دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

جواب‌های خودمتشابه شار یامابه و منیفلدهای انیشتین‌گونه گرادیان در هندسه فینسلر

محمد یاراحمدی[1*]، ندا ایزدیان[2]، سینا هدایتیان[3]

[(۱،۲،۳)] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۲/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۱۲

چکیده

در این مقاله، به بررسی معادله شار یامابه فینسلری و سالیتون‌های یامابه فینسلری می‌پردازیم. نشان خواهیم داد که با گروه‌های یک پارامتری موضعی از دیفئومورفیسم‌ها که توسط میدان برداری منتسب به سالیتون‌های یامابه فینسلری تولید شده‌اند، دسته‌ای از مترهای فینسلری ایجاد می‌شود که جواب‌های معادله شار یامابه فینسلری هستند. به عبارت دیگر معادل هر سالیتون یامابه فینسلری، جواب‌هایی از معادله شار یامابه فینسلری را می‌یابیم. این دسته از جواب‌های پیدا شده از شار یامابه فینسلری، با یک تابع مقیاس و گروه‌های یک پارامتری از دیفئومورفیسم‌ها با هم مرتبط می‌شوند که ویژگی جالبی از نظر هندسه و فیزیک این جواب‌ها به‌دست می‌دهد. این جواب‌ها با ویژگی ذکر شده، جواب‌های خودمتشابه‌اند. در واقع بین جواب‌های خودمتشابه از معادله شار یامابه فینسلری و سالیتون‌های یامابه فینسلری یک تناظر برقرار می‌کنیم. به‌طور کلی، این تناظر را به این‌صورت نشان می‌دهیم که سالیتون‌های یامابه فینسلری جواب‌های معادله شار یامابه فینسلری است و بالعکس، جواب‌های خاصی از معادله شار یامابه فینسلری، سالیتون‌های یامابه فینسلری‌اند. در ادامه، منیفلدهای انیشتین‌گونه گسترش‌یافته گرادیان کامل فینسلری را مطالعه می‌کنیم. به‌علاوه، اگر تانسور ریچی از پایین کران‌دار و شعاع تزریقی بزرگ‌تر از صفر باشد یا تانسور ریچی از بالا کران‌دار باشد، نشان می‌دهیم منیفلد انیشتین‌گونه گسترش‌یافته گرادیان کامل فینسلری، ساختار توپولوژی‌گونه متناهی دارد یعنی با درون یک منیفلد فشرده مرزدار همسان‌ریخت است.

واژه‌های کلیدی: متر فینسلر، شار یامابه، سالیتون یامابه، توپولوژی‌گونه متناهی، منیفلد انیشتین‌گونه.

---

* عهده‌دار مکاتبات: Email: m.yarahmadi@scu.ac.ir

۱- مقدمه

مفهوم شار یامابه توسط همیلتون در سال ۱۹۸۹ در راستای اثبات حدس یامابه ارائه شد [۱]. شار یامابه یک معادله تحولی است که روی منیفلد ریمانی که (M,g) به‌صورت

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \quad Rg, \qquad g(t=0) \quad g_0,$$

تعریف می‌شود، که در آن R انحنای اسکالر منیفلد است [۲ و ۳]. در بعد $n=2$، می‌دانیم که $Rc = \frac{1}{2}R$ و این نتیجه می‌دهد که شار یامابه با شار ریچی یکی‌اند. به‌طور کلی، شار یامابه مترهای همدیس را حفظ می‌کند [۴].

فرض‌کنید (M,g) منیفلد ریمانی، X میدان برداری روی M و λ عددی حقیقی ثابت باشد. چهارتایی (M,g,V,λ)را سالیتون یامابه می‌نامیم هرگاه در معادله $_X g = (\lambda \quad R)g$ صدق کند که در آن $_X g$ مشتق لی g نسبت به میدان برداریX است. روی یک منیفلد ریمانی، سالیتون‌های یامابه جواب‌های خاص شار یامابه هستند [۵]. حالا یک سوال طبیعی پیش می‌آید که آیا در فضای فینسلری نیز این نتیجه برقرار است؟

در این مقاله نشان می‌دهیم هر سالیتون یامابه فینسلری فشرده جوابی از شار یامابه فینسلری است که جواب خودمتشابه نامیده می‌شود. بالعکس، جواب‌های خودمتشابه معادله شاریامابه، سالیتون‌های یامابه فینسلری می‌باشند. در حقیقت یک تناظر یک‌به‌یک بین سالیتون‌های یامابه فینسلری و جواب‌های خود متشابه از شار یامابه فینسلری وجود دارد. مشابه این نتایج، برای سالیتون‌های ریچی به‌عنوان جواب‌های خودمتشابه معادله شار ریچی در فضاهای ریمان-فینسلر ثابت شده است [۶].

منیفلدهای انیشتین‌گونه اخیراً توسط کاتینو و همکارانش ارائه شدند که تعمیمی از منیفلدهای انیشتینی، مترهای شبه انیشتینی، سالیتون‌های ریچی، سالیتون‌های تقریباً ریچی، مترهای m -شبه انیشتینی، سالیتون‌های شبه یامابه و سالیتون‌های همدیس گرادیان هستند [۷]. فرض‌کنید (M,g) یک منیفلد فینسلری باشد، آن‌گاه (M,g) را یک منیفلد انیشتین‌گونه می‌نامیم، هرگاه یک میدان برداری روی M و تابع هموار $\lambda: M \to$ وجود داشته باشند، به‌طوری که g در معادله زیر صدق کند:

$$\alpha\, Ric + \beta \quad _V g \quad \gamma\, V^{\flat} \quad V^{\flat} = \lambda(x) g \qquad (۱.۱)$$

که در آن α,β,γ، Ric تانسور ریچی، مشتق لی و $V^{\flat}$ یک-فرمی به‌دست آمده از میدان برداری V هستند. اگر میدان برداری V گرادیان تابع پتانسیل f باشد، آن‌گاه (M,g) را منیفلد انیشتین‌گونه گرادیان می‌نامیم. که در این‌صورت معادله (۱.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\alpha\, Ric + \beta\, \nabla\nabla f \quad \gamma\, df \quad df = \lambda(x) g.$$

میلنور حدس زد که گروه اساسی منیفلد ریمانی کامل با تانسور انحنای میانگین ریچی مثبت، به‌طور متناهی تولید می‌شود [۸]. چنین منیفلدی ممکن است با درون یک منیفلد فشرده مرزدار همسان‌ریخت نباشد. یعنی، ممکن است توپولوژی‌گونه متناهی نداشته باشد [۹]. فانگ، من و ژانگ نشان دادند که سالیتون ریچی گرادیان منقبض‌کننده کامل با مفروضات مناسب روی تانسور ریچی توپولوژی‌گونه متناهی دارد [۱۰]. ویژگی توپولوژی‌گونه متناهی داشتن برای سالیتون‌های ریچی فینسلری و سالیتون‌های یامابه فینسلری مطالعه شده است [۱۱ و ۱۲]. هم‌چنین نشان داده شده است که سالیتون‌های یامابه فینسلری و سالیتون‌های ریچی فینسلری تحت شرایط فشرده دارای گروه اساسی نامتناهی‌اند و در نتیجه گروه کوهمولوژی اول آن‌ها صفر است[۱۳]،[۱۴] و [۱۵].

در این مقاله نشان می‌دهیم که منیفلد انیشتین‌گونه

گسترش‌یافته گرادیان کامل با مفروضات مناسب روی تانسور ریچی، توپولوژی‌گونه متناهی دارد.

۲- مفاهیم و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲. فرض‌کنید M یک منیفلد n –بعدی C^{∞}، T_xM فضای مماس بر M در نقطه $x \in M$، $TM = \cup_{x \in M} T_xM$ کلاف مماس بر منیفلد M و $TM_0 = TM \setminus\{0\}$ کلاف مماس سفته باشد.

منظور از یک ساختار فینسلری روی M، یک تابع $F: TM \to [0, +\infty)$ است که خواص زیر را داراست:

۱- منظم بودن: F روی TM_0 نگاشتی C^{∞} است.

۲- همگن مثبت بودن: F روی تارهای کلاف مماس TM، همگن مثبت از درجه ۱ است. یعنی برای هر $\lambda > 0$، $F(x, \lambda y) = \lambda F(x,y)$.

۳- تحدب قوی: یعنی برای هر $y \in T_xM$، فرم g_y که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، معین‌مثبت است:

$$g_y(u,v) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}[F^2(y+su+tv)]_{s,t=0}, \quad u,v \in T_xM.$$

تعریف ۲.۲. برای هر منیفلد فینسلری (M,g)، علائم کریستوفل و ضرایب اسپری به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\gamma^{\ i}_{jk})_g = g^{is}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j}\right), \quad (۱.۲)$$

که در آن $(g_{ij})_g = ([\frac{1}{2}F^2]_{y^i y^j})$ و

$$G^{\ i}_{g} = \frac{1}{2}(\gamma^{\ i}_{jk})_g y^j y^k. \quad (۲.۲)$$

تعریف ۲.۳. انحنای ریمان

$$R_y = R^{\ i}_{k}(y) dx^k \otimes \frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}|_x : T_xM \to$$

یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود: [۱۶]

$$(R^{\ i}_{k})_g := \frac{1}{g_{mn}y^m y^n}\left(2\frac{\partial G^{\ i}_{g}}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^{\ i}_{g}}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^{\ i}_{g}\frac{\partial^2 G^{\ i}_{g}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^{\ i}_{g}}{\partial y^j}\frac{\partial G^{\ i}_{g}}{\partial y^k}\right). \quad (۳.۲)$$

تعریف ۲.۴. تانسور ریچی در فضاهای فینسلری توسط اکبرزاده به‌صورت

$$(Ric_{jk})_g := [\tfrac{1}{2}(F^2 \mathcal{R}ic_g)]_{y^j y^k},$$

تعریف شده که در آن $\mathcal{R}ic = R^{\ i}_{i}$ ریچی اسکالر نام دارد و $R^{\ i}_{k}$ در رابطه (۳.۲) تعریف شده است. [۱۷]

تعریف ۲.۵. فرض کنید (M,g) منیفلد فینسلری باشد. در این‌صورت F را یک متر فینسلری انیشتینی گوییم هرگاه تابع ریچی اسکالر، $Ric(x,y)$، فقط تابعی بر حسب x باشد. در این حالت خواهیم داشت $Ric_{ij} = Ric(x)g_{ij}$

تعریف ۲.۶. فرض‌کنید $f, g \in C^{\infty}(M)$، $p \in M$ و X میدان برداری روی منیفلد M باشد. در این‌صورت هسیان f را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$Hess(f) = \nabla\, df,$$

به‌طوری که $(df)X_p = X_p(f)$ است.

اگر فرض‌کنیم میدان‌های برداری X و Y روی M دلخواه باشند. آن‌گاه داریم:

$$Hess(f)(X,Y) = (\nabla\, df)(X,Y) = \nabla^{2}_{X,Y} f.$$

تعریف۲.۷. فرض کنید (M,g) منیفلد فینسلری باشد. منیفلد انیشتین‌گونه گسترش‌یافته گرادیان به‌صورت

$$\alpha\, Ric + \beta\, Hess(f) \quad \gamma\, df \quad df \geq \lambda(x) g \qquad (۴.۲)$$

تعریف می‌شود، که در آن α,β,γ، λ تابع حقیقی مثبت روی M داست.

تعریف۲.۸. گوییم M توپولوژی‌گونه متناهی دارد هرگاه با درون یک منیفلد فشرده مرزدار همسان‌ریخت باشد.

تعریف۲.۹. فرض‌کنید $V = v^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری روی M باشد. اگر $\{\varphi_t\}$ گروه ۱- پارامتری موضعی M تولید شده توسط V باشد، آن‌گاه $\{\varphi_t\}$ یک تبدیل نقطه‌ای بی‌نهایت کوچک روی M القاء می‌کند که به‌صورت $\varphi_t(x^{i})$ $\bar{x}^{i}$ تعریف می‌شود، که در آن $\bar{x}^{i} = x^{i} +$ $v^{i}(x)t$ این تبدیل به‌طور طبیعی به تبدیل نقطه‌ای $\tilde{\varphi}_t$ روی کلاف مماس TM گسترش‌یافته است که به‌صورت $(\bar{x}^{i}, \bar{y}^{i})$ $\tilde{\varphi}_t$ تعریف می‌شود، که در آن

$$\bar{x}^{i} = x^{i} + v^{i}(x)t,$$
$$\bar{y}^{i} = y^{i} + \frac{\partial v^{i}}{\partial x^{m}} y^{m} t. \qquad (۵.۲)$$

می‌توان نشان داد که $\{\tilde{\varphi}_t\}$ یک میدان برداری

$$\hat{V} = v^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i}} + y^{j}\frac{\partial v^{i}}{\partial x^{j}}\frac{\partial}{\partial y^{i}},$$

روی TM القاء می‌کند که ترفیع کامل V نامیده می‌شود. گروه ۱-پارامتری مربوط به ترفیع کامل $\hat{V}$ به‌صورت $\tilde{\varphi}_t = y^{i}\frac{\partial \varphi_t}{\partial x^{i}}$ داده می‌شود. مشتق لی یک شی هندسی دلخواه $\Upsilon^{I}(x,y)$ روی TM، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{\hat{V}}\Upsilon^{I} = Lim \frac{\tilde{\varphi}_t(\Upsilon^{I}) - \Upsilon^{I}}{t} = \frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_t(\Upsilon^{I}), \qquad (۶.۲)$$

تحت تبدیل نقطه‌ای گسترش‌یافته $\Upsilon^{I}(x,y)$ (۵.۲) است. هرگاه شی هندسی Υ^{I} یک میدان تانسوری باشد، $\tilde{\varphi}_t$ با مفهوم کلاسیک برگشت $\Upsilon^{I}(x,y)$منطبق است [۱۸].

تعریف۲.۱۰. [۳] خانواده‌ای از مترهای فینسلری $g(t)$ روی M، شار یامابه فینسلری نامیده می‌شود اگر در معادله زیر صدق کند.

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{jk} = H_g g_{jk}, \quad g(t=0) \quad g_0. \qquad (۷.۲)$$

تعریف۲.۱۱. اگر جواب $g(t)$ به‌صورت

$$g(t) = \tau(t)\psi_t(g_0),$$

باشد، به آن جواب خودمتشابه می‌گوییم، که در آن $\tau(t)$ گروه ۱-پارامتری از اسکالرها و ψ_t وابرریختی از منیفلد مفروض است.

تعریف۲.۱۲. فرض کنید (M,g) منیفلد فینسلری و $V = v^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i}}$ یک میدان برداری روی M باشد. چهارتایی (M,g,V,λ)را سالیتون یامابه فینسلری می‌نامیم هرگاه در رابطه زیر صدق کند:

$${}_{\hat{V}} g_{jk} = (\lambda \quad H) g_{jk}, \qquad (۸.۲)$$

که در آن $\hat{V}$ ترفیع کامل V، λ و $H = g^{ij}Ric_{ij}$ انحنای عددی است [۲].
در این‌جا دو قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه۲.۱۳. سالیتون یامابه فینسلری وجود دارد اگر و تنها اگر جواب معادله شار یامابه فینسلری که جواب خودمتشابه نامیده می‌شود، وجود داشته باشد.

قضیه۲.۱۴. هر منیفلد انیشتین‌گونه گرادیان با درون یک منیفلد فشرده مرزدار همسان‌ریخت است. یعنی، با شرط این‌که $Ric \geq \delta^{-1} g$و برای هر $\delta > 0$ ،$inj(M, g) \geq \delta > 0$ یا تانسور ریچی Ric از بالا کران‌دار باشد، توپولوژی‌گونه متناهی دارد.

۳- جواب‌های خودمتشابه شار یامابه فینسلری

در این‌جا می‌خواهیم جواب‌های خودمتشابه شار یامابه فینسلری را بررسی کنیم و نشان دهیم که با سالیتون‌های یامابه فینسلری در تناظر هستند. در واقع نشان خواهیم داد که جواب‌های خودمتشابه شار یامابه فینسلری، در معادله سالیتون یامابه فینسلری صدق می‌کند و بالعکس، هر سالیتون یامابه فینسلری، جواب خودمتشابه از معادله شار یامابه فینسلری است.

لم۳.۱. فرض‌کنید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، F_0ساختار فینسلری و φ_t یک خانواده‌ای از وابریختی‌ها روی M باشد، آن‌گاه برگشت تبدیل نقطه توسعه یافته $\tilde{\varphi}_t\ (F_0): TM \to [0, \infty)$ نیز یک ساختار فینسلری روی M است.

اثبات. قرار دهید $\tilde{\varphi}_t x^{\mathrm{i}} := \tilde{x_\iota}$ و $\tilde{\varphi}_t y^{\mathrm{i}} := \tilde{y_\iota}$. نشان می‌دهیم

$$\tilde{\varphi}_t\ (F_0) \qquad F_0 o\ \tilde{\varphi}_t : TM \to [0, \infty)$$

در سه شرط تعریف ساختار فینسلری صدق می‌کند. به‌وضوح شرط منظم بودن برقرار است. چون F_0 و $\tilde{\varphi}_t$ روی TM_0 هموار هستند، بنابراین $F_0 o\ \tilde{\varphi}_t$ نیز هموار است. حال به بررسی شرط دوم می‌پردازیم. داریم:

$$\tilde{\varphi}_t\ F_0(x, \lambda y) = \ F_0\big(\tilde{\varphi}_t(x, \lambda y)\big) = F_0\left(\varphi_t\ (x), \lambda y^{\mathrm{j}} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x^j}\right) =$$

$$\lambda\ F_0\left(\varphi_t\ (x), y^{\mathrm{j}} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x^j}\right) = \lambda\ F_0\big(\tilde{\varphi}_t(x, y)\big) = \lambda \tilde{\varphi}_t\ (F_0)(x, y).$$

بنابراین شرط همگن مثبت بودن نیز برقرار است. برای اثبات شرط تحدب قوی داریم:

$$[\tfrac{1}{2}\,(\tilde{\varphi}_t\ F_0)^2\,]_{\tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\tilde{\mathrm{y}}^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\tilde{\varphi}_t\ F_0)^2}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\ \partial \tilde{\mathrm{y}}^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\big((\ F_0 o\ \tilde{\varphi}_t)(\ F_0 o\ \tilde{\varphi}_t)\big)}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\ \partial \tilde{\mathrm{y}}^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\big({F_0}^2 o\ \tilde{\varphi}_t\big)}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\ \partial \tilde{\mathrm{y}}^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\big(\ \tilde{\varphi}_t {F_0}^2\big)}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\ \partial \tilde{\mathrm{y}}^j}.$$

از طرفی به آسانی می‌توان به‌دست آورد که

$$\frac{\partial\big(\ \tilde{\varphi}_t {F_0}^2\big)}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}} = \tilde{\varphi}_t\ \left(\frac{\partial\big(\ {F_0}^2\big)}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}}\right),$$

و در نتیجه داریم:

$$[\tfrac{1}{2}\,(\tilde{\varphi}_t\ F_0)^2\,]_{\tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\tilde{\mathrm{y}}^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\tilde{\varphi}_t\ F_0)^2}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\ \partial \tilde{\mathrm{y}}^j} = \tilde{\varphi}_t\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\big(\ {F_0}^2\big)}{\partial \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\ \partial \tilde{\mathrm{y}}^j}\right) = \tilde{\varphi}_t([\tfrac{1}{2}{F_0}^2]_{\tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\tilde{\mathrm{y}}^j}).$$

با استفاده از این‌که $[\frac{1}{2}{F_0}^2]_{\tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\tilde{\mathrm{y}}^j}$ معین‌مثبت و $\tilde{\varphi}_t$ وابریختی است، پس $\tilde{\varphi}_t([\frac{1}{2}{F_0}^2]_{\tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}}\tilde{\mathrm{y}}^j})$ نیز معین‌مثبت است. از این رو $\tilde{\varphi}_t\ (F_0)$ در شرط سوم ساختار فینسلری نیز صدق می‌کند. بنابراین $\tilde{\varphi}_t\ (F_0)$ یک ساختار فینسلری روی M است.

لم۳.۲. فرض‌کنید φ_t یک خانواده‌ای از وابریختی‌ها روی M باشد، $(\gamma^{\ i}_{jk})_{\ g_0}$، $G^{\ i}_{\ g_0}$، $H_{\ g_0}$ و $\mathrm{ic}_{\ g_0}$ به‌ترتیب علائم کریستوفل، ضرایب اسپری، ریچی اسکالر و انحنای اسکالر مربوط به متر فینسلری g_0 و $\mu > 0$ یک عدد حقیقی مثبت باشند. در این‌صورت داریم:

$$\tilde{\varphi}_t\big((\gamma^{\ i}_{jk})_{\ g_0}\big) = (\gamma^{\ i}_{jk})_{\ \tilde{\varphi}_t(g_0)}, \quad (۱.۳)$$

$$\tilde{\varphi}_t\big(\ G^{\ i}_{\ g_0}\big) = G^{\mathrm{i}}_{\ \tilde{\varphi}_t(g_0)}, \quad (۲.۳)$$

$$\mathrm{ic}_{\ \mu g_0} = \frac{1}{\mu}\quad \mathrm{ic}_{\ g_0}, \quad (۳.۳)$$

$$\tilde{\varphi}_t\big(\quad \mathrm{ic}_{\ g_0}\big) = \quad ic_{\ \tilde{\varphi}_t(g_0)}, \quad (۴.۳)$$

$$H_{\mu g_0} = \frac{1}{\mu} H_{g_0}, \tag{۵.۳}$$

$$\tilde{\varphi}_t(H_{g_0}) = H_{\tilde{\varphi}_t(g_0)}. \tag{۶.۳}$$

با توجه به تعریف علائم کریستوفل داریم:

$$\tilde{\varphi}_t(\gamma^i_{jk})_{\mu g_0} = \tilde{\varphi}_t(\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j})) = \tilde{\varphi}_t(g^{is})\tilde{\varphi}_t(\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j})) = \tilde{\varphi}_t(g^{is})\frac{1}{2}(\frac{\partial \tilde{\varphi}_t(g_{sj})}{\partial \tilde{x}^k} \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_t(g_{jk})}{\partial \tilde{x}^s} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_t(g_{ks})}{\partial \tilde{x}^j}) = (\gamma^i_{jk})_{\tilde{\varphi}_t(g_0)}.$$

بنابراین رابطه (۱.۳) اثبات می‌شود. آن‌گاه

$$\tilde{\varphi}_t(G^i_{g_0}) = \tilde{\varphi}_t\left(\frac{1}{2}(\gamma^i_{jk})_{g_0} y^j y^k\right) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_t\left((\gamma^i_{jk})_{g_0}\right)\tilde{\varphi}_t\, y^j\, \tilde{\varphi}_t y^k = \frac{1}{2}(\gamma^i_{jk})_{\tilde{\varphi}_t(g_0)}\tilde{y}^j\tilde{y}^k = G^i_{\tilde{\varphi}_t(g_0)}.$$

لذا رابطه (۲.۳) اثبات می‌شود. حال برای اثبات رابطه (۳.۳) می‌دانیم که ضرایب اسپری $G^i_{g_0}$ همگن از درجه ۲ هستند، که برای هر $\lambda > 0$ $G^i_{g_0}(x,\lambda y) = \lambda^2 G^i_{g_0}(x,y)$ است. از طرف دیگر برای هر $\mu > 0$،

$$G^i_{\mu g_0} = G^i_{g_0}.$$

در حقیقت

$$(g_{ij})_{\mu g_0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\mu g_{mn} y^m y^n)}{\partial y^i \partial y^j} = \mu\frac{1}{2}\frac{\partial^2(g_{mn} y^m y^n)}{\partial y^i \partial y^j} = \mu(g_{ij})_{g_0}.$$

از این رو

$$(\gamma^i_{jk})_{\mu g_0} = \frac{1}{2}(g^{is})_{\mu g_0}(\frac{\partial\left((g_{sj})_{\mu g_0}\right)}{\partial x^k} \quad \frac{\partial\left((g_{jk})_{\mu g_0}\right)}{\partial x^s} + \frac{\partial((g_{ks})_{\mu g_0})}{\partial x^j}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}(g^{is})_{g_0}(\frac{\partial\left(\mu(g_{sj})_{g_0}\right)}{\partial x^k} \quad \frac{\partial(\mu(g_{jk})_{g_0})}{\partial x^s} + \frac{\partial(\mu(g_{ks})_{g_0})}{\partial x^j}) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}(g^{is})_{g_0}\mu(\frac{\partial\left((g_{sj})_{g_0}\right)}{\partial x^k} \quad \frac{\partial((g_{jk})_{g_0})}{\partial x^s} + \frac{\partial((g_{ks})_{g_0})}{\partial x^j}) == \frac{1}{2}(g^{is})_{g_0}(\frac{\partial\left((g_{sj})_{g_0}\right)}{\partial x^k} \quad \frac{\partial((g_{jk})_{g_0})}{\partial x^s} + \frac{\partial((g_{ks})_{g_0})}{\partial x^j}) = (\gamma^i_{jk})_{g_0},$$

که این نتیجه می‌دهد

$$G^i_{\mu g_0} = \frac{1}{2}(\gamma^i_{jk})_{\mu g_0} y^j y^k = \frac{1}{2}(\gamma^i_{jk})_{g_0} y^j y^k = G^i_{g_0}. \tag{۷.۳}$$

با استفاده از تعریف ریچی اسکالر به‌دست می‌آوریم:

$$(R^i_k)_{\mu g_0} = \frac{1}{\mu g_{mn} y^m y^n}\left(2\frac{\partial G^i_{\mu g_0}}{\partial x^k} \quad \frac{\partial^2 G^i_{\mu g_0}}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^i_{\mu g_0}\frac{\partial^2 G^i_{\mu g_0}}{\partial y^j \partial y^k} \quad \frac{\partial G^i_{\mu g_0}}{\partial y^j}\frac{\partial G^i_{\mu g_0}}{\partial y^k}\right) \overset{(۷.۳)}{=} \frac{1}{\mu g_{mn} y^m y^n}\left(2\frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial x^k} \quad \frac{\partial^2 G^i_{g_0}}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^i_{g_0}\frac{\partial^2 G^i_{g_0}}{\partial y^j \partial y^k} \quad \frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial y^j}\frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial y^k}\right) = \frac{1}{\mu}(R^i_k)_{g_0}.$$

با جایگذاری $i = k$ در معادله، خواهیم داشت $\mathrm{ic}_{\mu g_0} = \frac{1}{\mu} \quad \mathrm{ic}_{g_0}$. بنابراین رابطه (۳.۳) را داریم. سپس برای اثبات رابطه (۴.۳) از رابطه (۲.۳) به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\tilde{\varphi}_t\left((R^i_k)_{g_0}\right) = \tilde{\varphi}_t\left(\frac{1}{g_{mn} y^m y^n}\left(2\frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial x^k} \quad \frac{\partial^2 G^i_{g_0}}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^i_{g_0}\frac{\partial^2 G^i_{g_0}}{\partial y^j \partial y^k} \quad \frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial y^j}\frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial y^k}\right)\right) = \tilde{\varphi}_t\left(\frac{1}{g_{mn} y^m y^n}\right)\tilde{\varphi}_t\left(2\frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial x^k} \quad \frac{\partial^2 G^i_{g_0}}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^i_{g_0}\frac{\partial^2 G^i_{g_0}}{\partial y^j \partial y^k} \quad \frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial y^j}\frac{\partial G^i_{g_0}}{\partial y^k}\right).$$

آن‌گاه داریم:

$$\tilde{\varphi}_t\left((R^i_k)_{g_0}\right) =$$

$$\frac{1}{\tilde{\varphi}_t(g_{mn}y^m y^n)}\left(2\ \frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t(G^i_{g_0})\right)}{\partial \tilde{x}^k}\right.$$
$$\frac{\partial^2\left(\tilde{\varphi}_t(G^i_{g_0})\right)}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{y}^k}\ \tilde{y}^j + 2\tilde{\varphi}_t\left(G^i_{g_0}\right)\ \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_t(G^i_{g_0})}{\partial \tilde{y}^j \partial \tilde{y}^k}$$
$$\left.\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t(G^i_{g_0})\right)}{\partial \tilde{y}^j}\frac{\partial\left(\tilde{\varphi}_t(G^i_{g_0})\right)}{\partial \tilde{y}^k}\right).$$

حال با جایگذاری $i = k$ در معادله و همچنین با استفاده از (۲.۳) نتیجه می‌شود که

$$\tilde{\varphi}_t(\ \ \mathrm{i}c_{g_0}) = \ \ ic_{\tilde{\varphi}_t(g_0)}. \qquad (۸.۳)$$

سپس برای اثبات رابطه (۵.۳) با استفاده از تعریف متر فینسلر داریم:

$$\left(g_{ij}\right)_{\mu g_0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\mu g_{mn}y^m y^n)}{\partial y^i \partial y^j} =$$
$$\mu\frac{1}{2}\frac{\partial^2(g_{mn}y^m y^n)}{\partial y^i \partial y^j} = \mu\left(g_{ij}\right)_{g_0}.$$

بنابراین

$$(g^{ij})_{\mu g_0} = (\left(g_{ij}\right)_{\mu g_0})\ \ ^1 =$$
$$\mu(\left(g_{ij}\right)_{g_0})\ \ ^1 = \frac{1}{\mu}(g^{ij})_{g_0}$$

از طرف دیگر با استفاده از تعریف تانسور ریچی و رابطه (۳.۳)، داریم:

$$\left(Ric_{ij}\right)_{\mu g_0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left((\mu g_{mn}y^m y^n)\ \ ic_{\mu g_0}\right)}{\partial y^i \partial y^j} =$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left((\mu g_{mn}y^m y^n)\frac{1}{\mu}\ \ ic_{g_0}\right)}{\partial y^i \partial y^j} =$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2((g_{mn}y^m y^n)\ \ ic_{g_0})}{\partial y^i \partial y^j} = \left(Ric_{ij}\right)_{g_0} \qquad (۱۰.۳)$$

براساس‌رابطه‌های (۹.۳)و(۱۰.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$(H)_{\mu g_0} = (g^{ij})_{\mu g_0}\left(Ric_{ij}\right)_{\mu g_0} =$$
$$\frac{1}{\mu}(g^{ij})_{g_0}\left(Ric_{ij}\right)_{g_0} = \frac{1}{\mu}H_{g_0}.$$

حال برای اثبات رابطه (۶.۳) داریم:

$$\tilde{\varphi}_t\left(H_{g_0}\right) = \tilde{\varphi}_t\left(g^{ij}Ric_{ij}\right)_{g_0}$$
$$= \tilde{\varphi}_t\left(g^{ij}\right)_{g_0}\tilde{\varphi}_t\left(Ric_{ij}\right)_{g_0} =$$
$$\tilde{\varphi}_t\left(g^{ij}\right)_{g_0}\ \tilde{\varphi}_t(\frac{1}{2}\frac{\partial^2(g_{mn}y^m y^n\ \ ic_{g_0})}{\partial y^i \partial y^j})$$
$$= \tilde{\varphi}_t\left(g^{ij}\right)_{g_0}(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}(\tilde{\varphi}_t(g_{mn}y^m y^n)$$
$$\tilde{\varphi}_t(\ \ ic_{g_0})))$$
$$\overset{(۴.۳)}{=}\ \tilde{\varphi}_t\left(g^{ij}\right)_{g_0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_t(g_{mn}y^m y^n)\\ ic_{\tilde{\varphi}_t(g_0)}\end{pmatrix}\right)$$
$$= H_{\tilde{\varphi}_t(g_0)}.$$

و اثبات تمام است.

حال در موقعیتی هستیم که می‌توانیم با استفاده از لم‌های بالا، به اثبات قضیه زیر بپردازیم.

قضیه۳.۳. فرض کنید (M, g_0, V, λ) یک سالیتون یامابه فینسلری باشد. آن‌گاه خانواده‌ی ۱-پارامتری از اسکالرهای $\tau(t)$ و وابریختی‌های φ_t روی M وجود دارند، به‌طوری که $(M, g(t))$ جواب معادله شار یامابه فینسلری (۷.۲) هستند، که در آن $g(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(t) = \tau(t)\tilde{\varphi}_t\left(g_0\right). \qquad (۱۱.۳)$$

بالعکس، فرض‌کنیم $(M, g(t))$ جواب‌های معادله شار یامابه فینسلری (۷.۲) باشد که به فرم (۱۱.۳) است. در این‌صورت میدان برداری V روی Mوجود دارد به‌طوری که چهارتایی (M, g_0, V, λ) یک سالیتون یامابه فینسلری است.

اثبات. فرض‌کنید (M, g_0, V, λ) در رابطه (۸.۲) صدق کند و خانواده‌ای از اسکالر $\tau(t)$ تعریف شده توسط

$$\tau(t)\quad\ 1\quad\ \lambda t > 0,$$

را در نظر بگیرید، که در آن λ یک عدد ثابت حقیقی است. گروه ۱-پارامتری از میدان‌های برداری X_t روی M به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$X_t(x) \quad \frac{1}{\tau(t)}V(x).$

خانواده‌ای از مترهای فینسلری به فرم (۱۱.۳) تعریف شده است، که در آن φ_t گروه ۱-پارامتری از وابریختی‌های تولید شده توسط X_t و $\varphi_0 = Id_M$ است. با در نظر گرفتن رابطه (۱۱.۳) و رابطه $\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_t(g_0) = \tilde{\varphi}_t(\ _{\widehat{X_t}}g_0)$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\ g(t) =$$
$$\tau'(t)\tilde{\varphi}_t(g_0) + \tau(t)\tilde{\varphi}_t(\ _{\widehat{X_t}}g_0) =$$
$$\tilde{\varphi}_t(\ \lambda g_0 + \ _{\widehat{\nabla}}g_0) = \tilde{\varphi}_t(\ H_{g_0}g_0) =$$
$$\tilde{\varphi}_t(\ H_{g_0})\tilde{\varphi}_t(g_0) \overset{(۵.۳)}{=} \ Hg \quad (۱۲.۳)$$

بنابراین $g(t)$ جواب شار یامابه فینسلری (۷.۳) است.

بالعکس، فرض‌کنیم $(M, g(t))$ جواب‌های معادله شار یامابه فینسلری (۷.۲)، به فرم (۱۱.۳) باشند. هم‌چنین فرض کنیم $\tau(0) = 1$ و $\varphi_0 = Id_M$، نتیجه می‌گیریم که

$$H_{g_0}g_0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\tau(t)\tilde{\varphi}_t(g_0)\right)|_{t=0} =$$
$$\tau'(t)\tilde{\varphi}_t(g_0) + \tau(t)\tilde{\varphi}_t(\ _{\widehat{X_t}}g_0)|_{t=0} =$$
$$\tau'(0)g_0 + \ _{\widehat{X_0}}g_0, \qquad (۱۳.۲)$$

که در آن $X(t)$ گروهی از میدان‌های برداری تولید شده از وابریختی‌های φ_t است. بنابراین (۱۳.۳) نتیجه می‌دهد

$$g_0H_{g_0} = \tau'(0)g_0 + \ _{\widehat{X_0}}g_0.$$

با جایگذاری $\tau'(0) \quad = \lambda$ و $V = X_0$ معادله (۸.۳) را داریم. بنابراین اثبات تمام است.

۴- منیفلدهای انیشتین‌گونه گسترش یافته گرادیان فینسلری، توپولوژی‌گونه متناهی دارند

اثبات این قضیه را در قالب دو قضیه بیان و ثابت می‌کنیم.

گزاره ۴.۱. فرض‌کنید (M, g) منیفلد فینسلری که در رابطه (۴.۲) صدق کند که در آن $\alpha, \gamma \geq 0$ و برای ثابت $\Lambda > 0$، $\lambda(x) \geq \Lambda > 0$. آن‌گاه برای نقاط ثابت $M \quad p, q$ داریم:

$$\|\nabla f\|_q \geq \frac{\Lambda}{2|\beta|}T \quad \|\nabla f\|_p \quad C.$$

با شرط این‌که $Ric \geq \delta^{-1}g$ و برای هر $\delta > 0$، شعاع تزریقی $inj(M, g) \geq \delta > 0$ یا تانسور ریچی Ric از بالا کران‌دار است.

اثبات. نقطه ثابت $M \quad p$ و $\theta: [0, +\infty) \to M$ ژئودزیک پارامتری شده توسط طول قوس $d(p, x) \quad s$ را در نظر بگیرید. حال با اثر دادن نامساوی (۴.۲) در (θ', θ') در امتداد طول ژئودزیک θ داریم:

$$\begin{aligned}&\alpha\, Ric(\theta', \theta')\\ &\geq \lambda(x) \quad \beta Hess(f)(\theta', \theta')\\ &+ \gamma g(\theta', \nabla f)^2, \qquad (۱.۴)\end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}Hess(f)(\theta', \theta') &= L_{\nabla f}\, g(\theta', \theta')\\ &= g(\nabla_{\theta'}\nabla f, \theta') + g(\theta', \nabla_{\theta'}\nabla f)\\ &= \frac{d}{ds}g(\nabla f, \theta') + \frac{d}{ds}g(\theta', \nabla f). \quad (۲.۴)\end{aligned}$$

حال با قرار دادن رابطه (۲.۴) در نامساوی (۱.۴) و انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned}&\alpha\int_0^T Ric(\theta', \theta')\ ds \geq\\ &\int_0^T \lambda(\theta(s))\, ds \quad \beta(g(\nabla f, \theta'(s)) +\\ &g(\theta'(s), \nabla f))|_0^T +\\ &\gamma\int_0^T g(\theta', \nabla f)^2\ ds, \qquad (۳.۴)\end{aligned}$$

بنابراین $\gamma \geq 0$ چون

$$\gamma \int_0^T g(\theta', \nabla f)^2 \ ds \geq 0,$$

و بنابر فرض $0 < \Lambda \leq (x)$، پس نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha \int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds \geq \Lambda T \quad \beta(g(\nabla f, \theta'(T)) \quad g(\nabla f, \theta'(0)) + g(\theta'(T), \nabla f)) \quad g(\theta'(0), \nabla f)). \qquad (۴.۴)$$

از طرفی با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز، نامساوی

$$\left|g(\nabla f, \theta'(s))\right| \leq \|\nabla f\|_{\theta(s)},$$

برقرار است. پس

$$\begin{cases} \quad \|\nabla f\|_p \leq g(\nabla f, \theta'(0)) \leq \|\nabla f\|_p, \\ \quad \|\nabla f\|_q \leq g(\nabla f, \theta'(T)) \leq \|\nabla f\|_q. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\left(\|\nabla f\|_q + \|\nabla f\|_p\right) \leq g(\nabla f, \theta'(T)) \quad g(\nabla f, \theta'(0)) \leq \|\nabla f\|_q + \|\nabla f\|_p.$$

حال اگر $\beta \geq 0$، با استفاده از نامساوی (۴.۴) داریم:

$$\beta(g(\nabla f, \theta'(T)) \quad g(\nabla f, \theta'(0)) + g(\theta'(T), \nabla f) \quad g(\theta'(0), \nabla f)) \geq \quad 2\beta\left(\|\nabla f\|_q + \|\nabla f\|_p\right).$$

در نتیجه نامساوی (۴.۴) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\alpha \int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds \geq \Lambda T \quad \beta(g(\nabla f, \theta'(T)) \quad g(\nabla f, \theta'(0)) + g(\theta'(T), \nabla f)) \quad g(\theta'(0), \nabla f)) \geq \Lambda T \quad 2\beta\left(\|\nabla f\|_q + \|\nabla f\|_p\right).$$

اگر $\beta \leq 0$، با استفاده با استفاده از نامساوی (۴.۴) داریم:

$$\beta(g(\nabla f, \theta'(T)) \quad g(\nabla f, \theta'(0)) + g(\theta'(T), \nabla f) \quad g(\theta'(0), \nabla f)) \geq 2\beta\left(\|\nabla f\|_q + \|\nabla f\|_p\right).$$

و لذا رابطه (۴.۴) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\alpha \int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds \geq \Lambda T \quad \beta(g(\nabla f, \theta'(T)) \quad g(\nabla f, \theta'(0)) + g(\theta'(T), \nabla f)) \quad g(\theta'(0), \nabla f)) \geq \Lambda T + 2\beta\left(\|\nabla f\|_q + \|\nabla f\|_p\right).$$

بنابراین برای هر β، داریم:

$$\alpha \int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds \geq \Lambda T \quad 2|\beta|\left(\|\nabla f\|_q + \|\nabla f\|_p\right).$$

حال نامساوی فوق را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$2|\beta| \ \|\nabla f\|_q \ \geq \Lambda T \quad 2\ |\beta| \ \|\nabla f\|_p \quad \alpha \int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds.$$

از طرفی $\int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds$ کران‌دار است زیرا بنابر فرض قضیه i) اگر $Ric \geq \delta^{-1} g$ و برای هر $\delta > 0$، شعاع تزریقی $inj(M, g) \geq \delta > 0$ باشد، آن‌گاه طبق لم ۴ در [۱۰]، انتگرال $\int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds$ از بالا کران‌دار است.

ii) اگر تانسور ریچی Ric برای ثابت Ω، از بالا کران‌دار باشد، طبق لم ۲.۲ در [۱۹]، انتگرال $\int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds$ کران‌بالای $2(n \quad 1) + 2\Omega$ دارد. بنابراین برای هر ثابت حقیقی مثبت C، انتگرال

$$\alpha \int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds < C,$$

است. سپس با توجه به کران‌دار بودن انتگرال $\int_0^T Ric(\theta', \theta') \ ds$ داریم:

$$2|\beta| \ \|\nabla f\|_q \geq \Lambda T \quad 2|\beta| \ \|\nabla f\|_p \quad C,$$

و اثبات تمم است.

لم ایزوتوپی بیان می‌کند اگر یک تابع هموار سره $f: M \to$ چنان موجود باشد که خارج از یک زیر مجموعه‌ی فشرده M، نقطه بحرانی نداشته باشد آن‌گاه M با درون یک منیفلد فشرده مرزدار همسان‌ریخت است (به مرجع [۲۰] مراجعه کنید).

قضیه ۴.۲. فرض‌کنید (M, g) یک منیفلد انیشتین‌گونه گسترش‌یافته گرادیان باشد، که در آن $\alpha, \gamma \geq 0$ و عدد ثابت مثبتی مانند $\Lambda > 0$ وجود داشته باشد که $\lambda(x) \geq \Lambda > 0$ است. به‌علاوه، اگر $Ric \geq \delta^{-1} g$ و $\delta > 0$، $inj(M, g) \geq$ $\delta > 0$ برای یک عدد مثبت $\delta > 0$ برقرار باشد، یا تانسور ریچی Ric از بالا کران‌دار باشد، توپولوژی‌گونه متناهی دارد.

اثبات. باید نشان دهیم که تابع f، یک تابع سره است و هیچ نقطه بحرانی خارج از یک مجموعه فشرده ندارد. آن‌گاه طبق لم ایزوتوپی از قضیه مورس، M توپولوژی‌گونه متناهی دارد. براساس گزاره ۱.۴، $\|\nabla f\|_q$ در $T = d(p, q)$ رشد خطی دارد. چون f یک تابع هموار است، بنابراین پیوسته و در نتیجه $f^{-1}((\ \ \infty, a])$ بسته است. از طرف دیگر برای هر $p, q \quad f^{-1}((\ \ \infty, a])$ و $a < \infty$ به‌وضوح $f^{-1}((\ \ \infty, a])$ فشرده است. بنابراین f تابع سره است. همچنین، به آسانی می‌توان بررسی کرد که f هیچ نقطه بحرانی خارج از مجموعه فشرده ندارد. در حقیقت کافیست مجموعه فشرده $\bar{B}(p, \frac{2|\beta|\ \|\nabla f\|_p + C}{\Lambda})$ را در نظر بگیریم. آن‌گاه طبق لم ایزوتوپی از قضیه مورس، M دارای توپولوژی‌گونه متناهی دارد.

سپاس‌گزاری

نویسنده اول از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه (SCU.MM1401.47684) در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نماید.

فهرست منابع

[1] R. S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. In: Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), Volume 71 of Contemp. Math. 237-262, Amer. Math. Soc. 1988

[2] B. Bidabad, M. Yar Ahmadi. On complete Yamabe solitons. Advances in Geometry. 1 18: 101-104 (2018)

[3] L. Ma, L. Cheng, A. Zhu. Extending Yamabe flow on complete Riemannian manifolds. Bull. Sci. Math. 136: 882-891 (2012)

[4] S. Deshmukh, B. Y. Chen. A note on Yamabe solitons. Balkan of Geometry and Its Applications. 23 1: 37-43 (2018)

[5] S. Y. Hsu. A note on compact gradient Yamabe solitons. J. Math. Anal. Appl. 388: 725-726 (2012)

[6] B. Bidabad, M. Yar Ahmadi. On Quasi-Einstein Finsler spaces. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 40 no. 4: 921-930 (2014)

[7] G. Catino. On the geometry of gradient Einstein-type manifolds. Pacific Journal of Mathematics 286. 1: 39-67 (2016)

[8] J. Milnor. A note on curvature and fundamental group. J. Differential Geometry, 2: 1-7 (1968)

[9] D. Gromoll, W. T. Meyer. Examples of complete manifolds with positive Ricci curvature. Journal of Differential Geometry, 21 2: 195-211 (1985)

[10] F. Q. Fang, J. W. Man, Z. L. Zhang. Complete gradient shrinking Ricci solitons have finite topological type. Comptes Rendus Mathematique, Vol. 346: 653-656 (2008)

[11] M. Yar Ahmadi, S. Hedayatian. Finite topological type of complete Finsler gradient shrinking Ricci solitons. Turk J Math. 45: 2419-2426 (2021)

[12] M. Yar Ahmadi. On the gradient Finsler Yamabe solitons. AUT Journal of Mathematics an computing. 1(2): 229-233 (2020)

[13] B. Bidabad, M. Yar Ahmadi. On complete Finslerian Yamabe solitons. Differential Geometry and it's Application. 66: 52-60 (2019)

[14] B. Bidabad, M. Yar Ahmadi. On compact Ricci solitons in Finsler geometry. Comptes Rendus Mathematique. 353(11): 1023-1027 (2015)

[15] B. Bidabad, M. Yar Ahmadi. Complete Ricci solitons on Finsler manifolds. Science China Mathematics. 61 (10): 1825-1832 (2018)

[16] Z. Shen. Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry. Chinese. Annals. Math. 27: 73-94 (2006)

[17] H. Akbar-Zadeh. Initiation To Global Finslerian Geometry. Volume 68. Elsevier Science, 2006

[18] B. Chow, P. Lu, L. Ni. Hamiltons Ricci Flow. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 77. Providence, RI, USA: Science Press, 2006.

[19] W. Wylie, Complete shrinking Ricci solitons have finite fundamental group, Proceedings of the AMS 136 5: 1803-1806 (2008)

[20] Z. Shen. On complete manifolds of nonnegative kth-Ricci curvature. Transactions of the American Mathematical Society, 338 1: 289--310 (1993)