استفاده کرد.

اکنون با محاسبه‌ی  $\mu_{v_t}^{(k+1)} = \mu^{(k+1)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(\hat{\lambda}^{(k+1)}) \hat{\sigma}^{(k+1)}$  و با توجه به رابطه (۲)، برآورد پارامتر  $\beta$  به صورت

$$\hat{\beta}^{(k+1)} = \arg \min_{\beta \in \Theta} \sum_{t=3}^n (z_t - r(z_{t-1}, \beta) - \hat{\rho}^{(k+1)}(z_{t-1} - r(z_{t-2}, \beta)))^2 \hat{\mu}_{v_t}^{(k+1)}$$

به دست می‌آید. بنابراین  $\xi$  را می‌توان به شکل

$$\tilde{\xi}^{(k+1)}(x) = \frac{\sum_{t=3}^n [G+H]}{\sum_{t=3}^n [L+M]}$$

برآورد نمود، که در آن

$$\begin{aligned} G &= K \left( \frac{z_{t-1}-x}{h_n} \right) r(z_{t-1}, \hat{\beta}^{(k+1)}) (z_t - \hat{\mu}_{\varepsilon_t}^{(k+1)}), \\ H &= K \left( \frac{z_{t-2}-x}{h_n} \right) r(z_{t-2}, \hat{\beta}^{(k+1)}), \\ L &= K \left( \frac{z_{t-1}-x}{h_n} \right) r^2(z_{t-1}, \hat{\beta}^{(k+1)}), \\ M &= K \left( \frac{z_{t-2}-x}{h_n} \right) r^2(z_{t-2}, \hat{\beta}^{(k+1)}). \end{aligned}$$

در نهایت، برآوردگر نیمه‌پارامتری تابع اتورگرسیو در مرحله‌ی  $k+1$  به صورت

$$\tilde{f}^{(k+1)}(z_{t-1}) = r(z_{t-1}, \hat{\beta}^{(k+1)}) \tilde{\xi}^{(k+1)}(z_{t-1}),$$

<sup>1</sup>. Newton Raphson

## ۵- مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، کارایی روش پیشنهادی با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

دو مدل

$$z_t = f(z_{t-1}) + v_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad \text{مدل ۱:}$$

$$z_t = f(z_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad \text{مدل ۲:}$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t, \quad |\rho| < 1$$

را در نظر بگیرید. با فرض

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5e^{-x^2}, \quad r(x, \beta_1) = \beta_1 e^{-x^2} \\ f_2(x) &= 0.8 \sin(x) + 0.1x, \quad r(x, \beta_2) = \beta_2 \sin x \end{aligned}$$

داده‌ها از مدل ۲ با اندازه نمونه ۲۰۰ و ۱۰۰ (و  $n=50$ ) با فرض  $v_t \sim SN(0.5, 0.5, 1)$  بر پایه لم ۲ با استفاده از محیط نرم افزار R تولید شده‌اند. جدول-های ۱ و ۲ شاخص‌های توصیفی برای داده‌های شبیه‌سازی شده را نشان می‌دهند. با توجه به مقادیر چولگی و آماره‌ی آزمون کولموگروف اسمیرنوف<sup>۱</sup> نرمال بودن مجموعه داده‌ها در سطح معنی‌داری پنج درصد رد می‌شود. تابع کرنل به صورت تابع گوسی<sup>۲</sup> و پهنای پنجره ( $n$ ) با استفاده از تکنیک پنجره‌ی باز<sup>۳</sup> (به [۱۳] رجوع شود) انتخاب شده است. به منظور ارزیابی کارایی مدل پیشنهادی، ریشه توان دوم خطای<sup>۴</sup> پیش‌بینی به صورت

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n-2} (f(z_t) - \tilde{f}(z_t))^2}$$

محاسبه و برای مدل‌های ۱ و ۲ با اندازه پهنای پنجره ۰/۱۲ و ۰/۰۸  $n =$  در جدول‌های ۳ و ۴ آورده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش اندازه نمونه مقادیر RMSE کاهش می‌یابد.

جدول ۱: شاخص‌های توصیفی داده‌های شبیه‌سازی شده از مدل اتورگرسیو غیرخطی با خطای وابسته (مدل ۲)،

$$f_1(x) = 5e^{-x^2}$$

مقدار p	آماره آزمون	چولگی	انحراف معیار	میانگین	ماکسیمم	مینیمم	اندازه نمونه	مجموعه داده
$1 - e^{-1/88}$	۰/۸۱	۰/۹۲۵۱	۰/۷۷۶۶	۲/۱۱۶۹	۴/۶۹۷۵	۰/۵۸۹۰	۵۰	۱
$1 - e^{-2/2e}$	۰/۸۹	۰/۳۰۸۴	۰/۴۷۲۲	۲/۱۴۴۳	۳/۳۸۷۳	۱	۱۰۰	۲
$1 - e^{-2/2e}$	۰/۸۸	۰/۲۴۴۵	۰/۴۲۴۶	۲/۰۷۹۳	۳/۷۶۹۴	۰/۹۹۵۵	۲۰۰	۳

جدول ۲: شاخص‌های توصیفی داده‌های شبیه‌سازی شده از مدل اتورگرسیو غیرخطی با خطای وابسته،

$$f_2(x) = 0.8 \sin(x) + 0.1x$$

مقدار p	آماره آزمون	چولگی	انحراف معیار	میانگین	ماکسیمم	مینیمم	اندازه نمونه	مجموعه داده
$1 - e^{-1/88}$	۰/۹۳	-۰/۴۳۰۹	۰/۵۱۵۷	۲/۶۱۳۶	۳/۶۸۴۳	۱	۵۰	۱
$1 - e^{-2/2e}$	۰/۹۴	-۰/۱۵۰۱	۰/۴۵۲۹	۲/۵۳۲۶	۳/۵۳۱۳	۱	۱۰۰	۲
$1 - e^{-2/2e}$	۰/۹۲	-۰/۰۹۴۱	۰/۴۷۹۹	۲/۵۸۷۸	۴/۲۰۱۶	۱	۲۰۰	۳

جدول ۳: مقادیر ریشه میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی برای مدل‌های ۱ و ۲،  $f_1(x) = 5e^{-x^2}$

اندازه نمونه	پهنای پنجره	مدل ۱	مدل ۲
۵۰	۰/۰۸	۱/۸۲۷۶	۱/۳۹۳۱
	۰/۱۲	۱/۲۳۲۱	۰/۸۶۴۱
۱۰۰	۰/۰۸	۰/۷۸۴۲	۰/۷۵۲۷
	۰/۱۲	۰/۷۵۹۱	۰/۶۳۳۲
۲۰۰	۰/۰۸	۰/۶۹۹۱	۰/۶۹۸۵
	۰/۱۲	۰/۵۷۷۷	۰/۵۲۵۸

جدول ۴: مقادیر ریشه میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی برای مدل‌های ۱ و ۲،  $f_2(x) = 0.8 \sin(x) + 0.1x$

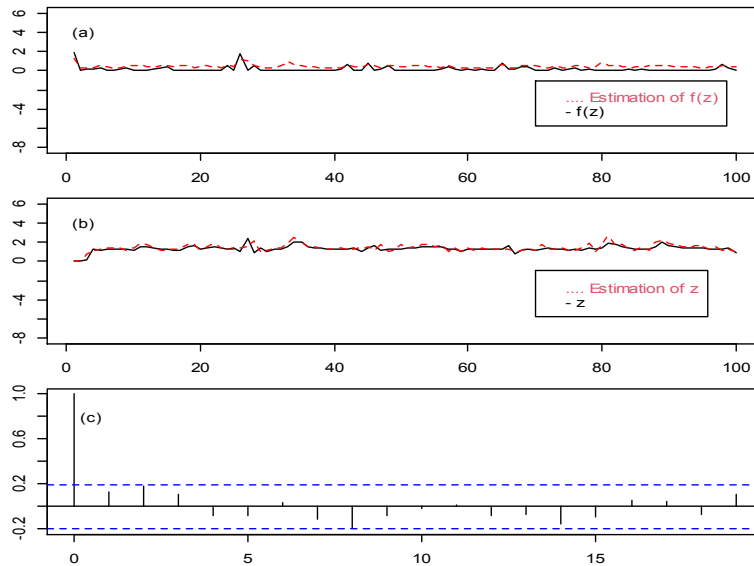
اندازه نمونه	پهنای پنجره	مدل ۱	مدل ۲
۵۰	۰/۰۸	۱/۴۸۴۱	۱/۱۹۵۱
	۰/۱۲	۱/۲۸۷۳	۰/۸۷۱۷
۱۰۰	۰/۰۸	۱/۴۵۷۱	۱/۱۷۷۵
	۰/۱۲	۱/۱۰۸۸	۰/۸۶۱۷
۲۰۰	۰/۰۸	۱/۴۳۶۰	۱/۰۸۳۱
	۰/۱۲	۱/۰۹۴۲	۰/۸۰۷۳

1. Kolmogorov Smirnov test
2. Gaussian function
3. Opening the window technique
4. Root Mean Square Error (RMSE)



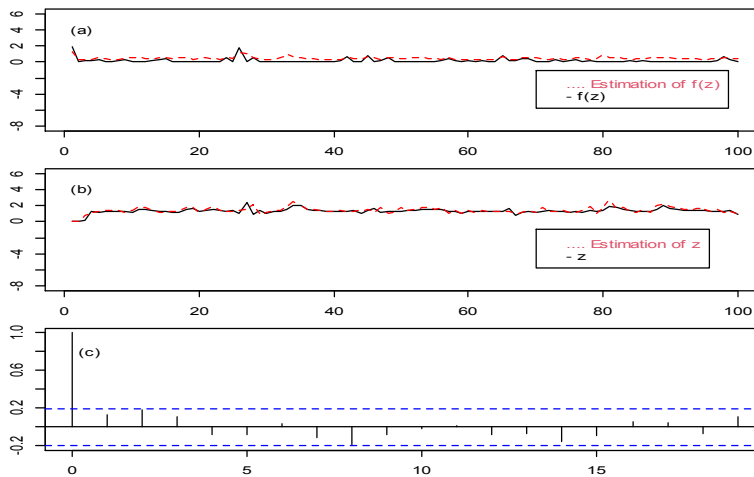
مناسبت مدل، نمودار تابع خودهمبستگی خطاها نیز در قسمت (c) شکل‌ها آمده است که نشان می‌دهد خطاهای مدل دارای ناهمبستگی هستند. شکل‌های ۳ و ۴ برای مقایسه مدل‌های ۱ و ۲ به ازای  $n=50$  و  $n=112$  آورده شده‌اند.

منحنی‌های توابع  $f(z_t)$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها با خطای وابسته به‌ازای  $n=100$  و  $h_n = 0.08$  در قسمت (a) شکل‌های ۱ و ۲، مقادیر  $z_t$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها در قسمت (b) این شکل‌ها نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که برآوردها به مقادیر واقعی بسیار نزدیک هستند. برای بررسی



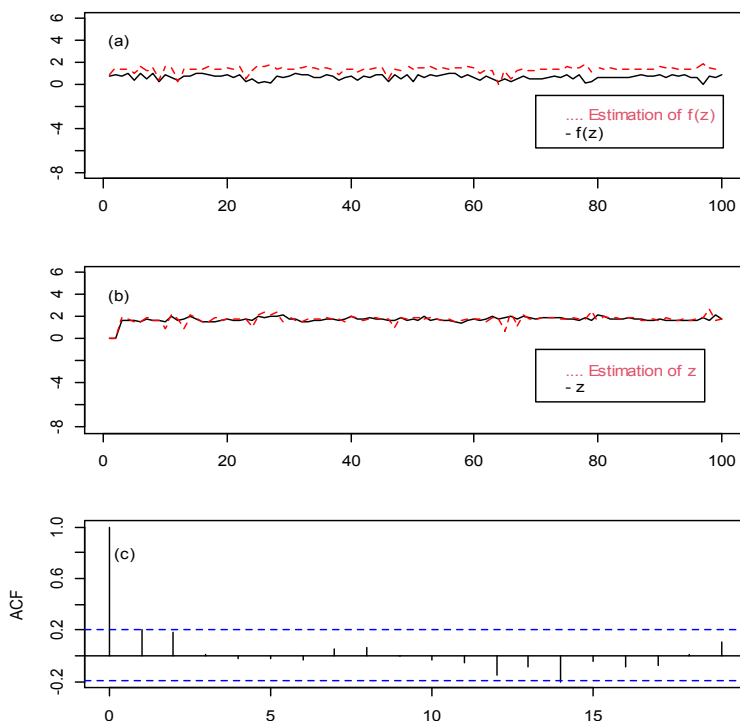
شکل ۱: (a) مقادیر  $f(z_t)$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها برای مدل ۲ (b) مقادیر  $z_t$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها برای مدل ۲ (c) نمودار ACF به ازای  $n=100$  و  $h_n = 0.08$

$$f_1(x) = 5e^{-x^2} \text{ و } h_n = 0.08, n=100$$

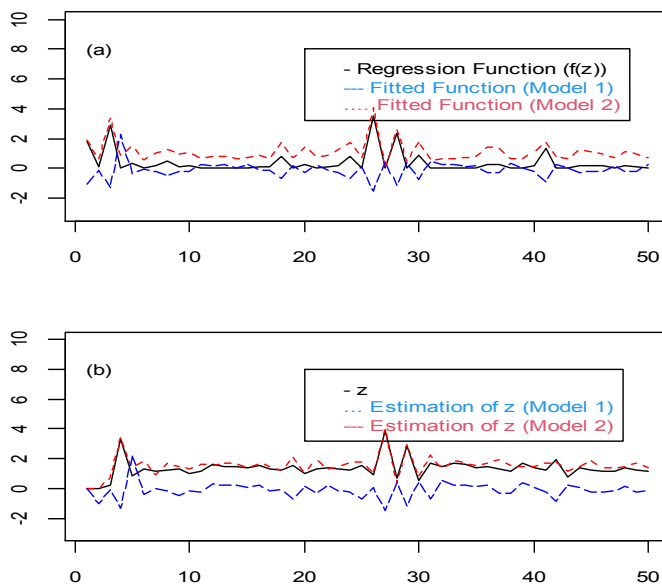


شکل ۱: (a) مقادیر  $f(z_t)$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها برای مدل ۲ (b) مقادیر  $z_t$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها برای مدل ۲ (c) نمودار ACF به ازای  $n=100$  و  $h_n = 0.08$

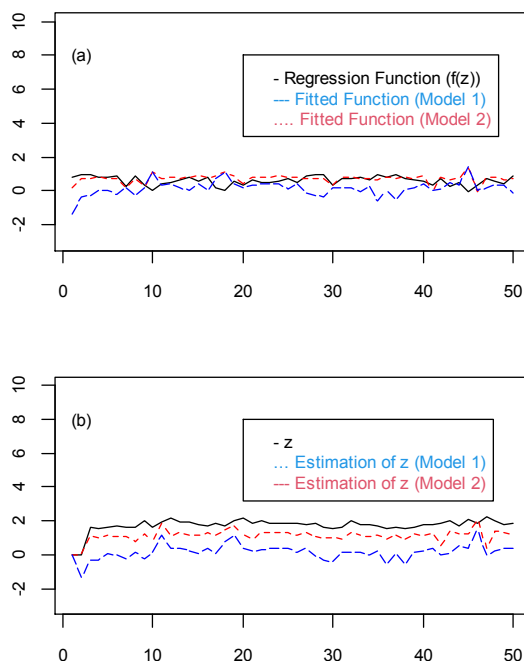
$$f_1(x) = 5e^{-x^2} \text{ و } h_n = 0.08, n=100$$



شکل ۲: (a) مقادیر  $f(z_t)$  و برآورد نیمه پارامتری آن‌ها برای مدل ۲ و برآورد  $z_t$  و برآورد نیمه پارامتری آن‌ها برای مدل ۲ (b) مقادیر  $z_t$  و برآورد نیمه پارامتری آن‌ها برای مدل ۲ (c) نمودار ACF به ازای  $f_2(x) = 0.8 \sin(x) + 0.1x$  و  $h_n = 0.08, n=100$



شکل ۳: (a) مقادیر  $f(z_t)$  و برآورد نیمه پارامتری آن‌ها (b) مقادیر  $z_t$  و برآورد نیمه پارامتری آن‌ها به ازای  $f_1(x) = 5e^{-x^2}$  و  $h_n = 0.12$  و  $n=50$



شکل ۴: (a) مقادیر  $f(z_t)$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها (b) مقادیر  $z_t$  و برآورد نیمه‌پارامتری آن‌ها به ازای  $f_2(x) = 0.8 \sin(x) + 0.1x$  و  $h_n = 0.12$  و  $n=50$

## ۶- مثال واقعی

در این بخش، به منظور بررسی کارایی مدل پیشنهادی از داده‌های نرخ برابری یورو به دلار در دوره زمانی ۲۰ ژانویه ۲۰۲۰ تا ۲۳ اکتبر ۲۰۲۰ استفاده شده است. داده‌ها از سایت رسمی [www.investing.com](http://www.investing.com) استخراج شده‌اند.

با استفاده از روش نیمه‌پارامتری ارائه شده و با در نظر گرفتن  $r(x, \beta) = \beta e^{-x^2}$  تابع غیرخطی مدل برآورد شده است. با توجه به شاخص‌های توصیفی این مجموعه داده‌ها که در جدول ۵ ارائه شده است، داده‌ها چولگی دارند. به منظور مقایسه، مدل‌های با خطاهای وابسته و مستقل برای پیش‌بینی داده‌ها استفاده شده‌اند و مقادیر برآوردهای

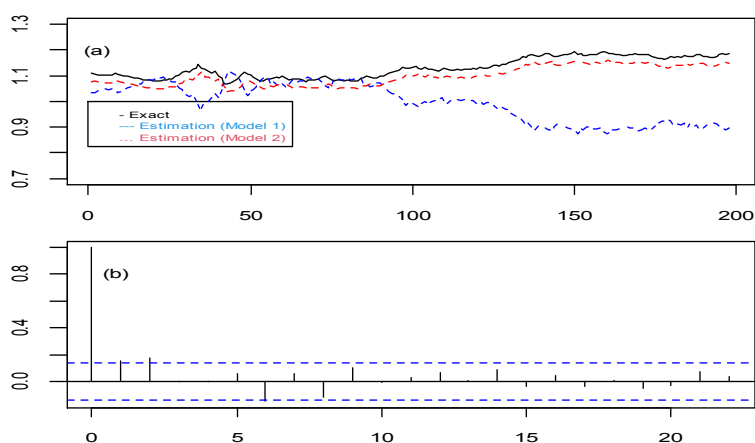
ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل‌ها و ریشه میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی در جدول ۶ آورده شده است. نمودار داده‌های نرخ برابری یورو به دلار (خط مشکی) و برآوردهای آن‌ها (خط آبی برای مدل ۱ و خط قرمز برای مدل ۲) در قسمت (a) شکل ۳ نشان داده شده است. قسمت (b) شکل ۳، نمودار ACF خطاهای برآورد مدل اتورگرسیو غیرخطی مرتبه‌ی اول با خطای وابسته را نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۴ و همچنین با توجه به شکل ۵، مدل اتورگرسیو غیرخطی مرتبه‌ی اول با خطاهای چوله نرمال و وابسته برای مدل‌بندی این داده‌ها از کارایی بیشتری برخوردار است.

جدول ۵: شاخص‌های توصیفی داده‌های نرخ برابری یورو به دلار

اندازه نمونه	میانگین	مینیمم	ماکسیمم	واریانس	چولگی	مجموع
۲۰۰	۱/۱۲۹۸	۱/۰۶۹۱	۱/۲۳۲۵	۰/۰۰۱	۰/۲۳۳۵	۲۵۵/۹

جدول ۶: برآوردهای ML پارامترها و مقادیر RMSE

مدل	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\rho}$	RMSE
۱	۰/۰۲	۰/۰۲۵	۱/۵۰	۳/۵۴	-	۰/۱۷۰۳
۲	-۰/۰۳	۰/۰۰۱	۲/۱۴	۵/۱۴	۰/۹	۰/۱۵۱۸



شکل ۵: (a) منحنی مشاهدات واقعی و برآورد نیمه پارامتری آن‌ها (b) نمودار ACF خطاهای برآورد مشاهدات در مدل ۲

## ۷- بحث و نتیجه‌گیری

مدل‌های اتورگرسیو مبتنی بر فرض نرمال بودن خطاها برای مدل‌بندی داده‌های چوله مناسب نیستند و منجر به پیش‌بینی‌های گمراه‌کننده می‌شوند. از سوی دیگر در برخی کاربردها با پدیده‌ی غیرخطی بودن حاکم بر سری زمانی مواجه می‌شویم. از این‌رو، در این پژوهش یک مدل اتورگرسیو غیرخطی مرتبه‌ی اول با خطای وابسته و چوله نرمال معرفی و از یک روش نیمه پارامتری برای برآورد قسمت غیرخطی آن استفاده شده است. پارامترهای مدل با استفاده از روش ML از طریق الگوریتم EM برآورد شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که برآورد نیمه پارامتری در مدل پیشنهادی دارای دقت و کارایی مطلوبی است.

*Communications in Statistics-Simulation and computation*, 47: 1453-1462.

فهرست منابع

[9] Hajrajabi, A. and Mortazavi, S. J. (2019). The first-order nonlinear autoregressive Model with skew normal innovations: A semiparametric approach. *Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science*, 43: 579-587

[10] Henz N (1986). A probabilistic representation of the skew-normal. *Scandinavian Journal of statistics*, 13:171-178

[11] Azzalini A (1986). Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of statistics*, 12:171-178.

[۱۲] بهرامی، محمد (۱۳۸۹)، توزیع نرمال چوله و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای آن، دهمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه تبریز.

[13] Farnoosh, R. and Nademi, A. (2014). Mixture of autoregressive-autoregressive conditionally heteroscedastic models: Semi- parametric approach. *Journal of Applied Statistics*, 41: 275-293.

[1] Farnoosh, R, Hajebi, M. and Samadi, Y. (2019). A semiparametric estimation for the first-order nonlinear autoregressive time series model with independent and dependent errors. *Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science*, 43: 905-917.

[2] Mortazavi, S. J. and Farnoosh, R. (2013). The prediction nonlinear autoregressive model for annual ring width of pinus eldarica with semiparametric approach. *World Applied Sciences Journal*, 26(6): 783-787.

[3] Zhuoxi, Y., Dehui, W. and Ningzhong, S. (2009). Semiparametric estimation of regression function in autoregressive models. *Statistics & Probability Letters*, 61: 165-172.

[4] Farnoosh, R. and Mortazavi, S. J. (2011). A semiparametric method for estimating nonlinear autoregressive model with dependent errors. *Nonlinear Analysis*, 74: 6358-6370.

[5] Tong, H. (1990). *Nonlinear time series*, Oxford university press, Oxford.

[6] Li, Q. (1999). Consistent model specification tests for time series econometric models. *Journal of econometrics*, 92: 101-147.

[7] Azzalini, A. (1985). A class of distribution which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of statistics*, 12: 171-178.

[8] Hajrajabi, A. and Fallah, S. J. (2018). Nonlinear semiparametric AR(1) model with skew symmetric innovations.

