دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی وجود جواب‌های ضعیف مثبت دستگاه‌های جدیدی از نوع کیرشهف با شرط مرزی دیریکله

محمدباقر قائمی[۱]، مهدی چوبین[۲*]

(۱) دانشیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
(۲) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۲۹   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۰۳

چکیده

معادله کیرشهف با شکل اولیه

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (*)$$

تعمیم معادله موج کلاسیک دالامبر با در نظر گرفتن اثرات تغییر طول رشته در طی ارتعاشات است. در (*)، پارامتر L طول رشته، h مساحت سطح مقطع، E ضریب یانگ مواد، ρ چگالی جرم و P_0 کشش اولیه است. در سال‌های اخیر، برخی تعمیم‌های کاربردی معادله کیرشهف در بسیاری از مقالات ارایه شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله، به بررسی وجود جواب‌های ضعیف دسته‌ای از دستگاه‌های از نوع کیرشهف با پارامترهای چندگانه می‌پردازیم. نشان خواهیم داد که تحت چه شرایطی این دستگاه‌ها به ازای همه پارامترهای مثبت دلخواه دارای جواب مثبت هستند. رویکرد ما در این مقاله براساس روش جواب‌های پایینی- بالایی است.

واژه‌های کلیدی: معادله کیرشهف، جواب ضعیف مثبت، شرط مرزی دیریکله.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: m.choubin@gmail.com

۱- مقدمه

با توجه به کار اساسی که توسط کیرشهف در سال ۱۸۸۳ انجام شد، معادله کیرشهف با شکل اولیه

$$\rho\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}-\left(\frac{P_{0}}{h}+\frac{E}{2L}\int_{0}^{L}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx\right)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=0, \qquad (1)$$

به طور رسمی معرفی و از آن به بعد محبوبیت یافت. این معادله، تعمیم معادله موج کلاسیک دالامبر با در نظر گرفتن اثرات تغییر طول رشته در طی ارتعاشات است که کاربرد فراوانی در صنعت و فیزیک دارد. در (۱)، پارامتر L طول رشته، h مساحت سطح مقطع، E ضریب یانگ مواد، ρ چگالی جرم و P_{0} کشش اولیه است. در سال های اخیر، برخی تعمیم‌های کاربردی معادله کیرشهف در بسیاری از مقالات ارایه شده و مورد مطالعه قرار گرفته است، به عنوان مثال به [۲، ۴، ۵، ۷، ۹، ۱۱ – ۱۳] مراجعه کنید. حال، دستگاه‌هایی از نوع (p,q)-کیرشهف که در این مقاله به مطالعه آن‌ها خواهیم پرداخت، را بیان و وجود جواب‌های ضعیف این نوع دستگاه‌ها را با شرط مرزی دیریکله بررسی می‌کنیم.

۲- پیشینه تحقیق

فرض کنید Ω دامنه‌ای کراندار و با مرزی هموار در $\mathbb{R}^{N}$ و همچنین $1<p,q<N$، $0\le a<p-1$، $0\le d<q-1$ و b و c اعداد حقیقی مثبتی هستند. همانند افروزی و همکاران[۷]، برای $i=1,2$ فرض می‌کنیم $M_i:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$ در شرط زیر صدق کنند:

(ش ۱) M_1 و M_2 توابعی پیوسته و صعودی هستند به طوری که برای هر $t\in\mathbb{R}^{+},\ i=1,2$:

$$0<m_i\le M_i(t)\le m_i^{\infty}<\infty.$$

هم‌اکنون دستگاه‌های از نوع (p,q)-کیرشهف زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases}-M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx\right)\Delta_{p}u=\lambda_1 u^{a}+\mu_1 v^{b}, & x\in\Omega,\\ -M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^{q}\,dx\right)\Delta_{q}v=\lambda_2 u^{c}+\mu_2 v^{d}, & x\in\Omega,\\ u=0=v, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \qquad (2)$$

و

$$\begin{cases}-M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx\right)\Delta_{p}u=\lambda u^{a}v^{b}, & x\in\Omega,\\ -M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^{q}\,dx\right)\Delta_{q}v=\lambda u^{c}v^{d}, & x\in\Omega,\\ u=0=v, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \qquad (3)$$

که در آن $\Delta_s z=div(|\nabla z|^{s-2}\nabla z)$، $s>1$؛ λ، λ_1، λ_2، μ_1 و μ_2 پارامترهایی مثبت هستند. این مسایل، دستگاه‌های فیزیکی و زیستی مختلفی از جمله تراکم جمعیت را مدل‌سازی می‌کنند[۶]. در این مقاله، ما قضایا و نتایج ارایه شده توسط نویسندگان تاکنون از جمله افروزی و همکاران [۷] را برای دستگاه‌های فوق بهبود و گسترش می‌دهیم. در حالت خاص $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2$، قضیه ۱-۱ در [۷] وجود یک جواب ضعیف مثبت را برای دستگاه‌های (۲) و (۳) به ازای λهای به اندازه کافی بزرگ و شرط‌های زیر نتیجه می‌دهد:

* در دستگاه (۲)، $q-1-\max\{c,d\}>0$ و

$$p-1-\max\left\{a,\frac{bc}{q-1},\frac{bd}{q-1}\right\}>0;$$

* در دستگاه (۳)، $q-1-d>c$ و

$$(p-1-a)(q-1)-b(c+d)>0.$$

در این مقاله، با بهبود بخشیدن دو شرط بالا نشان خواهیم داد که دستگاه‌های (۲) و (۳) به ازای هر پارامتر مثبت λ، λ_i و μ_i، $(i=1,2)$، دارای جوابی ضعیف و مثبت است. برای رسیدن به این هدف از روش جواب‌های پایینی- بالایی، که در ادامه شرح خواهیم داد، استفاده می‌کنیم. قابل ذکر است که این روش در جهت اثبات وجود جواب معادلات دیفرانسیل و توسط افراد زیادی مانند [۷،۳،۱] مورد استفاده قرار گرفته است.

۳- مفاهیم اولیه و نتیجه اصلی

این بخش را با معرفی جواب ضعیف و جواب‌های پایینی و بالایی یک دستگاه به مفهوم [۷] آغاز می‌کنیم. ابتدا یادآوری می‌کنیم $W_0^{1,r}:=W_0^{1,r}(\Omega)$ کامل‌شده فضای $C_0^{\infty}(\Omega)$ برای $r=p,q$، تحت نرم زیر است:

$$\|u\|:=\left(\int_\Omega |\nabla u|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

تعریف ۳-۱. یک زوج از توابع $(u,v)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ را یک جواب ضعیف دستگاه

$$\begin{cases} -M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\Delta_p u = h_1(x,u,v) & x\in\Omega,\\ -M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right)\Delta_q v = h_2(x,u,v) & x\in\Omega,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

می‌نامیم، هرگاه روی $\partial\Omega$، $(u,v)=(0,0)$ و برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ و $w_2\in W_0^{1,q}$ داشته باشیم

$$M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\cdot\nabla w_1\,dx = \int_\Omega h_1(x,u,v)w_1\,dx,$$
$$M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right)\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\,\nabla v\cdot\nabla w_2\,dx = \int_\Omega h_2(x,u,v)w_2\,dx.$$

تعریف ۳-۲. یک زوج از توابع $(\psi_1,\psi_2)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ را یک جواب پایینی دستگاه (۴) می‌نامیم، هرگاه روی $\partial\Omega$، $(\psi_1,\psi_2)=(0,0)$ و برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ و $w_2\in W_0^{1,q}$ داشته باشیم

$$M_1\left(\int_\Omega |\nabla\psi_1|^p\,dx\right)\int_\Omega |\nabla\psi_1|^{p-2}\,\nabla\psi_1\cdot\nabla w_1\,dx \le \int_\Omega h_1(x,\psi_1,\psi_2)w_1\,dx,$$
$$M_2\left(\int_\Omega |\nabla\psi_2|^q\,dx\right)\int_\Omega |\nabla\psi_2|^{q-2}\,\nabla\psi_2\cdot\nabla w_2\,dx \le \int_\Omega h_2(x,\psi_1,\psi_2)w_2\,dx.$$

به همین ترتیب، می‌گوییم زوج $(z_1,z_2)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ یک جواب بالایی دستگاه (۴) است هرگاه روی $\partial\Omega$، $(z_1,z_2)=(0,0)$ و برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ و $w_2\in W_0^{1,q}$ داشته باشیم

$$M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p\,dx\right)\int_\Omega |\nabla z_1|^{p-2}\,\nabla z_1\cdot\nabla w_1\,dx \ge \int_\Omega h_1(x,z_1,z_2)w_1\,dx,$$
$$M_2\left(\int_\Omega |\nabla z_2|^q\,dx\right)\int_\Omega |\nabla z_2|^{q-2}\,\nabla z_2\cdot\nabla w_2\,dx \ge \int_\Omega h_2(x,z_1,z_2)w_2\,dx.$$

در مرجع [۷] نشان داده شد که اگر یک جواب پایینی (ψ_1,ψ_2) و یک جواب بالایی (z_1,z_2) از دستگاه (۴) موجود باشد به طوری که $(\psi_1,\psi_2)\le(z_1,z_2)$، آن‌گاه یک جواب ضعیف $(u,v)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ چنان موجود است که $(u,v)\in[(\psi_1,\psi_2),(z_1,z_2)]$.

به منظور اثبات نتیجه اصلی این مقاله، ما نیازمند معرفی برخی نمادها هستیم که به شرح زیر است. برای $r=p,q$، فرض کنید λ_r اولین مقدارویژه مساله

$$\begin{cases} -\Delta_r\phi=\lambda|\phi|^{p-2}\phi, & x\in\Omega,\\ \phi=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{۵}$$

و $\phi_r\in C^1(\bar\Omega)$ تابع‌ویژه متناظر با λ_r به گونه‌ای باشد که روی Ω، $\phi_r>0$ و روی $\partial\Omega$، $|\nabla\phi_r|>0$. از این‌رو، ثابت‌های مثبت η و μ موجودند به‌طوری که

$$\begin{array}{ll} \lambda_r\phi_r^r-|\nabla\phi_r|^r\le 0, & x\in\bar\Omega_\eta,\\ \mu\le\phi_r\le 1, & x\in\Omega_0=\Omega\setminus\bar\Omega_\eta, \end{array} \tag{۶}$$

که در آن $\bar\Omega_\eta=\{x\in\Omega: d(x,\partial\Omega)\le\eta\}$. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $\|\phi_r\|_\infty=1$.

همچنین فرض کنید $e_r(x)\in W_0^{1,r}$ جواب یکتای مساله مقدار مرزی

$$\begin{cases}-\Delta_r e_r=1, & x\in\Omega,\\ e_r=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{7}$$

باشد. این شناخته شده است که روی Ω، $e_r>0$ و روی $\partial\Omega$، $\frac{\partial e_r}{\partial n}<0$. اکنون در موقعیتی هستیم که نتیجه اصلی مقاله را بیان کنیم. اثبات آن در بخش بعد ارایه شده است.

قضیه ۳-۳. فرض کنید b و c اعداد حقیقی مثبتی باشند و $0\le a<p-1$، $0\le d<q-1$. آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

الف. اگر $p-1-a>c$ و $q-1-d>b$، آنگاه دستگاه (۲) به ازای هر پارامتر مثبت λ_1، λ_2، μ_1 و μ_2 دارای حداقل یک جواب ضعیف مثبت است.

ب. اگر $(p-1-a)(q-1-d)-bc>0$، آن‌گاه دستگاه (۳) به ازای هر پارامتر مثبت λ دارای حداقل یک جواب ضعیف مثبت است.

۴- اثبات نتیجه اصلی

در این بخش به اثبات نتیجه اصلی مقاله می‌پردازیم. برای نمایش بهتر، اثبات دو قسمت قضیه ۳-۳ را در دو زیربخش مجزا ارایه می‌دهیم. برای این منظور، فرض کنید λ_p، λ_q، ϕ_p، ϕ_q، η، μ و $\bar{\Omega}_\eta$ نمادهای معرفی شده در بخش ۳ باشند.

۴-۱. اثبات قسمت الف قضیه ۳-۳

پیش از پرداختن به اثبات قسمت اول قضیه ۳-۳، ابتدا لم زیر را می‌آوریم.

لم ۴-۱-۱. فرض کنید $p-1-a>c$ و $q-1-d>b$. در این صورت ثابت‌های مثبت σ و k وجود دارند به طوری که برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ و $w_2\in W_0^{1,q}$ داریم

$$\left(\sigma p'\right)^{p-1} m_1^{\infty}\int_{\Omega_0}\left(\lambda_p\phi_p{}^p-\left|\nabla\phi_p\right|^p\right)w_1dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\left(\lambda_1\sigma^a\phi_p{}^{p'a}+\mu_1\sigma^{kb}\phi_q{}^{q'b}\right)w_1dx,$$
$$\left(\sigma^k q'\right)^{q-1} m_2^{\infty}\int_{\Omega_0}\left(\lambda_q\phi_q{}^q-\left|\nabla\phi_q\right|^q\right)w_2dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\left(\lambda_2\sigma^c\phi_p{}^{p'c}+\mu_2\sigma^{kd}\phi_q{}^{q'd}\right)w_2dx,$$

که در آن p' و q' به ترتیب نمای مزدوج p و q هستند.

اثبات لم ۴-۱-۱. قرار می‌دهیم

$$r_1=\frac{p-1-a}{c}\quad,\quad r_2=\frac{p-1-a}{p-1-a-c},$$
$$s_1=\frac{q-1-d}{b}\quad,\quad s_2=\frac{q-1-d}{q-1-d-b}.$$

در این صورت از فرض‌های $p-1-a>c$ و $q-1-d>b$ نتیجه می‌شود $r_1,r_2,s_1,s_2>1$ و

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1\quad,\quad\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=1.$$

ثابت مثبت k را چنان اختیار می‌کنیم که

$$\frac{c}{q-1-d}<k<\frac{p-1-a}{b}.$$

این امر امکان‌پذیر است زیرا طبق فرض $bc<(p-1-a)(q-1-d)$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$p-1-\frac{a}{r_1}-\frac{kb}{r_2}\ge p-1-a-kb>0,$$
$$k\left(q-1-\frac{d}{s_2}\right)-\frac{c}{s_1}\ge k\left(q-1-d\right)-c>0.$$

در نتیجه عدد حقیقی $\sigma>0$ را می‌توان اختیار کرد به طوری که به ازای هر $x\in\Omega_0=\Omega\setminus\bar{\Omega}_\eta$

$$\sigma^{p-1-\frac{a}{r_1}-\frac{kb}{r_2}} p'^{p-1} m_1^{\infty} \lambda_p \phi_p^{\,p}(x) \le \lambda_1^{\frac{1}{r_1}} \mu_1^{\frac{1}{r_2}} \mu^{a\delta+q},$$
$$\sigma^{k\left(q-1-\frac{d}{s_2}\right)-\frac{c}{s_1}} q'^{q-1} m_2^{\infty} \lambda_q \phi_q^{\,q}(x) \le \lambda_2^{\frac{1}{s_1}} \mu_2^{\frac{1}{s_2}} \mu^{d\gamma+p},$$

که در آن $\delta = \dfrac{p}{p-1-a}$ و $\gamma = \dfrac{q}{q-1-d}$. علاوه بر این داریم

$$a\delta r_1 = \frac{ap}{p-1-a-c} \ge \frac{pa}{p-1} = p'a,$$
$$d\gamma s_2 = \frac{dq}{q-1-d-b} \ge \frac{qd}{q-1} = q'd,$$

و

$$ps_1 = p\left(\frac{q-1-d}{b}\right) > p\left(\frac{c}{p-1-a}\right) \ge \frac{pc}{p-1} = p'c,$$
$$qr_2 = q\left(\frac{p-1-a}{c}\right) > q\left(\frac{b}{q-1-d}\right) \ge \frac{qb}{q-1} = q'b.$$

هم‌اکنون، با توجه به این حقیقت که روی Ω_0 داریم $1 \le \phi_r \le \mu$، بنابر روابط بالا و نامساوی یانگ برای هر $w_1 \in W_0^{1,p}$ به دست می‌آوریم

$$(\sigma p')^{p-1} m_1^{\infty} \int_{\Omega_0} \left(\lambda_p \phi_p^{\,p} - \left|\nabla \phi_p\right|^p\right) w_1 dx$$
$$\le (\sigma p')^{p-1} m_1^{\infty} \int_{\Omega_0} \lambda_p \phi_p^{\,p} w_1 dx$$
$$\le \int_{\Omega_0} \left(\lambda_1^{\frac{1}{r_1}} \sigma^{\frac{a}{r_1}} \mu^{a\delta}\right)\left(\mu_1^{\frac{1}{r_2}} \sigma^{\frac{kb}{r_2}} \mu^{q}\right) w_1 dx$$
$$\le \int_{\Omega_0} \left[\left(\lambda_1^{\frac{1}{r_1}} \sigma^{\frac{a}{r_1}} \mu^{a\delta}\right)^{r_1} r_1 + \left(\mu_1^{\frac{1}{r_2}} \sigma^{\frac{kb}{r_2}} \mu^{q}\right)^{r_2} r_2\right] w_1 dx$$
$$\le \int_{\Omega_0} \left[\left(\lambda_1^{\frac{1}{r_1}} \sigma^{\frac{a}{r_1}} \mu^{a\delta}\right)^{r_1} + \left(\mu_1^{\frac{1}{r_2}} \sigma^{\frac{kb}{r_2}} \mu^{q}\right)^{r_2}\right] w_1 dx$$
$$= \int_{\Omega_0} \left(\lambda_1 \sigma^{a} \mu^{a\delta r_1} + \mu_1 \sigma^{kb} \mu^{q r_2}\right) w_1 dx$$
$$\le \int_{\Omega_0} \left(\lambda_1 \sigma^{a} \phi_p^{\,p'a} + \mu_1 \sigma^{kb} \phi_q^{\,q'b}\right) w_1 dx .$$

به طریق مشابه برای هر $w_2 \in W_0^{1,q}$ نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\left(\sigma^k q'\right)^{q-1} m_2^{\infty} \int_{\Omega_0} \left(\lambda_q \phi_q^{\,q} - \left|\nabla \phi_q\right|^q\right) w_2 dx$$
$$\le \int_{\Omega_0} \left(\lambda_2 \sigma^{c} \phi_p^{\,p'c} + \mu_2 \sigma^{kd} \phi_q^{\,q'd}\right) w_2 dx .$$

هم‌اکنون، برای اثبات قسمت (الف) قضیه ۳-۳، وجود یک جواب پایینی ضعیف و مثبت $(\psi_1, \psi_2) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,q}$ و یک جواب بالایی ضعیف و مثبت $(z_1, z_2) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,q}$ از دستگاه (۲) را ثابت می‌کنیم به طوری که $\psi_i \le z_i$ و $\psi_i \le z_i$؛ به این معنی که روی $\partial\Omega$، $(\psi_1, \psi_2) = (0,0) = (z_1, z_2)$ و برای هر $w_1 \in W_0^{1,p}$ و $w_2 \in W_0^{1,q}$ داشته باشیم

$$M_1\left(\int_\Omega |\nabla \psi_1|^p\, dx\right) \int_\Omega |\nabla \psi_1|^{p-2} \nabla \psi_1 . \nabla w_1 dx$$
$$\le \int_\Omega \left(\lambda_1 \psi_1^{a} + \mu_1 \psi_2^{b}\right) w_1 dx ,$$
$$M_2\left(\int_\Omega |\nabla \psi_2|^q\, dx\right) \int_\Omega |\nabla \psi_2|^{q-2} \nabla \psi_2 . \nabla w_2 dx$$
$$\le \int_\Omega \left(\lambda_2 \psi_1^{c} + \mu_2 \psi_2^{d}\right) w_2 dx ,$$
$$M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p\, dx\right) \int_\Omega |\nabla z_1|^{p-2} \nabla z_1 . \nabla w_1 dx$$
$$\ge \int_\Omega \left(\lambda_1 z_1^{\,a} + \mu_1 z_2^{\,b}\right) w_1 dx ,$$
$$M_2\left(\int_\Omega |\nabla z_2|^q\, dx\right) \int_\Omega |\nabla z_2|^{q-2} \nabla z_2 . \nabla w_2 dx$$
$$\ge \int_\Omega \left(\lambda_2 z_1^{\,c} + \mu_2 z_2^{\,d}\right) w_2 dx .$$

برای این منظور قرار می‌دهیم

$$(\psi_1(x), \psi_2(x)) = (\sigma \phi_p^{p'}(x), \sigma^k \phi_q^{q'}(x))$$

که در آن ثابت‌های مثبت σ و k از لم ۴-۱-۱ حاصل شده‌اند و p' و q' به ترتیب نمای مزدوج p و q هستند. نشان می‌دهیم (ψ_1, ψ_2) یک جواب پایینی ضعیف از دستگاه (۲) است.

بنابر توضیحات بخش قبل $\psi_1, \psi_2 > 0$ و روی $\partial\Omega$، $(\psi_1, \psi_2) = (0,0)$. از رابطه (۵)، برای هر $w_1 \in W_0^{1,p}$ نتیجه می‌شود.

$$M_1\left(\int_\Omega |\nabla \psi_1|^p\, dx\right) \int_\Omega |\nabla \psi_1|^{p-2} \nabla \psi_1 . \nabla w_1 dx$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\sigma p'\right)^{p-1} M_1\left(\int_\Omega |\nabla \psi_1|^p\, dx\right)\times \\
&\int_\Omega \phi_p \left|\nabla \phi_p\right|^{p-2} \nabla \phi_p.\nabla w_1 dx \\
&=\left(\sigma p'\right)^{p-1} M_1\left(\int_\Omega |\nabla \psi_1|^p\, dx\right)\times \\
&\int_\Omega \left[\left|\nabla \phi_p\right|^{p-2} \nabla \phi_p.\nabla\left(\phi_p w_1\right)-\left|\nabla \phi_p\right|^p w_1\right]dx \\
&=\left(\sigma p'\right)^{p-1} M_1\left(\int_\Omega |\nabla \psi_1|^p\, dx\right)\times \\
&\int_\Omega \left(\lambda_p \phi_p{}^p-\left|\nabla \phi_p\right|^p\right) w_1 dx \\
&\le \left(\sigma p'\right)^{p-1} m_1^\infty \int_\Omega \left(\lambda_p \phi_p{}^p-\left|\nabla \phi_p\right|^p\right) w_1 dx.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

با به کارگیری رابطه (۶) و لم ۴-۱-۱ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&\left(\sigma p'\right)^{p-1} m_1^\infty \int_{\bar{\Omega}_\eta} \left(\lambda_p \phi_p{}^p-\left|\nabla \phi_p\right|^p\right) w_1 dx \\
&\le 0 \le \int_{\bar{\Omega}_\eta} \left(\lambda_1 \psi_1^a+\mu_1 \psi_2^b\right) w_1 dx,
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&\left(\sigma p'\right)^{p-1} m_1^\infty \int_{\Omega_\cdot} \left(\lambda_p \phi_p{}^p-\left|\nabla \phi_p\right|^p\right) w_1 dx \\
&\le \int_{\Omega_\cdot} \left(\lambda_1 \psi_1^a+\mu_1 \psi_2^b\right) w_1 dx.
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
&M_1\left(\int_\Omega |\nabla \psi_1|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla \psi_1|^{p-2}\, \nabla \psi_1.\nabla w_1 dx \\
&\le \int_\Omega \left(\lambda_1 \psi_1^a+\mu_1 \psi_2^b\right) w_1 dx.
\end{aligned}
$$

به طور مشابه برای هر $w_2 \in W_0^{1,q}$ بدست می‌آید

$$
\begin{aligned}
&M_2\left(\int_\Omega |\nabla \psi_2|^q\, dx\right)\int_\Omega |\nabla \psi_2|^{q-2}\, \nabla \psi_2.\nabla w_2 dx \\
&\le \int_\Omega \left(\lambda_2 \psi_1^c+\mu_2 \psi_2^d\right) w_2 dx.
\end{aligned}
$$

از این‌رو (ψ_1,ψ_2) یک جواب پایینی از دستگاه (۲) است.

حال برای ساختن جواب بالایی ضعیف از دستگاه (۲) قرار می‌دهیم $(z_1,z_2):=\left(Ae_p,Be_q\right)$، که در آن e_p و e_q در رابطه (۷) معرفی شده‌اند و A و B ثابت هایی مثبت و به اندازه کافی بزرگ هستند که در ادامه معرفی می‌شوند. با توجه به (۷) روی $\partial\Omega$، $(z_1,z_2)=(0,0)$ و برای هر $w_1 \in W_0^{1,p}$ و $w_2 \in W_0^{1,q}$ خواهیم داشت.

$$
\begin{aligned}
&M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla z_1|^{p-2}\, \nabla z_1.\nabla w_1 dx \\
&= A^{p-1} M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p\, dx\right)\int_\Omega w_1 dx \\
&\ge A^{p-1} m_1 \int_\Omega w_1 dx\,,
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&M_2\left(\int_\Omega |\nabla z_2|^q\, dx\right)\int_\Omega |\nabla z_2|^{q-2}\, \nabla z_2.\nabla w_2 dx \\
&= B^{q-1} M_2\left(\int_\Omega |\nabla z_2|^q\, dx\right)\int_\Omega w_2 dx \\
&\ge B^{q-1} m_2 \int_\Omega w_2 dx\,.
\end{aligned}
$$

قرار می‌دهیم $l_p=\|e_p\|_\infty$ و $l_q=\|e_q\|_\infty$. از این که $a<p-1$ و $d<q-1$، می‌توان ثابت‌های مثبت A و B را چنان بزرگ اختیار کرد به‌طوری که

$$
\begin{aligned}
&m_1 A^{p-1} \ge \lambda_1 (A\, l_p)^a + \mu_1 (B l_q)^b\,, \\
&m_2 B^{q-1} \ge \lambda_2 (A\, l_p)^c + \mu_2 (B l_q)^d\,.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
&A^{p-1} m_1 \int_\Omega w_1 dx \ge \int_\Omega (\lambda_1 z_1{}^a + \mu_1 z_2{}^b) w_1 dx, \\
&B^{q-1} m_2 \int_\Omega w_2 dx \ge \int_\Omega (\lambda_2 z_1{}^c + \mu_2 z_2{}^d) w_2 dx,
\end{aligned}
$$

و از این رو $(z_1,z_2)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ یک جواب بالایی از دستگاه (۲) است. هم‌اکنون کافی است ثابت‌های مثبت A و B را آنقدر بزرگ اختیار کنیم به‌طوری که $\psi_1 \le z_1$ و $\psi_2 \le z_2$. در نتیجه یک جواب (u,v) از دستگاه (۲) چنان موجود است به طوری که $\psi_1 \le u \le z_1$ و $\psi_2 \le v \le z_2$. این مطلب اثبات قسمت (الف) قضیه ۳-۳ را کامل می‌کند.

۴-۲. اثبات قسمت ب قضیه ۳-۳

پیش از بیان اثبات قسمت دوم قضیه ۳-۳، ابتدا لم زیر را می‌آوریم.

لم ۴-۲-۲. فرض کنید
$(p-1-a)(q-1-d)-bc>0.$

در این صورت ثابت‌های مثبت σ و k وجود دارند به‌طوری که برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ و $w_2\in W_0^{1,q}$ داریم

$$\left(\sigma p'\right)^{p-1} m_1^{\infty}\int_{\Omega_0}\left(\lambda_p\phi_p^{\,p}-\left|\nabla\phi_p\right|^p\right)w_1dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\left(\lambda\sigma^{a+kb}\phi_p^{\,p'a}\phi_q^{\,q'b}\right)w_1dx\,,$$
$$\left(\sigma^k q'\right)^{q-1} m_2^{\infty}\int_{\Omega_0}\left(\lambda_q\phi_q^{\,q}-\left|\nabla\phi_q\right|^q\right)w_2dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\left(\lambda\sigma^{c+kd}\phi_p^{\,p'c}\phi_q^{\,q'd}\right)w_2dx\,,$$

که در آن p' و q' به ترتیب نمای مزدوج p و q هستند.

اثبات لم ۴-۲-۲. همانند اثبات لم ۴-۲-۱.، بنابر فرض $(p-1-a)(q-1-d)-bc>0$، می‌توان ثابت مثبت k را چنان اختیار کرد به طوری که

$$\frac{c}{q-1-d}<k<\frac{p-1-a}{b}.$$

از رابطه بالا به همراه فرضیات قضیه ۳-۳ نتیجه می‌شود ثابت‌های $p-1-a-kb$، $k(q-1-d)-c$، $p-ap'$ و $q-dq'$ همگی مثبت هستند. از این رو می‌توان ثابت مثبت به اندازه کافی کوچک σ را چنان اختیار نمود به طوری که به ازای هر $x\in\Omega_0=\Omega\setminus\bar{\Omega}_\eta$ داشته باشیم

$$\sigma^{p-1-a-kb}p'^{p-1}m_1^{\infty}\lambda_p\phi_p^{\,p-ap'}(x)\le\lambda\mu^{bq'},$$
$$\sigma^{k(q-1-d)-c}q'^{q-1}m_2^{\infty}\lambda_q\phi_q^{\,q-dq'}(x)\le\lambda\mu^{cp'}.$$

حال، با توجه به این حقیقت که روی Ω_0 داریم $\mu\le\phi_r\le 1$ و نامساوی‌های بالا، برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ بدست می‌آوریم

$$\left(\sigma p'\right)^{p-1} m_1^{\infty}\int_{\Omega_0}\left(\lambda_p\phi_p^{\,p}-\left|\nabla\phi_p\right|^p\right)w_1dx$$
$$\le\left(\sigma p'\right)^{p-1} m_1^{\infty}\int_{\Omega_0}\lambda_p\phi_p^{\,p}w_1dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\lambda\sigma^{a+kb}\phi_p^{ap'}\mu^{bq'}w_1dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\lambda\sigma^{a+kb}\phi_p^{\,p'a}\phi_q^{\,q'b}w_1dx\,.$$

به طریق مشابه برای هر $w_2\in W_0^{1,q}$ نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\left(\sigma^k q'\right)^{q-1} m_2^{\infty}\int_{\Omega_0}\left(\lambda_q\phi_q^{\,q}-\left|\nabla\phi_q\right|^q\right)w_2dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\lambda\sigma^{c+kd}\phi_p^{\,p'c}\phi_q^{\,q'd}w_2dx\,.$$

حال به کمک لم ۴-۲-۲، برای اثبات قسمت (ب) قضیه ۳-۳، وجود یک جواب پایینی مثبت $(\psi_1,\psi_2)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ و یک جواب بالایی مثبت $(z_1,z_2)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ از دستگاه (۳) را ثابت می‌کنیم به طوری که $\psi_1\le z_1$ و $\psi_2\le z_2$؛ به این معنی که روی $\partial\Omega$، $(\psi_1,\psi_2)=(0,0)=(z_1,z_2)$ و برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ و $w_2\in W_0^{1,q}$ داشته باشیم

$$M_1\left(\int_\Omega|\nabla\psi_1|^p\,dx\right)\int_\Omega|\nabla\psi_1|^{p-2}\,\nabla\psi_1.\nabla w_1dx$$
$$\le\int_\Omega\left(\lambda\psi_1^a\psi_2^b\right)w_1dx\,,$$
$$M_2\left(\int_\Omega|\nabla\psi_2|^q\,dx\right)\int_\Omega|\nabla\psi_2|^{q-2}\,\nabla\psi_2.\nabla w_2dx$$
$$\le\int_\Omega\left(\lambda\psi_1^c\psi_2^d\right)w_2dx\,,$$
$$M_1\left(\int_\Omega|\nabla z_1|^p\,dx\right)\int_\Omega|\nabla z_1|^{p-2}\,\nabla z_1.\nabla w_1dx$$
$$\ge\int_\Omega\left(\lambda z_1^{\,a}z_2^{\,b}\right)w_1dx\,,$$
$$M_2\left(\int_\Omega|\nabla z_2|^q\,dx\right)\int_\Omega|\nabla z_2|^{q-2}\,\nabla z_2.\nabla w_2dx$$
$$\ge\int_\Omega\left(\lambda z_1^{\,c}z_2^{\,d}\right)w_2dx\,.$$

همانند اثبات قسمت (الف) قرار می‌دهیم

$$(\psi_1(x),\psi_2(x))=(\sigma\phi_p^{p'}(x),\sigma^k\phi_q^{q'}(x))$$

که در آن ثابت‌های مثبت σ و k از لم ۴-۲-۲ حاصل شده‌اند و p' و q' به ترتیب نمای مزدوج

p و q هستند. نشان می‌دهیم (ψ_1,ψ_2) یک جواب پایینی ضعیف از دستگاه (۳) است.

بنابر توضیحات بخش قبل $\psi_1,\psi_2>0$ و روی $\partial\Omega$، $(\psi_1,\psi_2)=(0,0)$. همچنین هر $w_1\in W_0^{1,p}$ داریم

$$M_1\left(\int_{\bar{\Omega}_\eta}|\nabla\psi_1|^p\,dx\right)\int_{\bar{\Omega}_\eta}|\nabla\psi_1|^{p-2}\nabla\psi_1.\nabla w_1dx$$
$$\le 0\le\int_{\bar{\Omega}_\eta}\left(\lambda\psi_1^a\psi_2^b\right)w_1dx.$$

از (۸) و لم ۴-۲-۲، برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ نتیجه می‌شود

$$M_1\left(\int_{\Omega_0}|\nabla\psi_1|^p\,dx\right)\int_{\Omega_0}|\nabla\psi_1|^{p-2}\nabla\psi_1.\nabla w_1dx$$
$$\le\int_{\Omega_0}\left(\lambda\psi_1^a\psi_2^b\right)w_1dx,$$

از آن جا که $\Omega=\Omega_0\cup\bar{\Omega}_\eta$، بنابراین

$$M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla\psi_1|^p\,dx\right)\int_{\Omega}|\nabla\psi_1|^{p-2}\nabla\psi_1.\nabla w_1dx$$
$$\le\int_{\Omega}\left(\lambda\psi_1^a\psi_2^b\right)w_1dx,$$

به ازای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ برقرار است. به طور مشابه برای هر $w_2\in W_0^{1,q}$ نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla\psi_2|^q\,dx\right)\int_{\Omega}|\nabla\psi_2|^{q-2}\nabla\psi_2.\nabla w_2dx$$
$$\le\int_{\Omega}\left(\lambda\psi_1^c\psi_2^d\right)w_2dx,$$

و از این رو (ψ_1,ψ_2) یک جواب پایینی از دستگاه (۳) است.

در ادامه برای ساختن جواب بالایی، ابتدا توجه کنید از این که $(p-1-a)(q-1-d)-bc>0$، می‌توان ثابت‌های به اندازه کافی بزرگ A و B را چنان اختیار کرد به‌طوری که

$$m_1A^{p-1-a}\ge\lambda l_p^a\left(Bl_q\right)^b,$$
$$m_2B^{q-1-d}\ge\lambda\left(Al_p\right)^c l_q^d,$$

که در آن $l_p=\|e_p\|_\infty$ و $l_q=\|e_q\|_\infty$. قرار می‌دهیم $(z_1,z_2)=(Ae_p,Be_q)$. درنتیجه برای هر $w_1\in W_0^{1,p}$ و $w_2\in W_0^{1,q}$ خواهیم داشت

$$M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla z_1|^p\,dx\right)\int_{\Omega}|\nabla z_1|^{p-2}\nabla z_1.\nabla w_1dx$$
$$=A^{p-1}M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla z_1|^p\,dx\right)\int_{\Omega}w_1dx$$
$$\ge A^{p-1}m_1\int_{\Omega}w_1dx$$
$$\ge\int_{\Omega}\left(\lambda z_1^az_2^b\right)w_1dx,$$

و

$$M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla z_2|^q\,dx\right)\int_{\Omega}|\nabla z_2|^{q-2}\nabla z_2.\nabla w_2dx$$
$$=B^{q-1}M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla z_2|^q\,dx\right)\int_{\Omega}w_2dx$$
$$\ge B^{q-1}m_2\int_{\Omega}w_2dx$$
$$\ge\int_{\Omega}\left(\lambda z_1^cz_2^d\right)w_2dx,$$

و بنابراین $(z_1,z_2)\in W_0^{1,p}\times W_0^{1,q}$ یک جواب بالایی از دستگاه (۳) است. هم‌اکنون کافی است ثابت‌های مثبت A و B را چنان بزرگ اختیار کنیم به‌طوری که $\psi_1\le z_1$ و $\psi_2\le z_2$. در نتیجه یک جواب (u,v) از دستگاه (۳) چنان موجود است به طوری که خواهیم داشت $\psi_1\le u\le z_1$ و $\psi_2\le v\le z_2$ و این مطلب اثبات قسمت (ب) قضیه ۳-۳ را کامل می‌کند.

فهرست منابع

[1] J. Ali and R. Shivaji, Positive solutions for a class of p-Laplacian systems with multiple parameters, J. Math. Anal. Appl., 335 (2007) 1013-1019.

[2] A. Bensedik and M. Bouchekif, On an elliptic quation of Kirchhoff-type with a potential asymptotically linear at infinity, Math. Comput. Modelling, 49 (2009) 1089–1096.

[3] C. Chen, On positive weak solutions for a class of quasilinear elliptic systems, Nonlinear Anal., 62 (2005) 751–756.

[4] C. Chen, J. Huang and Z.Q. Han, Multiple solutions to the nonhomogeneous p-Kirchhoff elliptic equation with concave-convex nonlinearities, Appl. Math. Lett., 26 (7)(2013) 754–759.

[5] B. Cheng, X. Wu and J. Liu, Multiplicity of solutions for nonlocal elliptic system of (p,q)-Kirchhoff type, Abstr. Appl. Anal., 13 (2011) Article ID 526026.

[6] M. Chipot, B. Lovat, Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems, Nonlinear Anal., 30 (7) (1997) 4619–4627.

[7] G. A. Afrouzi, S. Shakeri and H. Zahmatkesh, Existence Results for a Class of Kirchhoff-Type Systems with Combined Nonlinear Effects, Ukrainian Mathematical Journal, 71(4) (2019) 651–662.

[8] F. J. S. A. Corrêa and G. M. Figueiredo, On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods, Bull. Aust. Math. Soc., 74 (2006) 263–277.

[9] J. Huang, C. Chen and Z. Xiu, Existence and multiplicity results for a p-Kirchhoff equation with a concave-convex term, Appl. Math. Lett., 26 (11) (2013) 1070–1075.

[10] G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische physik: mechanik, Teubner, Leipzig, Germany, 1883.

[11] T. F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, Nonlinear Anal., 63 (2005) 1967–1977.

[12] K. Perera and Z. Zhang, Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index, J. Differential Equations, 221 (1) (2006) 246–255.

[13] S. H. Rasouli, Existence of solutions for singular (p,q)-Kirchhoff type systems with multiple parameters, Electron. J. Differential Equations, 2016 Paper No. 69, 8 pp.