

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸

JNRM
دانشگاه آزاد اسلامی

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مشخصه‌ای برای ابرحلقه‌های \mathcal{E}_m -کامل به وسیله m -بخش‌های کامل

مرتضی نوروزی*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۰۲

چکیده

در این مقاله، m -بخش‌های کامل از یک ابرحلقه تعریف شده، و تفاوت و ارتباط آن‌ها با بخش‌های کامل در یک ابرحلقه بررسی می‌شود. علاوه بر این، با استفاده از رابطه \mathcal{E}_m روی ابرحلقه‌ها، مفهوم ابرحلقه‌های \mathcal{E}_m -کامل معرفی و مشخصه‌ای برای آن‌ها به وسیله m -بخش‌های کامل تعیین خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: ابرحلقه، رابطه منظم‌قوی، رابطه \mathcal{E}_m ، m -بخش کامل

۱- مقدمه

دسته‌بندی مناسبی از تحقیقات و مطالعات انجام شده روی انواع مختلف ابرحلقه‌ها در مرجع [۴] صورت گرفته است که برای مطالعه جزئیات می‌توان به آن رجوع کرد. ساختارهای خارج‌قسمتی نقش مهمی در نظریه ابرساختارهای جبری بازی می‌کنند. دلیل آن می‌تواند ارتباطی باشد که ساختارهای خارج‌قسمتی میان ابرساختارهای جبری و ساختارهای جبری معمولی برقرار می‌کنند. این ارتباط با استفاده از ساختار خارج‌قسمتی تشکیل شده به وسیله یک رابطه هم‌ارزی منظم قوی روی یک ابرساختار، برقرار می‌شود.

تعریف ۱-۲: یک رابطه هم‌ارزی ρ روی یک ابرگروه $(R, +)$ منظم گفته می‌شود، اگر برای هر $a, b, x \in R$ به طوری که apb داشته باشیم $a + (x + a) \bar{\rho} (x + b)$ و $(b + x) \bar{\rho} (x + b)$ ، که این یعنی:

$$\begin{cases} \forall u \in a + x \exists v \in b + x; upv \\ \forall t \in b + x \exists z \in a + x; tpz \end{cases}$$

(به طور مشابه برای $(x + a) \bar{\rho} (x + b)$ بیان می‌شود).

علاوه بر این، ρ را روی ابرگروه R منظم قوی گویند هرگاه برای هر $u \in a + x$ و برای هر $v \in b + x$ داشته باشیم upv ، که در این حالت به صورت $(a + x) \bar{\rho} (b + x)$ نمایش داده می‌شود و همچنین $(x + a) \bar{\rho} (x + b)$ ، یک رابطه هم‌ارزی روی ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ منظم (قوی) گفته می‌شود هرگاه روی هر دو $(R, +)$ و (R, \cdot) منظم (قوی) باشد.

اولین نوع از این روابط روی ابرحلقه‌ها رابطه γ است که توسط وجیوک لیس^۳ در [۶] روی یک (نیم) ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ به صورت زیر برای هر $a, b \in R$ تعریف شد:

$$\begin{aligned} ayb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, \\ \exists z_{i1}, \dots, z_{ik_i} \in R (\forall 1 \leq i \leq n); \\ \{a, b\} \subseteq \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \end{aligned}$$

می‌دانیم که خارج قسمت یک گروه G توسط یک زیرگروه دلخواه H از G ، یک گروه است اگر و تنها اگر H یک زیرگروه نرمال از G باشد. مارتی^۲ [۱] در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکانیدیناوی، برای اولین بار مفهوم ابرگروه‌ها را معرفی کرد و نشان داد ساختار خارج‌قسمتی G/H همیشه یک ابرگروه است. از آن زمان به بعد به تدریج نظریه ابرساختارهای جبری در سرتاسر جهان گسترش یافت، و پیشرفت‌های مختلفی در زمینه‌های گوناگون از آن به ثبت رسید. مراجع [۷-۱] منابع مناسبی برای اطلاع از پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه ابرساختارهای جبری می‌باشند.

فرض کنید R یک مجموعه ناتهی و $P^*(R)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی R باشد. هر یک از توابع

$$+: R \times R \rightarrow P^*(R)$$

$$\cdot: R \times R \rightarrow P^*(R)$$

را یک ابرعمل روی R گویند، که برای هر دو زیرمجموعه A و B از R و هر عنصر x از R تحت این ابرعمل‌ها قرار می‌دهیم:

$$A + B = \cup_{a \in A, b \in B} a + b$$

$$A + x = A + \{x\}$$

(که به طور مشابه برای ابرعمل "•" بیان می‌شود).

تعریف ۱-۱: یک ابرحلقه ابرساختاری جبری مانند $(R, +, \cdot)$ است که در آن:

الف) $(R, +)$ یک ابرگروه است، یعنی ابرعمل $+$ روی R شرکت‌پذیر است و برای هر $x \in R$ داریم $x + R = R = R + x$ (اصل تکثیر)؛

ب) (R, \cdot) یک نیم‌ابگروه است، یعنی ابرعمل \cdot روی R شرکت‌پذیر است؛

ج) برای هر $x, y, z \in R$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

(خاصیت پخش‌پذیری ابرعمل \cdot نسبت به $+$).

اگر در تعریف فوق، $(R, +)$ یک نیم‌ابگروه باشد، آنگاه $(R, +, \cdot)$ را یک نیم‌ابرحلقه گویند.

³ T. Vougiouklis

² F. Marty

علاوه بر این، ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ را n -کامل ([۳]) گویند هرگاه

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right)\right) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right).$$

می‌توان دید که، هر مجموع متناهی از حاصل ضرب‌های متناهی عناصر یک ابرحلقه n -کامل R ، یک بخش کامل از R است.

در [۱۱] نویسندگان نگاه متفاوتی به مطالعه روابط اساسی روی ابرحلقه‌ها داشته‌اند. می‌دانیم که رابطه γ ، رابطه‌ای اساسی روی (نیم) ابرحلقه‌ها است، یعنی کوچکترین رابطه منظم قوی روی (نیم) ابرحلقه‌ها است که ساختار خارج قسمتی تولید شده توسط آن یک حلقه است. این نگاه متفاوت از آن جهت است که به دنبال آن بودند تا بدانند تحت چه شرایطی و روی چه (نیم) ابرحلقه‌هایی می‌توان رابطه‌ای اساسی کوچکتر از رابطه γ تعریف کرد که ساختار خارج قسمتی تولید شده توسط آن یک (نیم)حلقه باشد. برای پاسخ به این سوال، رابطه \mathcal{E}_m را روی ابرحلقه‌ها به صورت زیر تعریف کردند:

فرض کنید $m \geq 2$ یک عدد دلخواه طبیعی و $(R, +, \cdot)$

یک (نیم) ابرحلقه باشد. برای هر $a, b \in R$

$$a\mathcal{E}_m b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists z_1, \dots, z_n \in R; \\ \{a, b\} \subseteq \sum_{i=1}^n z_i^m = z_1^m + \dots + z_n^m \\ \text{که در آنجا } z_i^m = \underbrace{z_i \cdots z_i}_m$$

به راحتی می‌توان دید $\mathcal{E}_m \subseteq \gamma$ و در نتیجه $\mathcal{E}_m^* \subseteq \gamma^*$. علاوه بر این نشان داده شده است ([۱۰]) که $\mathcal{E}_m \neq \gamma$ و همچنین $\mathcal{E}_m^* \neq \gamma^*$. حال فرض کنید $(R, +, \cdot)$ ابرحلقه‌ای باشد که در آن (R, \cdot) جابجایی است و برای همه زیرمجموعه‌های A_1, \dots, A_n از R ، رابطه زیر برقرار باشد:

$$B \subseteq \sum_{i=1}^n A_i^m \Leftrightarrow \exists x_i \in A_i \ (1 \leq i \leq n); \\ B \subseteq \sum_{i=1}^n x_i^m \quad (1)$$

در [۱۱] نشان داده شد که \mathcal{E}_m^* کوچکترین رابطه هم‌ارزی منظم قوی روی (نیم) ابرحلقه‌های صادق در شرط (۱) است که ساختار خارج قسمتی تولید شده توسط آن یک (نیم) حلقه معمولی است. از این رو، \mathcal{E}_m^* یک رابطه اساسی روی چنین ابرحلقه‌هایی است.

γ رابطه‌ای انعکاسی و تقارنی روی (نیم) ابرحلقه‌ها است که لزوماً متعدی نیست. نشان داده شده است که بستر متعدی γ ، یعنی $\gamma^* = \gamma \cup \gamma \circ \gamma \cup \gamma \circ \gamma \circ \gamma \cup \dots$

کوچکترین رابطه منظم قوی روی یک (نیم) ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ است به طوری که $(R/\gamma^*, \oplus, \odot)$ یک (نیم)حلقه است که در آنجا برای هر $\gamma^*(x), \gamma^*(y) \in R/\gamma^*$ داریم:

$$\gamma^*(x) \oplus \gamma^*(y) = \{\gamma^*(z) \mid z \in \gamma^*(x) + \gamma^*(y)\} \\ \gamma^*(x) \odot \gamma^*(y) = \{\gamma^*(t) \mid t \in \gamma^*(x) \cdot \gamma^*(y)\}$$

در واقع ترکیب هر دو عنصر دلخواه از R/γ^* توسط \oplus و \odot یک مجموعه تک عضوی است. در واقع برای $\gamma^*(q), \gamma^*(p) \in \gamma^*(x) \oplus \gamma^*(y)$ داریم $a, a' \in \gamma^*(x) + \gamma^*(y)$ ، پس وجود دارند $b, b' \in \gamma^*(y)$ و $\gamma^*(x)$ به طوری که $p \in a + b$ و $q \in a' + b'$. با توجه به منظم قوی بودن رابطه γ^* داریم $\overline{\gamma^*(a + b)} = \overline{\gamma^*(a' + b')}$ که نتیجه می‌دهد $p\gamma^*q$ و این یعنی $\gamma^*(p) = \gamma^*(q)$.

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\gamma^*(x) \oplus \gamma^*(y) = \gamma^*(z), \quad \forall z \in \gamma^*(x) + \gamma^*(y) \\ \gamma^*(x) \odot \gamma^*(y) = \gamma^*(t), \quad \forall t \in \gamma^*(x) \cdot \gamma^*(y)$$

از این رو، رابطه γ^* یک رابطه اساسی روی (نیم) ابرحلقه R ، و R/γ^* را (نیم) حلقه اساسی بدست آمده توسط γ^* گویند. روابط دیگری نیز با این خواص روی ابرحلقه‌ها مطالعه و بررسی شده است که برای آشنایی با آن‌ها می‌توان به مراجع [۷]، [۸] و [۹] رجوع کرد.

پس از آن، در راستای بررسی متعدی بودن رابطه γ روی ابرحلقه‌ها در [۱۰]، مفهوم یک بخش کامل در ابرحلقه‌ها به صورت زیر تعریف شد:

تعریف ۱-۳: زیرمجموعه ناتهی M از ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ یک بخش کامل از R گفته می‌شود هرگاه

$$M \cap \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right) \neq \emptyset$$

برای همه اعداد طبیعی n, k_1, \dots, k_n و عناصر دلخواه z_{i1}, \dots, z_{ik_i} از R به طوری که $1 \leq i \leq n$ نتیجه دهد

$$\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right) \subseteq M.$$

$A = \{a, b, d\}$ یک بخش کامل از R نیست زیرا
 $b \in A$ و byc اما $c \notin A$.

در مثال (۳-۲) زیرمجموعه ناتهی $B = \{b, c, d\}$ یک بخش کامل از R است که برای هر $m \geq 2$ یک m -بخش کامل نیز می باشد.

برای برقراری حالتی از عکس نتیجه (۲-۲)، در زیر مفهوم و مثال هایی از ابرحلقه های m -خودتوان [۱۱] را یادآوری می کنیم:

تعریف ۲-۴: ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ را m -خودتوان گوییم هرگاه عدد طبیعی ثابت $m \geq 2$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in R$ داشته باشیم $x^m \in x$.
مثال ۲-۵: روی مجموعه $R = \{0, a, b\}$ ابرعمل -های زیر را در نظر بگیرید:

+	0	a	b
0	{0}	{a}	{b}
a	{a}	{a, b}	R
b	{b}	R	{a, b}

·	0	a	b
0	{0}	{0}	{0}
a	{0}	R	R
b	{0}	R	R

برای هر $m \in \mathbb{N}$ $2 \leq m$ داریم
 $0^m = \{0\}$ و $a^m = b^m = R$
 از این رو $(R, +, \cdot)$ برای هر $m \in \mathbb{N}$ $2 \leq m$ یک ابرحلقه m -خودتوان است.

مثال ۲-۶: برای هر $x, y \in \mathbb{Z}$ ، تعریف کنید
 $x \oplus y = \{x, y, x + y\}$ و $x \odot y = \{xy\}$ در این صورت $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ یک ابرحلقه است. همچنین برای هر $x \in \mathbb{Z}$ $1 \neq x$ داریم

$$x \notin \{x^m\} = \underbrace{x \odot \cdots \odot x}_m$$

از این رو، برای هر $m \in \mathbb{N}$ $2 \leq m$ ابرحلقه $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ m -خودتوان نیست.

قضیه ۲-۷: فرض کنید R یک ابرحلقه m -خودتوان باشد که در رابطه (1) صدق می کند. در این صورت، زیرمجموعه A از R یک m -بخش کامل از R است اگر و تنها اگر A یک بخش کامل از R باشد.

۲-۲- m -بخش های کامل

در این بخش، مفهوم یک m -بخش کامل از یک ابرحلقه را تعریف می کنیم و تفاوت و ارتباط آن با بخش های کامل تعریف شده روی ابرحلقه ها، مورد بررسی قرار می دهیم.

تعریف ۲-۱: فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک (نیم) ابرحلقه و $m \geq 2$ یک عدد دلخواه طبیعی باشد. زیرمجموعه ناتهی A یک m -بخش کامل از R گفته می شود هرگاه
 $A \cap \sum_{i=1}^n z_i^m \neq \emptyset$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$ ، نتیجه دهد
 $\sum_{i=1}^n z_i^m \subseteq A$.

نتیجه ۲-۲: هر بخش کامل از یک (نیم) ابرحلقه R برای هر عدد طبیعی دلخواه $m \geq 2$ یک m -بخش کامل از R است.

برهان. با توجه به تعریف به وضوح برقرار است. مثال زیر نشان می دهد که عکس نتیجه ۲-۲ لزوما برقرار نیست.

مثال ۲-۳: نیم ابرحلقه $R = \{a, b, c, d\}$ تعریف شده به وسیله ابرعمل های زیر را در نظر بگیرید:

+	a	b	c	d
a	{b, c}	{b, d}	{b, d}	{b, d}
b	{b, d}	{b, d}	{b, d}	{b, d}
c	{b, d}	{b, d}	{b, d}	{b, d}
d	{b, d}	{b, d}	{b, d}	{b, d}

·	a	b	c	d
a	{b, d}	{b, d}	{b, d}	{b, d}
b	{b, d}	{b, d}	{b, d}	{b, d}
c	{b, d}	{b, d}	{b, d}	{b, d}
d	{b, d}	{b, d}	{b, d}	{b, d}

در این صورت $A = \{a, b, d\}$ برای هر $m \geq 2$ یک m -بخش کامل از R است زیرا برای هر $m \geq 2$ ، هر عدد طبیعی n و $z_1, \dots, z_n \in R$ داریم:
 $\sum_{i=1}^n z_i^m = \{b, d\}$.

علاوه بر این می دانیم زیرمجموعه ناتهی A از R یک بخش کامل است اگر و تنها اگر $x \in A$ و $x\gamma y$ برای هر $y \in R$ نتیجه دهد $y \in A$. از این رو،

$$\begin{aligned} &= R \\ &\neq \{0\} \\ &= 0^2 + 0^2 \end{aligned}$$

بنابراین، R یک ابرحلقه \mathcal{E}_2 -کامل نیست. علاوه بر این، می‌توان دید ابرحلقه R برای هر $3 \leq m \in \mathbb{N}$ نیز، \mathcal{E}_m -کامل نیست.

مثال ۳-۴: قرار دهید $R = \{0, 1\}$ و تعریف کنید

$$x + y = x \cdot y = R$$

برای هر $x, y \in R$ در این صورت $(R, +, \cdot)$ یک ابرحلقه است، که در آنجا برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\text{برای هر } z_1, \dots, z_n \in R \text{ داریم} \\ &\mathcal{E}_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = R = \sum_{i=1}^n z_i^m \end{aligned}$$

از این رو، R \mathcal{E}_m -کامل است.

نتیجه ۳-۵: اگر $(R, +, \cdot)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک (نیم)ابرحلقه n -کامل باشد، آنگاه برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ ، R یک (نیم)ابرحلقه \mathcal{E}_m -کامل است.

برهان. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک ابرحلقه n -کامل باشد. حال فرض کنید $2 \leq m \in \mathbb{N}$

$x \in \mathcal{E}_m(\sum_{i=1}^n z_i^m)$ و $z_1, \dots, z_n \in R$ و \mathbb{N} پس $t \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ وجود دارد به طوری که $x \in \mathcal{E}_m(t)$ حال از آنجایی که $\mathcal{E}_m \subseteq \gamma$ و R یک ابرحلقه n -کامل است داریم:

$$x \in \mathcal{E}_m(t) \subseteq \gamma(t) \subseteq \gamma(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m$$

بنابراین $\mathcal{E}_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) \subseteq \sum_{i=1}^n z_i^m$ از طرفی

$$\begin{aligned} &\text{چون } \mathcal{E}_m \text{ انعکاسی است به وضوح} \\ &\sum_{i=1}^n z_i^m \subseteq \mathcal{E}_m(\sum_{i=1}^n z_i^m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{در نتیجه برای هر } z_1, \dots, z_n \in R \text{ داریم} \\ &\mathcal{E}_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m \end{aligned}$$

و این یعنی R یک ابرحلقه \mathcal{E}_m -کامل است. عکس نتیجه (۳-۵) لزوماً برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳-۶: نیم ابرحلقه \mathcal{E}_m -کامل $(R, +, \cdot)$ مثال

(۳-۲) را در نظر بگیرید. می‌توان دید که در آنجا

$$\gamma(c) = \{b, c\} \text{ و } \gamma(b) = \{b, c, d\}$$

از این رو

$$\begin{aligned} \gamma(a + a) &= \gamma(\{b, c\}) \\ &= \gamma(b) \cup \gamma(c) \end{aligned}$$

برهان: با توجه به نتیجه ۲-۲، هر بخش کامل یک

m -بخش کامل است. حال فرض کنید A یک m -

بخش کامل از R باشد. همچنین فرض کنید برای اعداد

طبیعی n, k_1, \dots, k_n و عناصر دلخواه z_{i1}, \dots, z_{ik_i}

از R به طوری که $1 \leq i \leq n$ ، داشته باشیم

$$A \cap \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \neq \emptyset$$

از آنجایی که R یک ابرحلقه m -خودتوان است، داریم

$$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}^m) \subseteq \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})^m$$

از این رو، با توجه به رابطه (1)، برای هر $1 \leq i \leq n$

عناصر n $t_i \in \prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}$ وجود دارند به طوری که

$$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n t_i^m$$

پس $A \cap \sum_{i=1}^n t_i^m \neq \emptyset$ حال چون A یک m -بخش

کامل است، خواهیم داشت، $\sum_{i=1}^n t_i^m \subseteq A$ ، بنابراین،

$$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n t_i^m \subseteq A$$

که نتیجه می‌دهد A یک بخش کامل از R است.

۳- ابرحلقه‌های \mathcal{E}_m -کامل

در این بخش، ابرحلقه‌های \mathcal{E}_m -کامل تعریف شده و

تفاوت و ارتباط آن‌ها با ابرحلقه‌های n -کامل نشان داده

می‌شوند. علاوه بر این، با استفاده از مفهوم m -

بخش‌های کامل، مشخصه‌ای برای این نوع از ابرحلقه‌ها

معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳-۱: فرض کنید $2 \leq m \in \mathbb{N}$

(نیم)ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ را یک (نیم)ابرحلقه \mathcal{E}_m -کامل

گویند، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$

داشته باشیم

$$\mathcal{E}_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m.$$

مثال ۳-۲: نیم ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ مثال (۳-۲) را در

نظر بگیرید. برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ و برای هر

$z_1, \dots, z_n \in R$ داریم $\sum_{i=1}^n z_i^m = \{b, d\}$

همچنین داریم $\mathcal{E}_m(b) = \mathcal{E}_m(d) = \{b, d\}$ از

این رو، $\mathcal{E}_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \{b, d\} = \sum_{i=1}^n z_i^m$

بنابراین، R یک نیم ابرحلقه \mathcal{E}_m -کامل است.

مثال ۳-۳: برای ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ در مثال (۵-۲)

داریم

$$\mathcal{E}_2(0^2 + 0^2) = \mathcal{E}_2(0)$$

$$\gamma(\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})) \subseteq \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}^m).$$

بنابر انعکاسی بودن γ به وضوح عکس شمولیت فوق برقرار است. از این رو، R یک ابرحلقه n -کامل است.

قضیه ۳-۸: ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ ε_m -کامل است اگر و تنها اگر $\varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^n z_i^m$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ و برای $z_1, \dots, z_n \in R$.

برهان. فرض کنید R ε_m -کامل باشد. در این صورت برای $x \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ و $z_1, \dots, z_n \in R$ ، $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\varepsilon_m(x) \subseteq \bigcup_{t \in \sum_{i=1}^n z_i^m} \varepsilon_m(t) = \varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m.$$

از طرفی اگر $y \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ آنگاه $x \varepsilon_m y$ که نتیجه می‌دهد، $y \in \varepsilon_m(x)$ بنابرین،

$$\varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^n z_i^m$$

برعکس، فرض کنید $\varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^n z_i^m$ ، برای هر $x \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ به طوری که $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$ از این رو داریم:

$$\varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \bigcup_{x \in \sum_{i=1}^n z_i^m} \varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^n z_i^m.$$

بنابرین، R یک ابرحلقه ε_m -کامل است.

حال مشخصه‌ای برای ابرحلقه‌های ε_m -کامل بر اساس m -بخش‌های کامل ارائه می‌کنیم:

قضیه ۳-۹: اگر R یک ابرحلقه ε_m -کامل باشد، آنگاه $z_1, \dots, z_n \in R$ و $n \in \mathbb{N}$ برای $\sum_{i=1}^n z_i^m$ یک m -بخش کامل از R است.

برهان. برای $t \in \mathbb{N}$ و $x_1, \dots, x_t \in R$ فرض کنید

$$\sum_{i=1}^t x_i^m \cap \sum_{i=1}^n z_i^m \neq \emptyset.$$

از این رو، $y \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ وجود دارد به طوری که $y \in \sum_{i=1}^t x_i^m$ حال برای هر $u \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ داریم $u \varepsilon_m y$ که بنابر قضیه (۳-۸) نتیجه می‌شود

$$u \in \varepsilon_m(y) = \sum_{i=1}^t x_i^m.$$

پس، $\sum_{i=1}^n z_i^m \subseteq \sum_{i=1}^t x_i^m$ بنابرین، $\sum_{i=1}^n z_i^m$ یک m -بخش کامل از R است.

مثال ۳-۱۰: ابرحلقه $(R = \{0, 1\}, +, \cdot)$ تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &= \{b, c, d\} \\ &\neq \{b, c\} \\ &= a + a \end{aligned}$$

و این یعنی R 2-کامل نیست. علاوه بر این برای هر $n \geq 3$ دلخواه می‌توان دید که

$$\sum_{i=1}^n a = \{b, d\} \neq \{b, c, d\} = \gamma(\sum_{i=1}^n a).$$

پس R برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک نیم ابرحلقه n -کامل نیست.

برای $2 \leq m \in \mathbb{N}$ ابرحلقه R را m -خودتوان قوی گویند هرگاه برای هر $x \in R$ داشته باشیم $\{x\} = x^m$. همچنین یادآوری می‌کنیم که روی یک ابرحلقه m -خودتوان صادق در رابطه (1) همواره $\varepsilon_m = \gamma$ از این رو:

قضیه ۳-۷: فرض کنید R یک ابرحلقه m -خودتوان قوی صادق در رابطه (1) باشد. در این صورت اگر R ε_m -کامل باشد آنگاه برای هر عدد طبیعی n یک ابرحلقه n -کامل نیز است.

برهان. فرض کنید برای اعداد طبیعی دلخواه n, k_1, \dots, k_n و عناصر دلخواه z_{i1}, \dots, z_{ik_i} از R به طوری که $1 \leq i \leq n$ ، داشته باشیم:

$$x \in \gamma(\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})).$$

از این رو $t \in \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})$ وجود دارد به طوری که

$$x \in \gamma(t),$$

حال چون R یک ابرحلقه m -خودتوان قوی است، پس

$$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}^m)$$

و چون در رابطه (1) صدق می‌کند، پس برای هر i عناصر $t_i \in \prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}$ ($1 \leq i \leq n$) وجود دارند به طوری که

$$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n t_i^m,$$

حال از آنجایی که $\varepsilon_m = \gamma$ ، پس

$$\begin{aligned} x \in \gamma(t) &\subseteq \gamma(\sum_{i=1}^n t_i^m) \\ &= \varepsilon_m(\sum_{i=1}^n t_i^m) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i^m \text{ (کامل است)} \subseteq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) &= \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}^m) \\ &= \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}), \end{aligned}$$

+	0	1
0	{0}	R
1	R	{1}

.	0	1
0	{0}	{0}
1	{0}	R

برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ داریم $\sum_{i=1}^n 0^m = \{0\}$ که

یک m -بخش کامل از R نیست زیرا

$$\sum_{i=1}^n 1^m \cap \{0\} = R \cap \{0\} = \{0\}$$

ولی $\{0\} \not\subseteq R$. از این رو، طبق قضیه (۳-۹)، R یک

ابرحلقه \mathcal{E}_m -کامل نیست.

مثال (۳-۱۰) نشان می‌دهد که چطور m -بخش‌های

کامل می‌توانند ابزاری برای شناسایی ابرحلقه‌های \mathcal{E}_m -

کامل باشند.

فهرست منابع

- [10] S. Mirvakili, S.M. Anvariye, B. Davvaz, (2008) Transitivity of Γ -relation on hyperfields, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 51 (3) 233-243.
- [11] M. Norouzi, I. Cristea, (2017) Fundamental relation on m-idempotent hyperrings, Open Mathematics, 15, 1558-1567.
- [1] F. Marty, (1934) Sur une generalization de la notion de groupe 8^{th} congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm, 45-49.
- [2] P. Corsini, (1993) Prolegomena of Hypergroup Theory, Second Edition Aviani Editore.
- [3] P. Corsini, V. Leoreanu-Fotea, (2003) Applications of hyperstructure theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [4] B. Davvaz, V. Leoreanu-Fotea, (2007) Hyperring Theory and Applications, International Academic Press, USA.
- [5] T. Vougiouklis, (1994) Hyperstructures and their representations, Hadronic Press Inc., Palm Harbor.
- [6] T. Vougiouklis, (1991) The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield, Algebraic hyperstructures and applications, Xanthi, World Sci. Publ., Teaneck, NJ., 203-211.
- [7] B. Davvaz, T. Vougiouklis, (2007) Commutative rings obtained from hyperrings (H_v -rings) with α^* -relations, Communications in Algebra, 35 (11) 3307-3320.
- [8] R. Ameri, T. Nozari, (2010) A new characterization of fundamental relation on hyperrings, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 5 (15) 721-738.
- [9] P. Ghasvand, S. Mirvakili, B. Davvaz, (2017) Boolean rings obtained from hyperrings with $\eta_{\{1,m\}}^*$ -relation, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science, 41 (1) 69-79.