دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حلقه‌های در هم آمیخته α-آرمنداریز اریب پوچ

نگین فرشاد[۱]، شعبانعلی صفری ثابت[۲*]، احمد موسوی[۳]

(۱و۲) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران
(۳) دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۰۳

چکیده

فرض کنیم $f: A \to B$ یک همریختی حلقه‌ای و $\mathbf{K}$ یک ایده‌آل از حلقه $\mathbf{B}$ باشد. در این مقاله درون‌ریختی α را برای حلقه در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ از حلقه‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در امتداد ایده‌آل $\mathbf{K}$ تحت همریختی $\mathbf{f}$ معرفی می‌کنیم. سپس برخی از خواص پوچسازها مانند α-آرمنداریز اریب پوچ و α-آرمنداریز اریب ضعیف حلقه در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ را بررسی کرده و رابطه بین آرمنداریز اریب پوچ و آرمنداریز اریب ضعیف بودن حلقه‌های A، $f(A)+K$ و حلقه در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ را مشخص می‌کنیم. همچنین خاصیت ۲-اولیه بودن را برای حلقه در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ بررسی می‌کنیم. بعلاوه، نشان می‌دهیم اگر $\mathbf{A}$ یک حلقه ۲-اولیه α_1-سازگار و $f(A)+K$ یک حلقه ۲-اولیه α_2-سازگار باشد، آن‌گاه $A \bowtie^f K$ یک حلقه α-آرمنداریز اریب پوچ است که در آن α_1 و α_2 به ترتیب درون‌ریختی‌هایی از $\mathbf{A}$ و $f(A)+K$ هستند و α درون‌ریختی القاء شده توسط α_1 و α_2 روی حلقه $A \bowtie^f K$ می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: حلقه در هم آمیخته، α-آرمنداریز اریب پوچ، α-آرمنداریز اریب ضعیف، ۲-اولیه.

* عهده دار مکاتبات

Email: drsafarisabet@gmail.com, sh_safarisabet@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

در این مقاله همه حلقه ها یکدار و شرکت پذیر هستند و منظور از $nil(R)$، $Nil_*(R)$ و $M_n(R)$ به ترتیب مجموعه عناصر پوچ‌توان، رادیکال اول و حلقه ماتریس‌های از مرتبه n روی حلقه R می‌باشد. توسیع بدیهی از حلقه R به وسیله -(R,R)مدول M را به صورت $T(R,M)$نمایش می‌دهیم. عناصر این حلقه به صورت (r,m) است که در آن $r \in R$ و $m \in M$. جمع عناصر آن به صورت مولفه‌ای و ضرب عناصر آن به صورت $(r_1,m_1)(r_2,m_2) := (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$ تعریف می‌شود که در آن $r_1,r_2 \in R$ و $m_1,m_2 \in M$. این حلقه یکریخت با حلقه ماتریس‌های $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ که $r \in R$ و $m \in M$، با اعمال جمع و ضرب معمولی در ماتریس‌ها می‌باشد.

همچنین عنصر ناصفر a در حلقه R را منظم نامیم هرگاه a مقسوم علیه صفر راست یا چپ نباشد.

فرض کنیم A و B دو حلقه یکدار، K یک ایده‌آل از حلقه B و $f: A \to B$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. زیر حلقه $A \bowtie^f K := \{(a, f(a)+k) | a \in A, k \in K\}$ از حلقه $A \times B$، حلقه در هم آمیخته از Aو B در امتداد K تحت f نامیده می‌شود. دی‌آنا و همکارانش [۱] حلقه‌های در هم آمیخته را برای حلقه‌های جابجایی معرفی کردند و سپس به مطالعه بیشتر این حلقه‌ها پرداختند. دیگر ساختارها مانند $A+XB[X]$ و $A+XB[[X]]$و همچنین ساختارهای کلاسیک مانند توسیع بدیهی حلقه را می‌توان به عنوان حالت‌های خاصی از حلقه در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ در [۱] مطالعه کرد. بعدها نویسندگان بسیاری از جمله مهدو و همکارانش این ساختار را روی حلقه‌های ناجابجایی نیز مطرح کردند و به مطالعه این حلقه‌ها در حالت ناجابجایی پرداختند.

آرمندariz نشان داد اگر حلقه R کاهشی باشد (حلقه‌ای که عنصر پوچ‌توان غیر صفر ندارد) و $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ چندجمله‌ای‌هایی در $R[x]$ با شرط $f(x)g(x)=0$ باشند، آن‌گاه به ازای هر i و j داریم $a_ib_j=0$. رگی و چاوچاریا [۲] حلقه‌هایی با این خاصیت را آرمندariz نامیدند. آندرسون و کامیلو [۳] نشان دادند که حلقه چند جمله‌ای $R[x]$ روی حلقه آرمندariz R آرمندariz است. همچنین آن‌ها نشان دادند که حلقه $\frac{R}{<x^n>}$ آرمندariz است اگر و تنها اگر حلقه R کاهشی باشد.

هیرانو [۴. گزاره ۳,۱] یک ویژگی از حلقه‌های آرمندariz را به واسطه‌ی تناظر دوسویی بین مجموعه پوچسازهای زیر مجموعه‌های حلقه R و پوچسازهای زیر مجموعه‌های حلقه $R[x]$ مطرح کرده است. مهدو و همکارانش [۵] خواص گونه‌های مختلف آرمندariz را روی حلقه‌های در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ عنوان کرده‌اند. آن‌ها نشان دادند اگر A و $f(A)+K$ آرمندariz (آرمندariz پوچ) باشند، آن‌گاه حلقه‌ی در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ آرمندariz (آرمندariz پوچ) است.

حلقه $R[x;\alpha]$ حلقه چند جمله‌ای‌های اریب نامیده می‌شود که در آن $\alpha: R \to R$ یک درون‌ریختی است به‌طوری‌که $xa=\alpha(a)x$. هانگ و همکارانش [۶] حلقه‌های آرمندariz اریب را معرفی کرده‌اند. آن‌ها با در نظر گرفتن درون‌ریختی α حلقه R را در صورتی که چند جمله‌ای‌های مورد نظر در $R[x;\alpha]$قرار داشته باشد، α-آرمندariz اریب نامیدند. ژانگ و چن [۷] و حبیبی و موسوی [۸] حلقه‌های α-آرمندariz اریب ضعیف و α-آرمندariz اریب پوچ را معرفی کرده‌اند. حلقه R با درون‌ریختی α را α-آرمندariz اریب ضعیف نامند هرگاه برای هر دو چند جمله‌ای $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و

$g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ متعلق به $R[x;\alpha]$ اگر $f(x)g(x)=0$ ، آن‌گاه برای هر i و j ، $a_i\alpha_1^i(b_j)\in nil(R)$. همچنین حلقه R با درون‌ریختی α را α-آرمنداریز اریب پوچ نامند، هرگاه برای هر دو چند جمله‌ای $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ متعلق به $R[x;\alpha]$ اگر $f(x)g(x)\in nil(R[x;\alpha])$ ، آن‌گاه برای هر i و j ، $a_i\alpha^i(b_j)\in nil(R)$. حلقه‌های α-آرمنداریز اریب، α-آرمنداریز اریب پوچ و α-آرمنداریز اریب ضعیف و حلقه‌های α-آرمنداریز اریب پوچ، α-آرمنداریز اریب ضعیف هستند.

اولین بار توسط برکین میر و همکارانش [۹] حلقه ۲-اولیه معرفی شده است. حلقه R را ۲-اولیه نامیم هرگاه $Nil_*(R)=nil(R)$. به عبارت دیگر رادیکال اول آن، همه عناصر پوچ‌توان را در بر داشته باشد. به آسانی می‌توان دید حلقه‌های جابجایی و حلقه‌های کاهشی ۲-اولیه هستند. همچنین حلقه چند جمله‌ای‌ها روی حلقه ۲-اولیه، ۲-اولیه است [۱۰. گزاره ۲,۶]. نویسندگانی ۲-اولیه بودن حلقه چند جمله‌ای های اریب و سری های توانی را روی حلقه ۲-اولیه بررسی کرده‌اند([۱۱] و [۱۲]).آن‌ها با ارائه مثال‌هایی، [۱۱. مثال ۱,۱] و [۱۲. مثال ۲,۱]، نشان دادند که سری‌های توانی و حلقه چندجمله‌ای‌های اریب روی حلقه ۲-اولیه، ۲-اولیه نیستند.

در این مقاله شرط لازم و کافی برای آن که حلقه در هم آمیخته $A\bowtie^f K$، α-آرمنداریز اریب پوچ و α-آرمنداریز اریب ضعیف و ۲-اولیه شود را مطرح می‌کنیم.

۲-آرمنداریز اریب پوچ در حلقه‌های در هم آمیخته در امتداد یک ایده‌آل

فرض کنیم α_1 و α_2 به ترتیب درون‌ریختی‌های حلقه‌ای از A و $f(A)+K$ باشند. فرض کنیم $A\bowtie^f K$ حلقه در هم آمیخته در امتداد ایده‌آل K تحت همریختی f ، $\alpha_2 f = f\alpha_1$ و $\alpha_2(K)\subseteq K$ باشند. در این صورت درون‌ریختی حلقه‌ای $\alpha: A\bowtie^f K\to A\bowtie^f K$ را برای هر $a\in A$ و $k\in K$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\alpha(a, f(a)+k)=(\alpha_1(a),\alpha_2(f(a)+k)).$$

لم ۲-۱. فرض کنیم $A\bowtie^f K$ حلقه در هم آمیخته از A و B در امتداد K تحت f باشد. در این صورت داریم

$$nil(A\bowtie^f K)=\{(a, f(a)+k)\mid a\in nil(A), f(a)+k\in nil(f(a)+k)\}$$

اثبات. واضح است.

قضیه ۲-۲. فرض کنیم $A\bowtie^f K$ حلقه در هم آمیخته از A و B در امتداد K تحت f باشد.

(۱) اگر $A\bowtie^f K$ حلقه α-آرمنداریز اریب پوچ (به ترتیب، اریب ضعیف) باشد، آن‌گاه A حلقه α_1-آرمنداریز اریب پوچ (به ترتیب، اریب ضعیف) است.

(۲) اگر A حلقه α_1-آرمنداریز اریب پوچ (به ترتیب، اریب ضعیف) و $f(A)+K$ حلقه α_2-آرمنداریز اریب پوچ (به ترتیب، اریب ضعیف) باشند، آن‌گاه $A\bowtie^f K$ حلقه α-آرمنداریز اریب پوچ (به ترتیب، اریب ضعیف) است.

(۳) فرض کنیم S مجموعه عناصر منظم مرکزی از حلقه B باشد به طوری‌که $S\cap K\neq\phi$. اگر $A\bowtie^f K$ حلقه α-آرمنداریز اریب پوچ (به ترتیب، اریب ضعیف) باشد، آن‌گاه $f(A)+K$ حلقه

α_2-آرمنداریز اریب پوچ (به ترتیب، اریب ضعیف) است.

(۴) فرض کنیم $K \subseteq nil(B)$. اگر A حلقه α_1-آرمنداریز اریب پوچ باشد، آن‌گاه $A \bowtie^f K$ حلقه α-آرمنداریز اریب پوچ است.

(۵) فرض کنیم $f^{-1}(K)=nil(A)$. اگر $f(A)+K$ حلقه α_2-آرمنداریز اریب پوچ باشد، آن‌گاه $A \bowtie^f K$ حلقه α-آرمنداریز اریب پوچ است.

اثبات: (۱) فرض کنیم $f_A(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g_A(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ متعلق به $A[x;\alpha_1]$ باشند به طوری‌که $f_A g_A \in nil(A)[x;\alpha_1]$. بنابراین $\sum_{i+j} a_i\alpha_1^i(b_j) \in nil(A)$. ادعا می‌کنیم برای هر $0 \le i \le n$ و $0 \le j \le m$، $a_i\alpha_1^i(b_j) \in nil(A)$. قرار دهید

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i, f(a_i))x^i, G(x)=\sum_{j=0}^{m}(b_j, f(b_j))x^j$$

که متعلق به $A \bowtie^f K\,[x;\alpha]$ می‌باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= \sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(a_i, f(a_i))\alpha^i(b_j, f(b_j))\Big)x^t \\ &= \sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(a_i\alpha_1^i(b_j), f(a_i)\alpha_2^i(f(b_j)))\Big)x^t \\ &= \sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(a_i\alpha_1^i(b_j), f(\sum_{i+j=t} a_i\alpha_1^i(b_j)))\Big)x^t \in nil\big(A \bowtie^f K\big)[x;\alpha]. \end{aligned}$$

از این‌که $A \bowtie^f K$، α-آرمنداریز اریب پوچ است، لذا برای هر $0 \le i \le n$ و $0 \le j \le m$ داریم $(a_i, f(a_i))\alpha^i(b_j, f(b_j)) \in nil(A \bowtie^f K)$.

لذا بنا بر لم ۱-۲ برای هر i و j، $a_i\alpha_1^i(b_j) \in nil(A)$.

(۲) فرض کنیم A، α_1-آرمنداریز اریب پوچ و $f(A)+K$، α_2-آرمنداریز اریب پوچ باشند و $F(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i, f(a_i)+k_i)x^i$ و $G(x)=\sum_{j=0}^{m}(b_j, f(b_j)+l_j)x^j$ متعلق به $A \bowtie^f K[x;\alpha]$ باشند به طوری‌که $F(x)G(x) \in nil(A \bowtie^f K)[x;\alpha]$. قرار دهید

$$f_A(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g_A(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in A[x;\alpha_1]$$

و

$$f_B(x)=\sum_{i=0}^{n}(f(a_i)+k_i)x^i, g_B(x)=\sum_{j=0}^{m}(f(b_j)+l_j)x^j \in (f(A)+K)[x;\alpha_2].$$

در این صورت

$$F(x)G(x) \in nil(A \bowtie^f K)[x;\alpha]$$

نتیجه می‌دهد

$$\sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(a_i, f(a_i)+k_i)\alpha^i(b_j, f(b_j)+l_j)\Big)x^t \in nil(A \bowtie^f K)[x;\alpha]$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(a_i, f(a_i)+k_i)(\alpha_1^i(b_j), \alpha_2^i(f(b_j)+l_j))\Big)x^t \\ &= \sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(a_i\alpha_1^i(b_j), \sum_{i+j=t}(f(a_i)+k_i)(\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)\Big)x^t \in nil(A \bowtie^f K)[x;\alpha]. \end{aligned}$$

لذا بنا بر لم ۱-۲

$$\sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t} a_i\alpha_1^i(b_j)\Big)x^t \in nil(A)[x;\alpha_1]$$

و

$$\sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)\Big)x^t \in nil(f(A)+K)[x;\alpha_2].$$

از این‌که A، α_1-آرمنداریز اریب پوچ و $f(A)+K$،

α_2-آرمنداریز اریب پوچ است لذا برای هر i و j نتیجه می‌گیریم

$$a_i\alpha_1^i(b_j)\in nil(A)$$

و

$$(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)\in nil(f(A)+K).$$

(۳)

فرض کنیم $f_B(x)=\sum_{i=0}^{n}(f(a_i)+k_i)x^i$ و $g_B(x)=\sum_{j=0}^{m}(f(b_j)+l_j)x^j$ متعلق به $(f(A)+K)[x;\alpha_2]$ باشند به طوری‌که $f_Bg_B\in nil(f(A)+K)[x;\alpha_2]$. در این صورت برای هر $0\le t\le n+m$

$$\sum_{i+j=t}(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)\in nil(f(A)+K).$$

فرض کنیم e یک عنصر منظم مرکزی از K باشد. از این‌که e متعلق به K است، لذا برای هر $0\le i\le n$،

$$(0,f(0)+e(f(a_i)+k_i))=(0,e(f(a_i)+k_i))\in A\bowtie^f K.$$

قرار دهید

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n}(0,e(f(a_i)+k_i))x^i \text{ و } G(x)=\sum_{j=0}^{m}(b_j,f(b_j)+l_j)x^j$$

که متعلق به $A\bowtie^f K[x;\alpha]$ می‌باشند.

در این صورت

$$F(x)G(x)=\sum_{t=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=t}(0,e(f(a_i)+k_i))\alpha^i(b_j,f(b_j)+l_j)\Big)x^t$$
$$=\sum_{t=0}^{n+m}\Big(0,e\sum_{i+j=t}(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)\Big)x^t$$
$$\in nil(A\bowtie^f K)[x;\alpha].$$

از این که $A\bowtie^f K$، α-آرمنداریز اریب پوچ است، لذا برای هر $0\le i\le n$ و $0\le j\le m$

$$(0,e(f(a_i)+k_i))\alpha^i(b_j,f(b_j)+l_j)\in nil(A\bowtie^f K)$$

لذا بنا بر لم ۱-۲ برای هر i و j

$$e(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)\in nil(f(A)+K).$$

بنابراین عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که

$$(e(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j))^n=0.$$

از این‌که e یک عنصر مرکزی است لذا

$$e^n((f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j))^n=0$$

و بنابر منظم بودن e،

$$((f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j))^n=0.$$

بنابراین برای هر $0\le i\le n$ و $0\le j\le m$،

$$(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)\in nil(f(A)+K).$$

بنابراین $f(A)+K$ حلقه α_2-آرمنداریز اریب پوچ است.

(۴) همریختی پوشای $p_A: A\bowtie^f K\to A$ را با ضابطه $p_A(a,f(a)+k)=a$ در نظر می‌گیریم. داریم $kerp_A=\{0\}\times K$. بنابراین $\frac{A\bowtie^f K}{\{\cdot\}\times K}\simeq A$ و از آن‌جا $\frac{A\bowtie^f K}{\{\cdot\}\times K}$، $\bar{\alpha}$-آرمنداریز اریب پوچ است که در آن

$$\bar{\alpha}:\frac{A\bowtie^f K}{\{\cdot\}\times K}\to\frac{A\bowtie^f K}{\{\cdot\}\times K}$$

با ضابطه

$$\bar{\alpha}((a,f(a)+k)+(\{0\}\times K))$$
$$=\alpha(a,f(a)+k)+(\{0\}\times K)$$

تعریف می‌شود. از این که $\alpha_2(K)\subseteq K$ لذا خوش‌تعریفی $\bar{\alpha}$ واضح است. فرض کنیم

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i,f(a_i)+k_i)x^i \text{ و } G(x)=\sum_{j=0}^{m}(b_j,f(b_j)+l_j)x^j$$

متعلق به $A\bowtie^f K[x;\alpha]$ باشند به طوری‌که

$F(x)G(x)=$

$$\sum_{t=0}^{n+m}(\sum_{i+j=t}(a_i,f(a_i)+k_i)\alpha^i(b_j,f(b_j)+l_j)x^t \in nil(A\bowtie^f K)[x;\alpha].$$

بنابراین

$$\sum_{t=0}^{n+m}(\sum_{i+j=t}(a_i\alpha_1^i(b_j),(f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j)))x^t \in nil(A\bowtie^f K)[x;\alpha].$$

قرار دهید

$$\bar{G}(x)=\sum_{j=0}^{m}\overline{(b_j,f(b_j)+l_j)}x^j \text{ و } \bar{F}(x)=\sum_{i=0}^{n}\overline{(a_i,f(a_i)+k_i)}x^i$$

که متعلق به $\frac{A\bowtie^f K}{\{0\}\times K}[x;\bar{\alpha}]$ می‌باشند. در این صورت $F(x)G(x)\in nil(A\bowtie^f K)[x;\alpha]$ نتیجه می‌دهد

$$\bar{F}(x)\bar{G}(x)\in nil(\tfrac{A\bowtie^f K}{\{0\}\times K})[x;\bar{\alpha}].$$

در نتیجه از این‌که $\frac{A\bowtie^f K}{\{0\}\times K}$، $\bar{\alpha}$-آرمنداریز اریب پوچ است لذا برای هر i و j،

$$\overline{(a_i,f(a_i)+k_i)}\bar{\alpha}^i\overline{(b_j,f(b_j)+l_j)} \in nil(\tfrac{A\bowtie^f K}{\{0\}\times K}).$$

از آن‌جا برای هر $0\le i\le n$ و $0\le j\le m$،

$$((a_i,f(a_i)+k_i)+(\{0\}\times K))(\alpha^i(b_j,f(b_j)+l_j)+(\{0\}\times K)) \in nil(\tfrac{A\bowtie^f K}{\{0\}\times K}).$$

بنابراین عدد صحیح n_{ij} وجود دارد به طوری‌که

$$((a_i,f(a_i)+k_i)\alpha^i(b_j,f(b_j)+l_j))^{n_{ij}}\in\{0\}\times K$$

.

بنابراین

$$(a_i\alpha_1^i(b_j))^{n_{ij}},((f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j))^{n_{ij}} \in\{0\}\times K.$$

از آن‌جا برای هر $0\le i\le n$ و $0\le j\le m$,

$$(a_i\alpha_1^i(b_j))^{n_{ij}}=0$$

و

$$((f(a_i)+k_i)\alpha_2^i(f(b_j)+l_j))^{n_{ij}}\in K\subseteq nil(B).$$

لذا برای هر i و j،

$$(a_i,f(a_i)+k_i)\alpha^i(b_j,f(b_j)+l_j) \in \mathrm{nil}(A\bowtie^f K).$$

(۵) همریختی پوشای

$$:A\bowtie^f K\to p_{f(A)+K}\quad f(A)+K$$

را با ضابطه $p_{f(A)+K}(a,f(a)+k)=f(a)+k$ در نظر می‌گیریم. داریم $.ker p_{f(A)+K}=f^{-1}(K)\times\{0\}$ بنابراین $\frac{A\bowtie^f K}{f^{-1}(K)\times\{0\}}\simeq f(A)+K$ و از آن‌جا $\frac{A\bowtie^f K}{f^{-1}(K)\times\{0\}}$ $\bar{\alpha}$-آرمنداریز اریب پوچ است که در آن

$$\bar{\alpha}:\frac{A\bowtie^f K}{f^{-1}(K)\times\{0\}}\to\frac{A\bowtie^f K}{f^{-1}(K)\times\{0\}}$$

با ضابطه

$$\bar{\alpha}((a,f(a)+k)+(f^{-1}(K)\times\{0\})) =\alpha(a,f(a)+k)+(f^{-1}(K)\times\{0\})$$

تعریف می‌شود. ادامه اثبات مانند اثبات قسمت (۴) می باشد.

مثال زیر نشان می‌دهد که آرمنداریز ضعیف بودن A شرط کافی برای آرمنداریز ضعیف بودن $A\bowtie^f K$ نمی‌باشد.

مثال ۲-۳. فرض کنیم $A=T_2(F)$ حلقه ماتریسی بالامثلثی مرتبه ۲ روی میدان F باشد. چون F کاهشی است لذا آرمنداریز، بنابراین

آرمنداریز ضعیف است. از طرفی حلقه ماتریس‌های بالامثلثی روی حلقه آرمنداریز ضعیف، آرمنداریز ضعیف است [۱۳. گزاره ۲,۲]. بنابراین حلقه A آرمنداریز ضعیف است. فرض کنیم $B = M_2(F)$ و $K = xB[x]$ ایده‌آل از حلقه چند جمله‌ای $B[x]$ باشد. فرض کنیم $f : A \to B[x]$ همریختی حلقه‌ای و برای هر $M \in A$، $f(M) = M$. نشان می‌دهیم $f(A)+K$ حلقه آرمنداریز ضعیف نیست. فرض کنیم

$$h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2$$

و

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x^2$$

چندجمله‌ای‌هایی در $(f(A)+K)[x]$ باشند. در این صورت $h(x)g(x) = 0$. درصورتی که

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin nil(f(A)+K)$$

بنابراین $f(A)+K$ آرمنداریز ضعیف نیست. چون $A \bowtie^f K \simeq f(A)+K$، لذا $A \bowtie^f K$ آرمنداریز ضعیف نیست.

۳- حلقه‌های در هم آمیخته ۲-اولیه

عنصر a از حلقه R را قویاً پوچ‌توان نامیم هرگاه هر دنباله $a_1, a_2, a_3, \ldots$ که در آن $a_1 = a$ و $a_{n+1} \in a_n R a_n (\forall n)$ سرانجام صفر شود. بنا بر [۱۴. گزاره ۶,۲,۵]، رادیکال اول حلقه R، دقیقاً مجموعه تمام عناصر قویاً پوچ‌توان از حلقه R است. در این بخش خاصیت ۲-اولیه و α-سازگاری را برای حلقه‌های در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ بررسی می‌کنیم، و از آن‌جا بنا بر [۱۵. گزاره ۲,۹] و [۱۶. نتیجه ۲,۲] نتیجه می‌گیریم اگر حلقه $A \bowtie^f K$ ۲-اولیه و α-سازگار باشد، آن‌گاه α-آرمنداریز اریب پوچ است.

قضیه ۳-۱. فرض کنیم $f : A \to B$ همریختی حلقه‌ای و K یک ایده‌آل از حلقه B باشد.

(۱) اگر A و $f(A)+K$ حلقه‌های ۲-اولیه باشند، آن‌گاه $A \bowtie^f K$ حلقه ۲-اولیه است.

(۲) اگر $A \bowtie^f K$ یک حلقه ۲-اولیه باشد، آن‌گاه A حلقه ۲-اولیه است.

(۳) فرض کنیم S مجموعه عناصر منظم مرکزی از B باشد به طوری‌که $S \cap K \neq \phi$. اگر $A \bowtie^f K$ ۲-اولیه باشد، آن‌گاه $f(A)+K$، ۲-اولیه است.

اثبات. (۱) کافیست نشان دهیم $nil(A \bowtie^f K) \subseteq Nil_*(A \bowtie^f K)$.
فرض کنیم $(a, f(a)+k) \in nil(A \bowtie^f K)$.
نشان می‌دهیم $(a, f(a)+k)$ قویاً پوچ‌توان است. دنباله

$$(a, f(a)+k) = (a_1, f(a_1)+k_1), (a_2, f(a_2)+k_2), (a_3, f(a_3)+k_3), \ldots$$

را در $A \bowtie^f K$ در نظر بگیرید که در آن برای $i \geqslant 1$,

$$(a_{i+1}, f(a_{i+1})+k_{i+1}) \in (a_i, f(a_i)+k_i) A \bowtie^f K (a_i, f(a_i)+k_i).$$

از آن‌جا $a = a_1, a_2, a_3, \ldots$ و

$$f(a)+k = f(a_1)+k_1, f(a_2)+k_2, f(a_3)+k_3, \ldots$$

به ترتیب دنباله‌هایی در A و $f(A)+K$ هستند که برای $i \geqslant 1$

$$a_{i+1} \in a_i A a_i$$

و

$$f(a_{i+1})+k_{i+1} \in (f(a_i)+k_i)(f(A)+K)(f(a_i)+k_i).$$

از این‌که A و $f(A)+K$ حلقه‌های ۲-اولیه هستند لذا اعداد صحیح مثبت n, m وجود دارند به طوری‌که $a_{n+1} = 0$ و $f(a_{m+1})+k_{m+1} = 0$.

قرار دهید $t = max\{n,m\}$. در این صورت $(a_{t+1}, f(a_{t+1})+k_{t+1})=0$. بنابراین $(a, f(a)+k)$ قویاً پوچ‌توان است.

(۲) همواره $Nil_*(A)\subseteq nil(A)$. لذا کافیست نشان دهیم $nil(A)\subseteq Nil_*(A)$. فرض کنیم $a\in nil(A)$. از این‌که $A\bowtie^f K$، ۲-اولیه است داریم

$$(a,f(a))\in Nil_*(A\bowtie^f K).$$

بنابراین $(a, f(a))$ در $A\bowtie^f K$ قویاً پوچ‌توان است. لذا هر دنباله به صورت زیر

$$(a,f(a))=(a_1,f(a_1)),(a_2,f(a_2)),(a_3,f(a_3)),\ldots \in A\bowtie^f K$$

که برای هر $i\geqslant 1$،

$$(a_{i+1}, f(a_{i+1})) \in (a_i,f(a_i))\ A\bowtie^f K\,(a_i,f(a_i))$$

سرانجام صفر می‌شود. لذا n ای وجود دارد به طوری‌که $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))=0$. بنابراین $a=a_1,a_2,\ldots$ دنباله‌ای در A است که در آن $a_{i+1}\in a_iAa_i$، به طوری‌که $a_{n+1}=0$. بنابراین $a\in A$ قویاً پوچ‌توان است و از آن‌جا $Nil_*(A)=nil(A)$.

(۳) کافیست نشان دهیم $nil(f(A)+K)\subseteq Nil_*(f(A)+K)$. فرض کنیم $f(a)+k\in nil(f(A)+K)$. قرار دهید

$$f(a)+k = f(a_1)+k_1,\ f(a_2)+k_2,\ f(a_3)+k_3,\ldots$$

که یک دنباله در $f(A)+K$ می‌باشد به‌طوری‌که در آن برای $i\geqslant1$،

$$(f(a_{i+1})+k_{i+1}) \in (f(a_i)+k_i)(f(A)+K)(f(a_i)+k_i).$$

فرض کنیم $e\in K\cap S$. دنباله ای از $A\bowtie^f K$ را به صورت زیر داریم.

$$(0,e(f(a)+k))=(0,e(f(a_1)+k_1)),(0,e^2(f(a_2)+k_2)),(0,e^4(f(a_3)+k_3)),(0,e^8(f(a_4)+k_4)),\ldots$$

که در آن برای $i\geqslant1$،

$$(0,e^{2^i}(f(a_{i+1})+k_{i+1})) \in (0,e^{2^{i-1}}(f(a_i)+k_i))A\bowtie^f K(0,e^{2^{i-1}}(f(a_i)+k_i))$$

از این‌که $A\bowtie^f K$، ۲-اولیه است، عدد صحیح n وجود دارد به طوری‌که $(0,e^{2^n}(f(a_{n+1})+k_{n+1}))=0$. بنابراین $e^{2^n}(f(a_{n+1})+k_{n+1})=0$ و از آن‌جا بنا بر منظم بودن e، $f(a_{n+1})+k_{n+1}=0$ بنابراین اثبات کامل و حلقه $f(A)+K$ ۲-اولیه است.

مثال زیر نشان می‌دهد که ۲-اولیه بودن A شرط کافی برای ۲ -اولیه بودن $A\bowtie^f K$ نمی‌باشد.

مثال۳-۲. فرض کنیم $A=T(□,□)$ توسیع بدیهی از □ توسط □ و $B=M_2(□)$ باشد. واضح است که A، ۲-اولیه است اما B، ۲-اولیه نیست و بنابراین حلقه $B[x]$، ۲-اولیه نیست. فرض کنیم $f: A\hookrightarrow B[x]$ نگاشت شمول (برای هر $N\in A$، $f(N)=N$) و $K = xB[x]$ یک ایده‌آل از $B[x]$ باشد.

نگاشت تصویری $P: A\bowtie^f K\to f(A)+K$ را با ضابطه $p(a,f(a)+k)=f(a)+k$ در نظر می‌گیریم. از این که $\ker(P)=f^{-1}(K)\times\{0\}$، بنابراین $A\bowtie^f K \simeq f(A)+K$. لذا $A\bowtie^f K$ ۲-اولیه نیست.

حلقه های نه لزوماً کاهشی α- سازگارتوسط هاشمی و موسوی تعریف شده است [۱۷]. آن‌ها حلقه R را α-سازگار نامیدند، هرگاه به ازای هر a و b در R داشته باشیم، $ab=0$ اگر و تنها اگر $a\alpha(b)=0$. سپس نشان دادند که حلقه‌های کاهشی و α- سازگار α-آرمنداریز اریب هستند. همچنین آن‌ها نشان دادند که اگر مجموعه عناصر پوچ‌توان از یک حلقه α-سازگار R تشکیل ایده‌آل دهد آن‌گاه حلقه R α-آرمنداریز اریب پوچ است. در ادامه ارتباط بین

α-سازگاری حلقه در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ را با α_1-سازگاری حلقه A و α_2-سازگاری حلقه $f(A)+K$ مطرح می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم اگر A حلقه‌ای α_1-سازگار و ۲-اولیه و $f(A)+K$ حلقه‌ای α_2-سازگار و ۲-اولیه باشند، آن‌گاه حلقه در هم آمیخته $A \bowtie^f K$ α-آرمنداریز اریب پوچ است.

قضیه ۳-۳. فرض کنیم $f: A \to B$ یک همریختی حلقه‌ای و K ایده‌آلی از حلقه B باشد.

(۱) اگر A حلقه α_1-سازگار و $f(A)+K$ حلقه α_2-سازگار باشند، آن‌گاه $A \bowtie^f K$، α-سازگار است.

(۲) اگر $A \bowtie^f K$ حلقه α-سازگار باشد، آن‌گاه A α_1-سازگار است.

(۳) فرض کنیم $A \bowtie^f K$، α-سازگار باشد. S را مجموعه‌ی عناصر منظم حلقه B قرار دهید به طوری‌که $S \cap K \neq \phi$. در این صورت $f(A)+K$ α_2-سازگار است.

(۴) فرض کنیم f تکریختی حلقه‌ای باشد. اگر $f(A)+K$ α_2-سازگار باشد، آن‌گاه A α_1-سازگار است.

اثبات. (۱) فرض کنیم

$$(a, f(a)+k),(b, f(b)+k') \in A \bowtie^f K$$

بنابراین

$$(a, f(a)+k)\alpha(b, f(b)+k')=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(a, f(a)+k)(\alpha_1(b),\alpha_2(f(b)+k'))=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a\alpha_1(b)=0,(f(a)+k)\alpha_2(f(b)+k')=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(f(a)+k)(f(b)+k')=0,\ \ ab=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(a, f(a)+k)(b, f(b)+k')=0.$$

(۲) فرض کنیم برای $a,b \in A$ داشته باشیم $a\alpha_1(b)=0$. داریم

$$(a, f(a)),(b, f(b)) \in A \bowtie^f K$$

و از آن‌جا

$$(a, f(a))\alpha(b, f(b)) = (a\alpha_1(b), f(a\alpha_1(b))) = 0.$$

از این‌که $A \bowtie^f K$، α-سازگار است، $(a, f(a))(b, f(b))=0$ و از آن‌جا $ab=0$. به طور مشابه اگر $ab=0$ آن‌گاه، $a\alpha_1(b)=0$. بنابراین A، α_1-سازگار است.

(۳) فرض کنیم برای

$$f(a)+k, f(b)+k' \in f(A)+K$$

داشته باشیم $(f(a)+k)\alpha_2(f(b)+k')=0$. قرار دهید $e \in K \cap S$. داریم،

$$(0,e(f(a)+k)),(b, f(b)+k') \in A \bowtie^f K$$

و

$$(0,e(f(a)+k))\alpha(b, f(b)+k') = (0,e(f(a)+k)\alpha_2(f(b)+k'))=0.$$

از این‌که $A \bowtie^f K$، α-سازگار است، $(0,e(f(a)+k))(b, f(b)+k')=0$. بنابراین

$$(0,e(f(a)+k)(f(b)+k'))=0.$$

لذا بنا بر منظم بودن e، $(f(a)+k)(f(b)+k')=0$. به طور مشابه می‌توان نشان داد اگر برای $(f(a)+k)$ و $(f(b)+k')$ متعلق به $f(A)+K$ داشته باشیم، $(f(a)+k)(f(b)+k')=0$، آن‌گاه

$$(f(a)+k)\alpha_2(f(b)+k')=0.$$

بنابراین $f(A)+K$، α_2-سازگار است.

(۴) فرض کنیم برای $a,b \in A$، $ab=0$. بنابراین $f(a)f(b)=0$ و $f(a), f(b) \in f(A) \subseteq f(A)+K$.

از اینکه $f(A)+K$، α_2-سازگار است، $f(a)\alpha_2(f(b))=0$.
بنابراین $f(a)f(\alpha_1(b))=f(a\alpha_1(b))=0$.
از اینکه f تکریختی است، $a\alpha_1(b)=0$.
به طور مشابه اگر $a\alpha_1(b)=0$ آن‌گاه، $ab=0$.
بنابراین A، α_1-سازگار است.

نتیجه ۳-۴. فرض کنیم $f:A\to B$ یک تکریختی حلقه‌ای باشد. اگر $f(A)+K$ α_2-سازگار باشد، آن‌گاه $A\bowtie^f K$ α-سازگار است.

مثال ۳-۵. فرض کنیم $A=T(□,□)$ توسیع بدیهی از □ توسط □ و $B=T(A,A)$ توسیع بدیهی از A توسط A باشد. فرض کنیم $f:A\to T(A,A)$ که برای $M\in A$، $f(M)=(M,0)$ و $K=T(0,A)$. فرض کنیم $\alpha_2: f(A)+K\to f(A)+K$ با ضابطه $\alpha_2(M,N)=(\alpha_1(M),\alpha_1(N))$ تعریف شده باشد که در آن $\alpha_1:A\to A$ با ضابطه $\alpha_1(a,t)=(a,\frac{t}{2})$ تعریف شود. نشان می‌دهیم $f(A)+K$، α_2-سازگار نیست. لذا $A\bowtie^f K$، α-سازگار نیست. فرض کنیم

$$((0,\frac{1}{2}),(-1,0)),((0,1),(1,0))\in f(A)+K.$$

در این صورت

$$((0,\frac{1}{2}),(-1,0))\alpha_2((0,1),(1,0))=$$
$$((0,\frac{1}{2}),(-1,0))(\alpha_1(0,1),\alpha_1(1,0))=$$
$$((0,\frac{1}{2}),(-1,0))((0,\frac{1}{2}),(1,0))=$$
$$((0,\frac{1}{2})(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2})(1,0)+(-1,0)(0,\frac{1}{2}))=$$
$$((0,0),(0,\frac{1}{2})+(0,-\frac{1}{2}))=0.$$

اما

$$((0,\frac{1}{2}),(-1,0))((0,1),(1,0))=$$
$$((0,\frac{1}{2})(0,1),(0,\frac{1}{2})(1,0)+(-1,0)(0,1))=$$
$$((0,0),(0,\frac{1}{2})+(0,-1))=((0,0),(0,-\frac{1}{2}))\neq 0.$$

گزاره ۳-۶. اگر A یک حلقه ۲-اولیه α_1-سازگار و $f(A)+K$ یک حلقه ۲-اولیه α_2-سازگار باشند، آن‌گاه $A\bowtie^f K$ یک حلقه α-آرمندآریز اریب پوچ است.

اثبات. بنا بر قضیه ۳-۳، اگر A α_1-سازگار و $f(A)+K$ α_2-سازگار باشند، آن‌گاه $A\bowtie^f K$، α-سازگار و از طرفی بنا بر قضیه ۳-۱، $A\bowtie^f K$ ۲-اولیه است. از آن‌جا بنابر [۱۵. گزاره ۲،۹] و [۱۶. نتیجه ۲،۲] $A\bowtie^f K$ حلقه α-آرمندآریز اریب پوچ است.

بنا به [۱۸] حلقه R همراه با درون‌ریختی α را یک حلقه α-صلب ضعیف نامیم، هرگاه به ازای هر $a\in R$ داشته باشیم
$$a\alpha(a)\in nil(R)\Leftrightarrow a\in nil(R).$$

بنا بر [۱۸. قضیه ۳،۳] اگر R یک حلقه α-صلب ضعیف و $nil(R)$ یک ایده‌آل از حلقه R باشد، آن‌گاه R یک حلقه α-آرمندآریز اریب ضعیف است.

نتیجه۳-۷. اگر A یک حلقه ۲-اولیه α_1-صلب ضعیف و $f(A)+K$ یک حلقه ۲-اولیه α_2-صلب ضعیف باشند، آن‌گاه $A\bowtie^f K$ یک حلقه α-آرمندآریز اریب ضعیف است.

اثبات. بنابر قضیه ۲-۲ واضح است.

فهرست منابع

[۱] M. D' Anna, C. A. Finocchiaro and M. Fontana, Amalgamated algebras along an ideal, *Commutative algebra and its applications*, Walter de Gruyter, Berlin, (۲۰۰۹) ۲۴۱-۲۵۲.

[۲] M. B. Rege and S. Chhawchharia, Armendariz rings, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci*, ۷۳ (۱۹۹۷) ۱۴-۱۷.

[۳] D. D. Anderson and V. Camillo, Armendariz rings and Gaussian rings, *Comm. Algebra*, ۲۶ (۷) (۱۹۹۸) ۲۲۶۵-۲۲۷۲.

[۴] Y. Hirano, On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring. *J. Pure and Appl. Algebra*, ۱۶۸ (۲۰۰۲) ۴۵-۵۲.

[۵] N. Mahdou, A. Mimouni, M. EL Ouarrachi, On Armendariz-like properties in amalgamated algebras along ideals, *Turk. J. Math.* ۴۱ (۲۰۱۷) ۱۶۷۳-۱۶۸۶.

[۶] C. Y. Hong, N. K. Kim, T. K. Kwak, On skew Armendariz rings, *Comm. Algebra*, ۳۱ (۱) (۲۰۰۳) ۱۰۳-۱۲۲.

[۷] C. Zhang and J. Chen, Weak skew Armendariz rings, *J. Korean Math. Soc.*, ۴۷ (۳) (۲۰۱۰) ۴۵۵-۴۶۶.

[۸] M. Habibi and A. Moussavi, On nil skew Armendariz rings, *Asian-European J. Math*, ۵ (۲) (۲۰۱۲).

[۹] G. F. Birkenmeier, H. E. Heatherly, E. K. Lee, Completely primre ideals and radicals in Near-rings. Proc. of Near-Rings and Near-Fields, edited by Y. Fong et al., Kluwer (۱۹۹۵) ۶۳-۷۳.

[۱۰] G. F. Birkenmeier, H. E. Heatherly, E. K. Lee, Completely primre ideals and associated radicals, in (eds. S. K. Jain, S. T. Rizvi) Ring Theory (Granville, OH, ۱۹۹۲), World Scientific, Singapore and River Edge (۱۹۹۳), ۱۰۲-۱۲۹،۳۷۳. MR ۹۶e:۱۶۰۲۵.

[۱۱] C. Huh, H. K. Kim, Y. Lee, Questions on ۲-primal rings, *Comm. Algebra*, ۲۶ (۲) (۱۹۹۸) ۵۹۵-۶۰۰.

[۱۲] G. Marks, Skew polynomial rings over ۲-primal rings, *Comm. Algebra*, ۲۷ (۹) (۱۹۹۹) ۴۴۱۱-۴۴۲۳.

[۱۳] Z. K. Liu and R. Y. Zhao, On weak Armendariz rings, *Comm. Algebra,* ۳۴ (۷) (۲۰۰۶) ۲۶۰۷-۲۶۱۶.

[۱۴] Paul E. Bland, Rings and their modules, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin New York (۲۰۱۱).

[۱۵] M. Habibi and A. Moussavi, On nil skew Armendariz rings, *Asian-European J. Math.*, ۵ (۲) (۲۰۱۲).

[۱۶] L. Ouyang and G. F. Birkenmeier, Weak annihilator over extension rings, *Bull. Malays. Math.* Sci. Soc., ۳۵ (۲) (۲۰۱۲) ۳۴۵-۳۵۷.

[۱۷] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar.*, ۱۰۷ (۲۰۰۵) ۲۰۷-۲۲۴.

[۱۸] L. Ouyang, Extensions of generalized α-rigid rings, *Inter. elec. j. alg.*, ۳ (۲۰۰۸) ۱۰۳-۱۱۶.